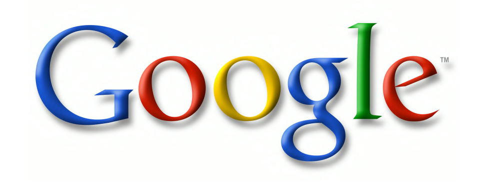
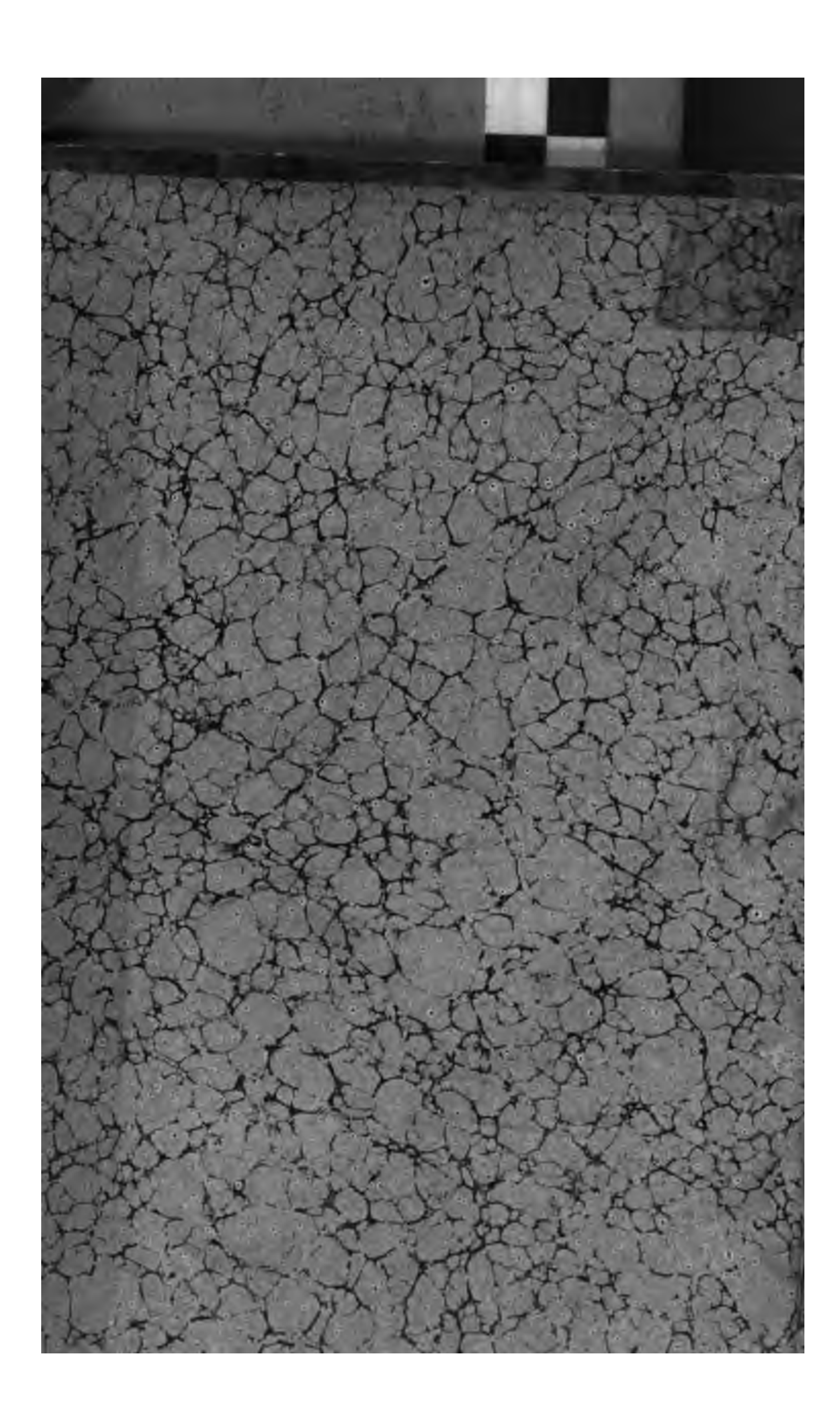
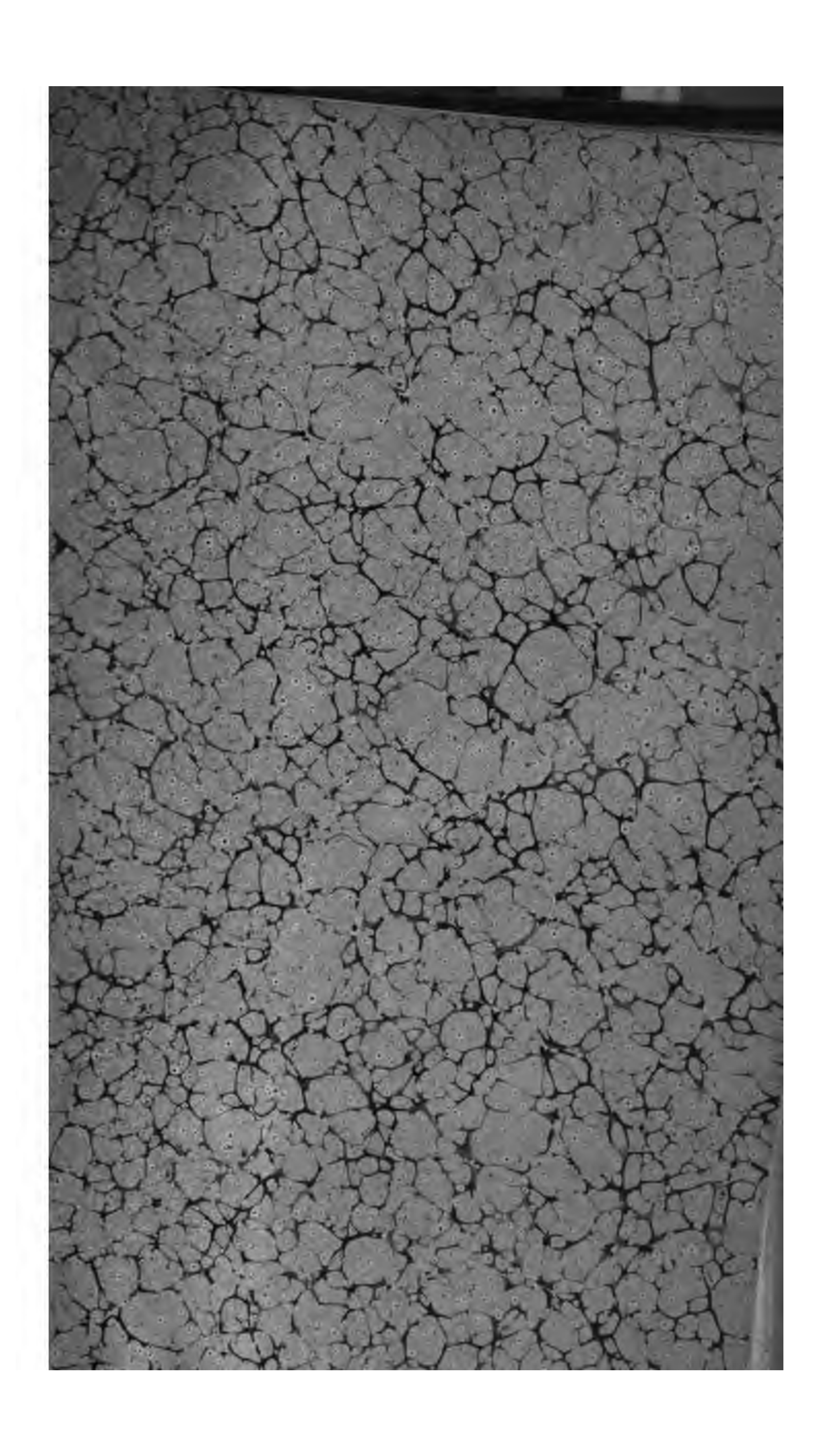








COURS
DE MÉCANIQUE
APPLIQUÉE AUX CONSTRUCTIONS

PREMIÈRE PARTIE

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

PARIS. — IMPRIMERIE ARNOUS DE RIVIÈRE, RUE RACINE, 26.

COURS

DE MÉCANIQUE

APPLIQUÉE AUX CONSTRUCTIONS

PREMIÈRE PARTIE

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

PAR

ÉDOUARD COLLIGNON
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

NOUVELLE ÉDITION

PARIS
DUNOD, ÉDITEUR
LIBRAIRE DES CORPS NATIONAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES
ET DES TÉLÉGRAPHES
Quai des Augustins, 49

1877

PRÉFACE

DE LA PREMIÈRE ÉDITION

La *résistance des matériaux* forme la première partie du cours de mécanique appliquée aux constructions que, depuis l'année 1866, nous sommes chargé de faire aux élèves externes de l'École des ponts et chaussées. La seconde partie a pour objet l'*hydraulique* et sera publiée plus tard.

Un coup d'œil sur la table des matières montrera au lecteur l'ordre que nous avons suivi.

Notre point de départ est l'observation et l'expérience. Lorsque l'état imparfait de nos connaissances nous force à adopter une hypothèse pour donner prise au raisonnement et au calcul, nous avons soin de faire ressortir cette hypothèse, et de bien mettre en évidence la lacune qu'elle est destinée à combler.

En général, nous avons préféré la méthode synthétique à la méthode analytique. La première, qui mène du simple au

composé, convient particulièrement à l'exposition des théories. La seconde prend les problèmes à leur plus haut degré de complication, et essaye de les réduire à leurs éléments les plus simples. C'est à proprement parler une méthode d'invention et de découverte. Nos préférences n'ont, du reste, rien d'exclusif : sans rejeter le secours de l'analyse, auxiliaire indispensable pour nos études, nous ramenons, chaque fois que cela est possible, la solution des problèmes à la géométrie pure.

Les questions que nous passons en revue ont été étudiées fort souvent, et il serait difficile de les traiter d'une manière tout à fait neuve. Nous avons donc largement puisé dans les travaux anciens ou récents, en indiquant toujours les sources, et en renvoyant aux ouvrages originaux ceux de nos lecteurs qui voudraient franchir les limites d'un enseignement élémentaire. Au premier rang parmi ces emprunts, signalons avec reconnaissance tout ce que nous devons à nos Maîtres, MM. Bélanger et Bresse, qui ont doté la mécanique de tant de perfectionnements utiles, et dont les nombreux travaux sont pour leurs élèves autant de modèles de clarté et de rigueur.

Avant de remplir les fonctions de professeur, nous avions eu, à diverses époques, l'occasion de traiter quelques questions de Résistance (1). Plusieurs passages de ces premiers essais, retou-

(1) *Ponts métalliques à poutres droites continues*, Pétersbourg, 1860. — *Tableaux polytechniques de MM. Blum et Ostrogradski*, Pétersbourg, 1861-62. — *Théorie des poutres en treillis et des fermes américaines*, Annales des ponts et chaussées, 1864. — *Théorie élémentaire des poutres droites*, Paris, 1865.

chés et complétés, ont pu être reproduits dans un travail plus étendu. Notre *Théorie des poutres droites*, débarrassée des parties étrangères à l'objet spécial que nous avons en vue aujourd'hui, a été refondue en entier pour entrer dans notre nouvel ouvrage.

ÉDOUARD COLLIGNON.

Paris, le 11 juin 1869.

INTRODUCTION.

DÉFINITIONS.

1. Les matériaux qui entrent dans les constructions appartiennent en général à la classe des *corps solides.*

Un corps solide est un corps qui oppose une résistance appréciable aux diverses déformations qu'on veut lui faire subir.

Dans la mécanique rationnelle on étudie l'équilibre et le mouvement de *corps solides invariables*, c'est-à-dire indéformables, quelles que soient les forces qu'on leur suppose appliquées ; mais ce sont là de pures conceptions géométriques qu'on ne rencontre pas dans la nature.

Un corps *fluide*, liquide ou gaz, oppose une résistance appréciable aux déformations qui ont pour résultat de réduire le volume total occupé par ce corps; mais les changements de forme qui ne sont pas accompagnés d'un changement de volume peuvent s'effectuer sans effort, du moins sans effort sensible.

La définition des corps solides qui vient d'être donnée distingue donc à la fois les corps solides naturels des corps solides géométriques, et les corps solides des fluides, soit liquides, soit gazeux.

Certains systèmes peuvent se comporter comme des solides à l'égard de quelques déformations particulières, tout en n'opposant qu'une résistance insignifiante aux autres déformations. Un *fil*, par exemple, peut être courbé sans effort, et ne peut être allongé sans

travail. Un *tissu* résiste aux déformations tendant à allonger l'un des deux systèmes de fils qui le composent, et se laisse infléchir sans résistance.

THÉORIE MOLÉCULAIRE. — ÉLASTICITÉ.

2. On conçoit tous les corps naturels, qu'ils soient solides, liquides ou gazeux, comme formés de *molécules* infiniment petites, séparées les unes des autres par des intervalles dont la grandeur est comparable aux dimensions de ces molécules ; elles exercent les unes sur les autres des actions du même ordre de grandeur que les molécules elles-mêmes, variables avec leurs distances mutuelles, et dirigées suivant les droites qui les joignent deux à deux. Dans les corps solides en particulier, chaque molécule a par rapport aux autres une position qu'elle ne peut abandonner sans un effort plus ou moins grand. Dans les fluides, au contraire, les molécules ont une liberté presque absolue de tourner les unes autour des autres, ou de rouler les unes sur les autres sans frottement sensible.

Lorsqu'on applique à différents points d'un corps solide des forces extérieures qui se font équilibre, l'équilibre des actions mutuelles intérieures est troublé, et une déformation se produit ; cette déformation entraîne une variation des distances mutuelles des molécules, et en même temps une variation des intensités et des directions des actions intérieures. L'équilibre se rétablit, par la déformation, entre les forces intérieures et les forces extérieures. Si, une fois la déformation opérée, on supprime les forces extérieures qui l'ont produite, la déformation, en général, ne peut persister, et le corps tend à revenir à sa forme primitive ; les molécules, dans ce mouvement rétrograde, acquièrent des vitesses qui leur font dépasser leurs positions d'équilibre naturel, autour desquelles, théoriquement et abstraction faite de diverses résistances accessoires, elles devraient indéfiniment osciller. Cette tendance d'un corps déformé à revenir à sa forme naturelle constitue ce qu'on appelle l'*élasticité de la matière*. Au

point de vue de l'élasticité, de grandes différences se manifestent entre les divers corps solides.

Les corps *parfaitement élastiques*, une fois déformés, reviennent complétement à leur forme naturelle.

Les corps *parfaitement mous* manquent absolument d'élasticité, et abandonnés à eux-mêmes après une déformation quelconque, ils demeurent dans l'état où ils ont été laissés, sans montrer de tendance à un retour vers leur forme primitive. Ces corps forment à certains égards un intermédiaire entre les solides et les fluides.

Les corps *parfaitement durs*, que l'on admettait autrefois dans la mécanique (1) comme des corps dépourvus d'élasticité, sont ou bien des solides géométriques, qui n'ont pas d'existence réelle, ou bien des corps solides doués d'une grande raideur, et il n'y a lieu en définitive de considérer dans les applications que deux types extrêmes de corps solides, les corps mous et les corps élastiques.

En réalité, les corps solides naturels ne sont ni parfaitement mous ni parfaitement élastiques, mais ils se classent tous entre ces deux types extrêmes ; l'élasticité de la matière est variable d'un corps à l'autre, très-grande et presque absolue dans les uns, très-petite et presque nulle dans les autres. Elle est moyenne dans la plupart. Nous verrons plus loin comment elle est susceptible d'évaluation numérique (2).

---

(1) Carnot, *Principes de l'équilibre et du mouvement*, 2e partie.

(2) Ajoutons que les corps solides peuvent se classer en corps *homogènes* et corps *non homogènes*; la première classe comprend les corps *cristallisés*, et certains corps *non cristallisés*. Dans les corps non cristallisés homogènes, et dans certains corps cristallisés, l'élasticité est la même dans toutes les directions autour d'un point quelconque; ces corps prennent alors le nom de corps *homogènes et d'élasticité constante*, ou de corps *isotropes*. Pour la définition précise de ces différentes classes, nous renverrons à la première leçon de Lamé *sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, § 2.

LIMITE D'ÉLASTICITÉ.

3. Lorsque la déformation d'un corps solide est suffisamment petite, le corps se comporte à peu près comme un corps parfaitement élastique, c'est-à-dire qu'après la suppression des forces qui ont produit cette petite déformation, il y a retour complet à la forme naturelle.

La *limite d'élasticité* est la limite supérieure des efforts qu'on peut faire subir à un corps solide sans y produire de déformations permanentes. Tant que les efforts exercés sur un corps sont inférieurs à cette limite, les déformations produites s'effacent; si les efforts sont supérieurs à la même limite, les déformations ne s'effacent plus que partiellement, ou même ne s'effacent plus du tout.

Au point de vue mécanique, un corps qui n'a pas subi d'efforts au-dessus de sa limite d'élasticité reste ce qu'il était primitivement. Un corps qui a subi des efforts au-dessus de sa limite d'élasticité doit être considéré comme un système nouveau, dans lequel les positions relatives des molécules ont été altérées plus ou moins profondément, et qui peut posséder de nouvelles propriétés mécaniques. Par exemple, le travail de la filière pour la fabrication des fils métalliques modifie profondément l'élasticité du métal, mais il accroît d'une quantité notable sa résistance à l'extension. De même le martelage, le laminage, l'action de la chaleur, le choc du balancier monétaire, sont autant de manières d'altérer l'élasticité d'une masse métallique et d'en accroître la résistance. Il est donc inexact d'affirmer d'une manière absolue, comme on le fait quelquefois, que l'altération de l'élasticité d'un corps solide amène un affaiblissement de sa résistance et produit une prédisposition à la rupture; le résultat dépend du mode d'altération employé. Ce qu'on peut dire, c'est que l'altération de l'élasticité est vicieuse quand elle porte sur les matériaux entrant dans une construction, et qu'elle résulte de l'action des charges que ces matériaux ont à supporter. Les tas-

sements, les déformations permanentes, accusent ordinairement un pareil défaut.

La limite d'élasticité donne un second moyen de définir les corps mous et les corps élastiques. Un corps mou est celui dont la limite d'élasticité est à peu près nulle; un corps élastique est celui dont la limite d'élasticité est très-élevée.

4. Pour déterminer la limite d'élasticité d'un corps relativement à un effort défini, par exemple la limite d'élasticité d'une tige métallique soumise à un effort d'extension, il faut, conformément à la définition, observer les allongements pris par la tige sous l'action de divers poids qu'on lui fait supporter successivement; en supprimant à chaque fois la charge pour l'augmenter ensuite, on notera à partir de quel allongement et de quelle charge la tige rendue à elle-même conserve un allongement permanent. Cette charge sera la limite cherchée. On voit que le résultat de cette série d'expériences peut varier avec le degré de précision apporté aux mesures de la longueur de la tige; de deux séries d'observations, celle dans laquelle on aura apprécié le plus rigoureusement les longueurs sera celle qui donnera la valeur la plus basse de la limite d'élasticité. Aussi est-il impossible de définir la limite d'élasticité d'une manière parfaitement rigoureuse. Au point de vue du physicien, qui dispose pour ses expériences des procédés d'observation les plus perfectionnés, la limite d'élasticité est tout à fait nulle, c'est-à-dire que toute déformation, si petite qu'elle soit, persiste en partie après suppression de l'effort qui l'a produite. Pour l'ingénieur, cette précision du langage n'est pas nécessaire; il doit distinguer entre les déformations microscopiques et les déformations visibles pour tous les yeux, et il n'a pas à se préoccuper des premières. A chaque matière employée dans les constructions correspond ainsi une limite d'élasticité, donnée pratique qui, sans être fixée avec une entière rigueur, fournit pour la rédaction des projets un renseignement des plus utiles.

L'observation semble démontrer que la limite d'élasticité dépend de la durée de l'application des efforts; elle est plus basse pour un effort qui dure longtemps que pour un effort passager.

RUPTURE.

5. Lorsqu'on agit sur un corps solide en y appliquant des forces qui tendent soit à le comprimer, soit à l'étendre, soit à l'infléchir, et qu'on augmente indéfiniment ces forces, la limite d'élasticité es bientôt dépassée; la déformation devient de plus en plus apparente, et enfin la *rupture* se produit. Ce phénomène, qui est très-varié, met en évidence la structure intérieure du corps soumis à l'expérience. Tantôt le solide est *grenu*, tantôt il est *nerveux* ou *fibreux*, tantôt il présente une cassure cristalline, ou encore il se décompose en blocs affectant certaines formes géométriques. La rupture change aussi de caractère suivant qu'elle a lieu par extension, par compression ou par flexion.

La manière d'obtenir la rupture varie d'un corps à l'autre, et pour le même corps, d'une direction à l'autre : ainsi, le bois se fend à la hache avec une grande netteté dans le sens des fibres, tandis que pour couper les fibres à angle droit, il est préférable de se servir de la scie;

Le fer se coupe à froid à la cisaille, et se perce sous le poinçon. Mais le travail du poinçon allonge légèrement la pièce à travers laquelle sont percés les trous; le perçage au foret ne produit pas le même effet;

Chaque nature de pierre doit être travaillée avec les outils appropriés : le granit, par exemple, demande un autre outillage que le calcaire des constructions de Paris.

En résumé, les lois de la rupture peuvent intéresser le constructeur à deux points de vue : 1° au point de vue du travail des matériaux, bois, métal ou pierre, qu'il s'agit de couper, de tailler, de dresser, ou même de casser en morceaux ; 2° au point de vue des indications que fournit la cassure sur les propriétés des matières ; on casse par exemple un certain nombre d'échantillons pris au hasard dans une fourniture de fer, pour s'assurer que la fourniture satisfait aux conditions imposées par le cahier des charges. Quant aux

efforts développés dans les matériaux d'un ouvrage, ils doivent toujours rester fort au-dessous des charges de rupture, puisqu'ils sont même inférieurs à la limite d'élasticité.

OBJET ET MÉTHODE DU COURS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

6. La partie de la mécanique appliquée qui a reçu le nom de *Théorie de la résistance des matériaux* a pour objet principal de déterminer les efforts intérieurs développés dans les divers éléments d'une construction donnée, et de vérifier si ces efforts sont inférieurs aux limites adoptées. Elle a aussi pour objet de déterminer avec le plus d'économie possible les formes et les dimensions qui assurent la résistance d'un ouvrage, c'est-à-dire qui correspondent à des efforts locaux inférieurs aux mêmes limites.

Cette science est en partie rationnelle, en partie expérimentale; enfin elle doit recourir à un certain nombre d'hypothèses nécessaires pour soumettre au calcul les problèmes qu'elle a pour but de résoudre: le nombre de ces hypothèses tend d'ailleurs à décroître à mesure que la théorie se perfectionne. Cette intervention des hypothèses n'ôte rien, au surplus, au caractère positif de la science; car les hypothèses que l'on est conduit à admettre sont, comme en physique, soumises à un critérium absolu : les résultats logiques qui s'en déduisent doivent être d'accord avec les résultats directs des observations, entre les limites où l'on peut faire usage de la théorie.

7. L'étude empirique des propriétés mécaniques des matériaux remonte à l'antiquité la plus reculée, et date des premiers essais de construction : on n'a pas tardé à reconnaître l'influence des dimensions et des formes des matériaux sur leur résistance et leur durée, et l'architecture antique, guidée par l'expérience et par un instinct mécanique très-juste en général, a consacré certaines règles que les théories modernes justifient pour la plupart. La théorie de la résistance des matériaux est au contraire toute moderne. C'est Galilée qui essaya le premier d'appliquer la géométrie et le calcul à la solution des

problèmes de cette nature, et c'est lui par conséquent qu'on peut regarder comme le fondateur de la science. La théorie des poutres droites chargées de poids, qu'il donna en 1638, est fondée sur une hypothèse. Il remarque très-bien, dans l'un de ses dialogues, que les solides semblables au point de vue géométrique sont loin d'avoir des résistances proportionnelles à une même puissance du rapport de similitude; c'est le premier exemple qu'on ait proposé de la distinction radicale à faire entre la similitude en mécanique et la similitude en géométrie (1). La théorie de Galilée pour les poutres droites n'a pu être adoptée, parce qu'elle ne présentait pas un accord suffisant avec les lois de la statique et avec les données de l'expérience; mais en 1705, Jacques Bernoulli, modifiant légèrement cette hypothèse, rencontra la véritable théorie, celle que l'expérience confirme et que l'on a introduite dans l'enseignement. A partir de ce moment, la doctrine de la résistance des matériaux n'a cessé de faire des progrès. Elle fut cultivée au XVIII[e] siècle par les plus grands géomètres, Euler et Lagrange, et par un grand nombre de physiciens et d'ingénieurs. Elle a enfin reçu de notre temps des améliorations dans deux directions bien distinctes. D'un côté, sous l'impulsion donnée par Navier, Poisson, Cauchy, Lamé, elle est devenue une branche particulière de la physique mathématique sous le nom de *Théorie générale de l'élasticité.* D'un autre côté, les méthodes de la théorie ordinaire, perfectionnées par les travaux de Navier, de Poncelet, de Clapeyron, ont tantôt suivi, tantôt provoqué les progrès de la construction. Tandis que les anciens types de construction, d'abord essayés en petit, ont été ensuite appliqués sur des dimensions graduellement croissantes, les temps modernes ont vu créer de toutes pièces des types nouveaux, fruits du calcul et des méditations de leurs inventeurs (2). Jamais la fécondité de la science n'avait reçu une aussi éclatante démonstration.

---

(1) Sur *la similitude en mécanique*, Voir dans le 32[e] cahier du *Journal de l'école polytechnique* une note de M. J. Bertrand.

(2) Voûtes surbaissées, voûtes en arc de cercle, revêtements, ponts suspendus, ponts métalliques à grande portée, en arc ou à poutres droites, treillis, charpentes, portes d'écluses en fer, barrages mobiles, etc.

La méthode que l'on suivra dans ce cours est la méthode ancienne, méthode synthétique ou géométrique, qui, précisément parce qu'elle emprunte moins à l'analyse que la nouvelle, convient mieux aux ingénieurs, et se prête sans difficulté à la solution rapide des problèmes qu'ils doivent résoudre la plupart du temps avec une extrême urgence. Le défaut de généralité qu'on pourrait lui reprocher est sans inconvénient pour les applications; car elle a toute la généralité nécessaire aux besoins de la pratique.

APPLICATION DE LA THÉORIE MOLÉCULAIRE AU SYSTÈME FORMÉ PAR DEUX MOLÉCULES (1).

8. Considérons (fig. 1) deux molécules M, M', placées à une distance MM' = r; les forces mutuelles qui agiront sur ces molécules sont les unes attractives, les autres répulsives, mais elles sont toutes dirigées suivant la direction MM', et sont fonction de la distance r.

Fig. 1.

M M'

Autrefois on admettait autour de chaque molécule une atmosphère formée par le fluide calorique, et l'on attribuait à ce fluide la propriété d'agir par attraction sur les molécules matérielles, et par répulsion sur ses propres molécules; dans cet ordre d'idées la molécule M subissait :

1° L'attraction de la molécule M' sur la molécule M;

2° L'attraction de l'atmosphère de M' sur la molécule M;

3° L'attraction de la molécule M' sur l'atmosphère de M;

4° La répulsion de l'atmosphère M' sur l'atmosphère de M.

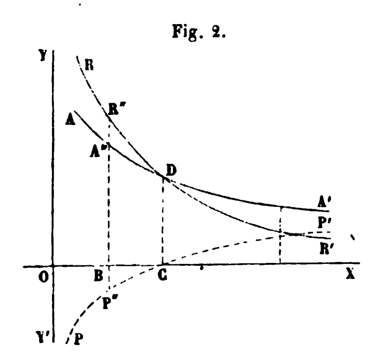
Aujourd'hui l'hypothèse d'un fluide calorique est abandonnée; les physiciens ont sur la chaleur des idées toutes différentes, et cette décomposition des actions mutuelles ne peut plus être admise. Mais, sans rien préciser sur la nature de ces forces prises individuellement, on peut toujours admettre que la molécule M subit, de la part de la

(1) Poncelet, *Introduction à la mécanique industrielle*, p. 260.

molécule M′, deux actions, l'une attractive et dirigée suivant MM′, l'autre répulsive et dirigée suivant le prolongement de M′M ; nous représenterons la première force par A et la seconde par R ; A et R seront des fonctions de la distance r, et en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, A et R seront aussi les forces exercées par la molécule M sur la molécule M′.

Pour étudier l'effet des variations de ces forces A et R avec les distances r, construisons (fig. 2) les courbes qui représentent en coordonnées rectangulaires les valeurs des forces A et R en fonction de la distance r, considérée comme abscisse.

Fig. 2.



Soit RR′ la courbe des R, et AA′ la courbe des A. Si l'on prend une abscisse arbitraire OB, les coordonnées BA″, BR″ correspondantes sont les valeurs des attractions et répulsions mutuelles des deux molécules M et M′, lorsque leur distance MM′ est égale à OB. L'équilibre naturel des deux molécules, c'est-à-dire l'équilibre réalisé sans intervention d'aucune force extérieure, aura lieu lorsque MM′ sera égale à OC, abscisse du point de rencontre D des deux courbes A et R. Car pour cette distance les forces A et R sont égales et se font équilibre sur chaque molécule. Lorsqu'au contraire on fait varier la distance MM′, de manière à l'amener de sa valeur OC à une valeur OB quelconque, les forces A et R ne demeurent plus égales, et il faut, pour maintenir les molécules dans leur nouvelle position relative, appliquer à chacune une force extérieure mesurée par la différence A″R″.

Pour de très-petites valeurs de r, la force R doit être très-grande ; elle devient infinie pour $r = 0$, et par suite la courbe RR′ a pour asymptote l'axe OY. Non-seulement l'ordonnée BR″ grandit indéfiniment quand l'abscisse OB décroît jusqu'à zéro, mais encore la différence A″R″ grandit indéfiniment dans les mêmes circonstances, de sorte que pour amener les molécules M et M′ au contact, il faudrait développer un effort infini ; en d'autres termes, on admet qu'il

est impossible d'amener, par l'application d'une force extérieure, deux molécules à se toucher.

Lorsque r grandit indéfiniment, les forces R et A décroissent, et ont toutes deux une limite nulle ; les courbes AA', RR' ont donc l'axe OX pour asymptote commune ; mais on suppose que R décroît beaucoup plus vite que A, de telle sorte qu'au delà d'une certaine distance, les actions mutuelles des deux molécules se réduisent à une très-faible attraction.

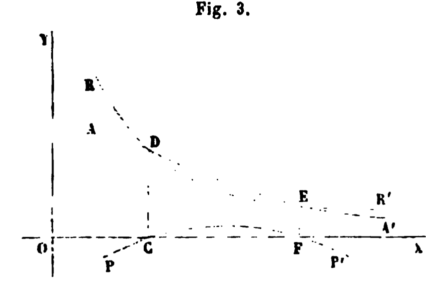
On peut construire une courbe des différences A — R ; pour cela prenons pour chaque abscisse OB une coordonnée BP″ égale à la différence A″R″ des ordonnées correspondantes des deux courbes, et portons-la au-dessous de l'axe OX, si en ce point la courbe R est au-dessus de la courbe A, et au-dessus dans le cas contraire. Nous obtiendrons ainsi une courbe PCP', qui passera par le point C, correspondant à la position d'équilibre, et qui sera asymptote à la partie OY' de l'axe des coordonnées ; prolongée indéfiniment vers les abscisses positives, cette courbe serait aussi asymptote à l'axe OX.

L'inspection de ces diverses courbes permet de distinguer l'équilibre *stable* de l'équilibre *instable.*

A la distance $r = OC$, l'équilibre est stable, parce que, pour r un peu plus petit que OC, la répulsion l'emporte sur l'attraction, et que le contraire a lieu pour r un peu plus grand. Il résulte de là qu'un petit rapprochement des molécules développe entre elles un effort répulsif, et qu'un petit écartement développe un effort attractif ; dans les deux cas, il y a tendance des molécules vers la position d'équilibre qu'on vient de leur faire abandonner. L'équilibre est donc stable.

Si les deux courbes AA', RR' se recoupaient en un second point E, correspondant à une distance $r = OF$, la position relative définie par cette distance serait bien encore une position d'équilibre ; mais l'équilibre serait instable, car un léger rapprochement des molécules ferait naître une force attractive, qui

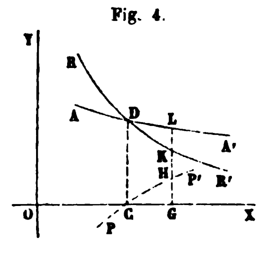
Fig. 3.



tendrait à accroître ce rapprochement; un léger écartement ferait naître une force répulsive qui tendrait à accroître cet écartement; dans les deux cas, l'altération de la position tendrait à augmenter, et les molécules fuiraient leur état d'équilibre au lieu de faire effort pour y revenir.

9. La figure 2 nous permet aussi de définir la *raideur* du système des deux molécules pour une position relative donnée. Un système est d'autant plus raide qu'il faut une plus grande force pour y produire une déformation déterminée. La raideur, dans le cas particulier dont nous nous occupons, est mesurée par le rapport de la variation de la force à la variation correspondante de la distance mutuelle. Par exemple, au point D (fig. 4), la raideur sera la limite du rapport $\frac{KL}{CG}$ de ces deux variations simultanées, ou bien ce sera la limite du rapport $\frac{HG}{CG}$, ou enfin le coefficient d'inclinaison de la tangente à la courbe PP' au point C.

Fig. 4.



Si $P = f(r)$ est l'équation de cette courbe PP', la dérivée $f'(r)$ sera donc la mesure de la raideur.

La condition pour qu'une position d'équilibre soit stable est que la raideur correspondante soit positive; l'équilibre est instable si la raideur est négative; il est indifférent si la raideur est nulle.

Telle est l'interprétation mécanique du tracé des tangentes à la courbe PP'.

La quadrature de la courbure PP' a de même une interprétation. Si par l'application de forces extérieures on fait varier la distance r des deux molécules, à partir d'une valeur r_0 jusqu'à une valeur r_1, le *travail des forces moléculaires pendant cette déformation* sera égal, au signe près, à l'intégrale

$$\int_{r_0}^{r_1} P\,dr,$$

c'est-à-dire sera représenté en valeur absolue par l'aire de la

courbe PP′ comprise entre les coordonnées correspondantes aux abscisses r_0, r. Si nous convenons, par exemple, de donner à la force P le signe + quand elle représente une attraction, et le signe — quand elle représente une répulsion, nous devrons prendre cette intégrale avec le signe — pour avoir le travail avec son signe.

10. On ne connaît pas la fonction P; mais si l'on se borne à considérer de petites variations de position de part et d'autre de la position C qui définit l'équilibre naturel, on peut, par approximation, substituer à la courbe PP′ une tangente menée au point D de la courbe, et à l'équation rigoureuse

$$P = f(r),$$

où f est une fonction inconnue et probablement très-complexe, on substituera ainsi une équation linéaire

$$P = ar + b,$$

qui n'est plus vraie pour toutes les valeurs de r, mais qui est vraie approximativement pour des valeurs de r très-voisines de OC. Faisons $OC = r_0$. Nous savons que pour $r = r_0$ on a $P = o$; donc il n'y a plus qu'un coefficient à déterminer dans l'équation approximative. Nous lui donnerons la forme suivante :

$$P = \frac{K}{r_0}(r - r_0).$$

La différence $r - r_0$ est la variation de la distance absolue des deux points M et M′ à partir de leur position d'équilibre, et $\frac{r - r_0}{r_0}$ la variation de la distance rapportée à la distance elle-même, ou la mesure de la *déformation relative*. La quantité K peut être définie le *coefficient d'élasticité* du système pour des positions voisines de l'équilibre naturel. Remarquons que si l'on fait $r = 2r_0$, l'équation donne $P = K$; donc K est la force qui serait capable de doubler la distance des deux molécules dans l'état d'équilibre naturel, si

l'équation linéaire $P = \frac{K}{r_0}(r - r_0)$ était vraie pour toutes les valeurs de la distance r (1).

Le rapport $\frac{K}{r_0}$ est la raideur du système aux environs de la position d'équilibre naturel.

Pour ce système de deux molécules, nous n'avons trouvé aucune limite d'élasticité. Il devait en être ainsi, puisque les variations de position relative de deux molécules formant un système isolé se réduisent nécessairement à de simples altérations de leur distance, sans qu'il puisse y avoir d'interversion dans leur mode de groupement. Quand au lieu de deux molécules on en considére un plus grand nombre, le problème de l'équilibre élastique devient extrêmement compliqué, et nous n'aurons pas à nous en occuper ici.

---

(1) La proportionnalité de la force élastique mutuelle développée entre deux molécules, à la variation de distance de ces molécules, est la seule hypothèse admise aujourd'hui dans la théorie mathématique de l'élasticité.

LIVRE PREMIER.

ÉTUDE DES DÉFORMATIONS DES PIÈCES PRISMATIQUES, SOUS L'ACTION DE FORCES PARALLÈLES A LEUR LONGUEUR.

CHAPITRE PREMIER.

ALLONGEMENT ET RACCOURCISSEMENT SIMPLE.

DÉFINITION DES PIÈCES PRISMATIQUES.

11. Les diverses pièces qui entrent dans la composition d'un ouvrage métallique ou d'un ouvrage en charpente sont la plupart du temps assimilables aux prismes droits que l'on considère dans les éléments de géométrie; on peut ajouter qu'elles ont en général un plan de symétrie, et que c'est dans ce plan que sont appliquées les forces que la construction doit supporter. Mais pour donner à toutes les parties d'une même pièce une résistance plus égale, on fait souvent varier d'un point à l'autre la forme et les dimensions de la section. Le solide ainsi obtenu n'est plus un prisme géométrique. On continue néanmoins à employer le nom de prisme pour désigner un solide de cette forme, et dans tout ce qui suivra, le nom de *pièce prismatique* signifiera simplement une pièce droite, ou même légèrement courbée, dont les dimensions transversales sont petites par

rapport à la longueur, et dont la section peut d'ailleurs être constante ou variable d'une extrémité de la pièce à l'autre extrémité.

LOIS DE L'EXTENSION ET DE LA COMPRESSION SIMPLE DES PIÈCES DROITES.

12. Supposons qu'une pièce droite soit tirée dans le sens de sa longueur par une force P, également répartie sur toute la section transversale. L'allongement pris par cette pièce dépendra de la grandeur de la force P, de la longueur de la pièce dans son état naturel, de la section droite de la pièce supposée la même partout, enfin de la matière dont elle est composée.

L'expérience a conduit à admettre que l'allongement total, l, pris par la pièce, est proportionnel à la force P qui y est appliquée, proportionnel à la longueur L qu'elle a dans son état naturel, inversement proportionnel à la section droite Ω, et qu'enfin entre ces quatre quantités on a la relation

$$P = \frac{E\Omega l}{L},$$

dans laquelle le coefficient E est une constante qui dépend de la nature de la pièce, et qu'on nomme le *coefficient d'élasticité*. La quantité l, ou plutôt le rapport $\frac{l}{L}$ doit rester très-petit pour que cette formule soit exacte. Les quantités E, Ω, L, sont constantes; P et l sont variables ensemble (1).

(1) La théorie mécanique de l'élasticité conduit à admetttre deux coefficients distincts d'élasticité, λ et μ, qui ne peuvent être égaux que dans le cas où l'on suppose la continuité de la matière; le coefficient E de la théorie élémentaire s'exprime au moyen des deux coefficients λ et μ par l'équation

$$\frac{1}{E} = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu}.$$

Les expériences de M. Wertheim l'ont conduit à faire $\lambda = 2\mu$ (V. Lamé, *Leçons sur l'élasticité*, §§ 19, 20 et 29).

La même formule exprime la relation qui lie une force de compression P au raccourcissement l qui résulte de l'action de cette force, quand la pièce comprimée ne fléchit pas latéralement. On attribuera donc à P et à l les signes + et —, + pour les forces de traction et les allongements, — pour les forces de compression et les raccourcissements, et la formule deviendra générale.

On remarquera l'analogie de cette formule avec l'équation approximative que nous avons posée pour le cas théorique de deux molécules isolées. L'équation $P = \frac{E\Omega l}{L}$ définit, comme l'équation $P = \frac{K}{r_0}(r - r_0)$, une tangente à la courbe dont les coordonnées représenteraient les valeurs conjuguées de P et de l.

On conserve la même constante E pour les raccourcissements et pour les allongements, parce que les deux branches de cette courbe qui se réunissent au point $l = o$, ont en ce point la même tangente; si, au contraire, l'expérience montrait que la courbe a un point anguleux pour $l = o$, il faudrait distinguer deux valeurs du coefficient d'élasticité, l'une pour la compression, l'autre pour l'extension.

Le rapport $\frac{P}{\Omega}$ est la tension de la matière par unité de surface dans une section quelconque du prisme.

Le rapport $\frac{l}{L}$ est l'allongement relatif du prisme; c'est un nombre.

La constante spécifique E, égale à $\frac{P}{\Omega} \times \frac{L}{l}$ est donc une force rapportée à l'unité de surface; le rapport $\frac{l}{L}$ étant toujours très-petit, E sera généralement représentée par un nombre très-grand.

Si on fait $\Omega = 1$, et $\frac{l}{L} = 1$, on a $E = P$; donc E est la force fictive d'extension qui doublerait la longueur d'une pièce droite ayant pour section l'unité de surface, ou la force fictive de compression qui réduirait à zéro la longueur de la même pièce; ces forces son

fictives, parce qu'on les déduit de la formule en supposant qu'elle se vérifie pour tous les allongements et tous les raccourcissements, ce qui n'est pas exact.

La détermination numérique du coefficient d'élasticité pour chaque matière suppose que l'on ait fait choix de l'unité de section et de l'unité de force. Ainsi, pour le fer, le coefficient d'élasticité est en moyenne égal à 20,000,000,000, ou à 2×10^{10}, lorsqu'on prend pour unité de force le kilogramme, et pour unité de section le mètre carré. Si l'on prenait pour unité de force la tonne, et pour unité de section le décimètre carré, il faudrait diviser ce nombre par 1000×100, ou supprimer cinq zéros, ce qui donnerait 200,000 pour la nouvelle valeur du coefficient d'élasticité. En effet, 200,000 tonnes par décimètre carré équivalent à 20,000,000,000 de kilogrammes par mètre carré.

Quelques auteurs définissent la loi de l'allongement par l'équation différentielle

$$dP = \frac{E\Omega dx}{x},$$

où x est la longueur de la tige déjà allongée par la force P, et dx l'allongement produit par l'action d'une nouvelle force dP. L'allongement total l correspond alors à une force

$$P = E\Omega \int_L^{L+l} \frac{dx}{x} = E\Omega \log\left(1 + \frac{l}{L}\right),$$

les logarithmes étant pris dans le système népérien. Comme $\frac{l}{L}$ est un nombre très-petit, le logarithme est sensiblement égal au premier terme de son développement en série, et l'on retrouve la formule usuelle

$$P = \frac{E\Omega l}{L}.$$

RAIDEUR DU RESSORT LONGITUDINAL.

13. De l'équation $P = \frac{E\Omega}{L} l$, où P et l sont les seules variables, on déduit

$$\frac{dP}{dl} = \frac{E\Omega}{L}.$$

Nous avons déjà remarqué dans un cas tout à fait analogue que la dérivée $\frac{dP}{dl}$ est la mesure de la raideur du système. On voit qu'au point de vue des déformations longitudinales, une tige a une raideur d'autant plus grande qu'elle a une plus grande section, une moindre longueur et que son coefficient d'élasticité est plus grand.

TRAVAIL DE L'ALLONGEMENT D'UNE TIGE.

14. Supposons que l'on cherche le travail T nécessaire pour accroître la longueur L de la tige d'une quantité λ, très-petite par rapport à L. Soit, à un moment quelconque, x l'allongement de la tige; la tension P correspondante sera donnée par la formule

$$P = \frac{E\omega x}{L},$$

et le travail élémentaire dT correspondant à l'accroissement de longueur dx sera Pdx, ou bien

$$dT = \frac{E\omega}{L} x dx.$$

Pour avoir le travail total, il n'y a qu'à faire l'intégrale de cette expression entre les limites o et λ, ce qui donnera

$$T = \frac{1}{2} \frac{E\omega}{L} \lambda^2.$$

Ce résultat peut se mettre sous la forme :

$$T = \left(\frac{E\omega \times \frac{1}{2} \lambda}{L} \right) \times \lambda.$$

Le travail consommé par la déformation de la tige est donc équivalent au travail d'une force $\frac{E\omega \times \frac{1}{2} \lambda}{L}$, dont le point d'application parcourrait un chemin égal à λ dans sa propre direction. On peut remarquer que cette force est la moyenne des valeurs de la tension P pendant l'allongement.

La formule $T = \frac{1}{2}\frac{E\omega}{L}\lambda^2$ n'est vraie que pour les petites valeurs du rapport $\frac{\lambda}{L}$; si l'on attribuait à λ la valeur qui correspond à la rupture de la tige par extension, la formule ne donnerait plus qu'une approximation grossière.

La même formule représente le travail nécessaire pour produire par compression un raccourcissement λ sur une tige qui ne subit pas de flexion latérale (1).

Poncelet a donné le nom de *résistance vive* d'un prisme élastique « à la somme des quantités de travail que la résistance élastique « de ce prisme oppose à l'action d'un choc, ou d'un effort variable « ou brusque dirigé dans le sens de son axe. » Nous examinerons tout à l'heure un cas simple dans lequel cette résistance se manifeste.

PHÉNOMÈNES ACCESSOIRES.

15. Lorsqu'on soumet une tige à un effort de traction, la tige s'allonge, et c'est là le phénomène principal; mais en même temps la tige se contracte latéralement : cet effet, peu sensible sur les tiges douées d'une grande raideur et subissant une faible déformation, devient au contraire très-apparent pour les matières très-déformables, par exemple, pour le caoutchouc.

Le phénomène, soumis d'abord au calcul par Poisson, est maintenant regardé comme un résultat nécessaire de la théorie mathématique de l'élasticité. Il a été étudié expérimentalement par M. Cagniard de La Tour, puis par M. Wertheim, enfin en dernier lieu par M. Cornu, à l'aide d'une méthode fondée sur l'emploi des anneaux colorés. On peut admettre aujourd'hui comme démontré que le coefficient de contraction latérale est proportionnel au coefficient d'extension longitudinale, et que le premier coefficient est environ le quart du second.

(1) Il existe un théorème plus général, dû à Clapeyron, qui permet d'exprimer la somme des travaux de toutes les forces élastiques développées par la déformation d'un solide homogène et d'élasticité constante. (Lamé, *Leçon* VII.)

La contraction latérale des prismes est d'ailleurs généralement très-petite, et il est rare que les ingénieurs aient l'occasion de s'en préoccuper. Nous verrons cependant qu'il est nécessaire d'y avoir recours pour expliquer certains phénomènes.

A la compression, on observe un renflement latéral au lieu d'une contraction. Mais un effet d'un autre genre peut aussi se produire; c'est la flexion latérale de la pièce prismatique. Une pièce symétrique par rapport à sa ligne moyenne, et soumise à une force qui la comprime par ses extrémités, se trouve, lorsque la force a une valeur suffisamment grande, dans un état d'équilibre instable; la moindre inégalité de répartition de la force sur la section de la pièce, le moindre effort transversal, suffisent pour la faire fléchir d'un côté particulier. Nous étudierons plus tard les conditions de résistance à ce point de vue. En attendant, il ne faut pas oublier que les pièces droites chargées par leurs abouts sont quelquefois exposées à prendre latéralement une certaine flexion, et qu'alors, si la charge qu'elles ont à supporter ne diminue pas, il y a danger de rupture.

MOUVEMENT OSCILLATOIRE D'UN POIDS SUSPENDU A L'EXTRÉMITÉ D'UNE TIGE ÉLASTIQUE.

16. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des actions statiques, ou ce que quelques auteurs appellent improprement des forces mortes. Les solides sont souvent appelés à développer une résistance à des chocs produits par des corps en mouvement; la résistance qu'ils opposent à ces actions dynamiques comprend deux parties principales : l'une est due simplement à l'élasticité du solide, comme s'il s'agissait d'une action statique; c'est celle qui contribue à produire ce que Poncelet appelle la résistance vive; l'autre est due à la masse du solide choqué, qui emprunte au corps choquant une certaine portion de sa quantité de mouvement. Dans certains cas, cette seconde partie peut être négligée par rapport à la première, et alors les problèmes ne présentent pas plus de difficulté que les questions d'équilibre statique. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, les pro-

blèmes deviennent beaucoup plus compliqués, et rentrent dans le domaine de la mécanique vibratoire.

Nous ne nous occuperons ici que d'un exemple simple proposé par Poncelet (1).

Soit AB une tige donnée, attachée par son extrémité A à un point fixe. L'extrémité B est libre, et la tige prend la direction de la verticale. On donne la section Ω, la longueur $L = AB$, et le coefficient d'élasticité E de la tige.

Fig. 5.

D'un point C, situé à une hauteur h au-dessus du point B, on laisse tomber un poids P, qui glisse d'abord sans frottement le long de la tige CB, mais qui, en arrivant au point B, est arrêté par un obstacle attaché à la tige, de manière à ne pouvoir continuer son chemin sans l'entraîner dans son mouvement. On suppose que la masse de la tige est négligeable par rapport au poids P, et l'on demande la loi du mouvement de ce poids au bout de la tige.

Les forces qui agissent sur le poids P seront la pesanteur, c'est-à-dire le poids P lui-même, et la tension variable F de la tige; le poids P tend vers le bas, et la tension F agit en sens contraire, sauf les réserves qui seront faites plus loin.

Prenons le point B pour origine des abscisses x, comptées dans le sens BX; lorsque le poids P est arrivé en M, à une distance $BM = x$ de l'extrémité de la tige dans son état naturel, la tension F est donnée par l'équation

$$F = \frac{E\Omega x}{L};$$

$\frac{P}{g}$ étant la masse du poids mobile, l'équation du mouvement suivant la droite BX sera donc

$$\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = P - \frac{E\Omega}{L}x.$$

Pour simplifier cette équation, appelons l l'allongement *statique*

(1) *Introduction à la mécanique industrielle*, p. 385 et suiv.

qui correspond à une traction égale à P ; nous aurons $P = \frac{E\Omega l}{L}$; donc $\frac{E\Omega}{L} = \frac{P}{l}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{P}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = P - \frac{P}{l}x,$$

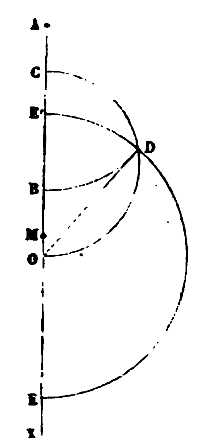


Fig. 6.

ou bien, en supprimant le facteur P,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Soit BO $= l$; nous pouvons transporter l'origine des x au point O, ce qui revient à changer x en $x + l$. Opérant cette transformation, il vient l'équation plus simple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x,$$

où x est compté, non plus à partir du point B, mais à partir du point O défini par sa distance BO. Voici comment on peut intégrer cette équation. Posons

$$\frac{dx}{dt} = v ;$$

v sera la vitesse du point mobile à un instant quelconque. Il en résulte

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{vdv}{dx}.$$

Donc

$$vdv = -\frac{g}{l}\,xdx,$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -\frac{1}{2}\frac{g}{l}x^2.$$

Cette équation n'est autre chose que l'application pure et simple du théorème des forces vives. La constante v_0 est la vitesse du mobile à son passage au point O. Pour déterminer, ou plutôt pour éli-

miner cette constante, faisons $x = -l$, ce qui place le mobile au point B. En ce point il a la vitesse due à la hauteur $CB = h$, c'est-à-dire $\sqrt{2gh}$; nous aurons donc à la fois, en supprimant le facteur $\frac{1}{2}$,

$$v^2 - v_0^2 = -\frac{g}{l}x^2,$$

et

$$2gh - v_0^2 = -gl.$$

Retranchant, il vient

$$v^2 - 2gh = gl - \frac{g}{l}x^2 = \frac{g}{l}(l^2 - x^2).$$

Cette équation, qui ne renferme plus rien d'arbitraire, nous permet de déterminer la limite de l'excursion du point mobile; il suffit d'y faire $v = o$, d'où résulte pour x les deux valeurs suivantes :

$$x = \pm\sqrt{l^2 + 2lh} = \pm\sqrt{(l+h)^2 - h^2}.$$

La somme $l + h$ est la distance CO. Sur CO comme diamètre, décrivons une demi-circonférence, puis du point C comme centre avec $CB = h$ pour rayon, décrivons un arc de cercle qui coupera la demi-circonférence au point D. La corde OD sera égale à $\sqrt{(l+h)^2 - h^2}$, et par suite, si l'on décrit une circonférence du point O comme centre avec OD pour rayon, elle coupera la droite AX en deux points E et E', qui correspondront aux valeurs-limites de x données par l'équation précédente.

L'un de ces points, le point E, qui correspond à l'abscisse positive, donne à la tige un allongement total égal à $l + \sqrt{(l+h)^2 - h^2}$; la tension correspondante est égale à

$$\frac{E\Omega\left[l + \sqrt{(l+h)^2 - h^2}\right]}{L},$$

de sorte qu'elle surpasse de toute la quantité $\frac{E\Omega\sqrt{(l+h)^2 - h^2}}{L}$ la tension statique que produirait le poids P, suspendu sans vitesse à la tige.

L'autre point E', qui correspond à l'abscisse négative, peut être inadmissible; en effet, si le poids P est seulement posé sur l'obstacle fixé à l'extrémité inférieure de la tige, il est impossible qu'il exerce jamais sur cette tige la compression nécessaire pour y produire un raccourcissement égal à BE', et comme on ne suppose pas que la tige ait une masse appréciable, la vitesse acquise par ses molécules ne peut contribuer à faire dépasser le point B à son extrémité libre, quand elle y revient dans le sens ascendant. Dans ce cas, le poids mobile, arrivé au point B, s'y trouvant animé de bas en haut d'une vitesse v égale à $\sqrt{2gh}$, abandonnera l'extrémité de la tige pour remonter jusqu'au point C comme un corps libre; puis il retombera sur l'obstacle B, pour faire faire à la tige une seconde excursion jusqu'au point E, avec retour au point B, et ainsi de suite.

Si le corps P est saisi par l'obstacle B de manière à ne pouvoir s'en séparer, son mouvement rétrograde pourra développer une compression dans la tige, et lé travail résultant empêchera le poids de remonter jusqu'au point C; dans ce second cas, il s'arrêtera en E'.

Entre les points B et E', l'action élastique de la tige sera alors dirigée de haut en bas et s'ajoutera à l'action de la pesanteur.

L'équation posée plus haut sera donc vraie dans ce second cas pour toutes les valeurs de x, tandis que dans le premier elle ne convient qu'aux valeurs de x comprises entre $-l$ et $l+\sqrt{(l+h)^2-h^2}$.

17. Nous supposerons le second cas, celui où l'équation est vraie d'une manière absolue, et nous allons achever la solution.

L'équation

$$v^2-2gh=\frac{g}{l}(l^2-x^2)$$

donne

$$v=\pm\sqrt{2gh+\frac{g}{l}(l^2-x^2)}.$$

Le signe + correspond au mouvement descendant, le signe — au mouvement ascendant du poids P. Pour déduire de là l'équation définitive du mouvement, posons $v=\frac{dx}{dt}$; il deviendra, en résolvant par rapport à dt,

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2gh + \frac{g}{l}(l^2 - x^2)}}.$$

Prenons le signe supérieur pour étudier ce qui se passe quand le mobile va du point E′ au point E. On intégrera cette équation en posant

$$x = -\sqrt{(l+h)^2 - h^2}\cos\varphi,$$

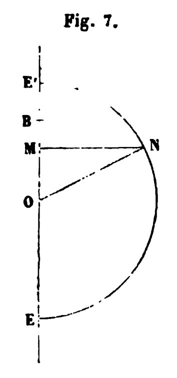


Fig. 7.

φ étant un angle auxiliaire. Cet angle φ est donné sur la figure par l'angle E′ON, N étant sur la circonférence E′NE le point qui se projette en M sur le diamètre EE′, et qui a pour abscisse $x = -$OM. On déduit de cette relation

$$dx = \sqrt{(l+h)^2 - h^2}\sin\varphi d\varphi$$

et

$$dt = \frac{\sqrt{(l+h)^2 - h^2}\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{g\left\{2h + l - \left[\frac{(l+h)^2 - h^2}{l}\right]\cos^2\varphi\right\}}} = \frac{\sqrt{l+h)^2 - h^2}\sin\varphi d\varphi}{\sqrt{g(2h + l - l\cos^2\varphi - 2h\cos^2\varphi)}}$$

$$= \sqrt{\frac{l^2 + 2lh}{g(l+2h)}}d\varphi = \sqrt{\frac{l}{g}}d\varphi.$$

Donc $t = \sqrt{\frac{l}{g}}\varphi$, sans constante, si l'on compte le temps à partir du moment où le mobile quitte le point E′ pour s'avancer vers le point E.

L'équation du mouvement est en définitive

$$x = -\sqrt{(l+h)^2 - h^2}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

C'est l'équation du mouvement de la projection d'un point N qui parcourrait d'un mouvement uniforme la circonférence E′NE.

Pour avoir la durée d'une excursion complète de E' en E, il faut faire d'abord $\varphi = 0$, puis $\varphi = \pi$, ce qui correspond aux deux points extrêmes; la différence des deux valeurs correspondantes de t donne la valeur

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

de la durée d'une oscillation.

18. On retrouve ainsi la formule de la durée des petites oscillations du pendule simple de longueur l. Il est facile de se rendre compte de cette coïncidence. L'équation du mouvement oscillatoire du poids P est, comme nous l'avons vu,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x,$$

c'est-à-dire que la résultante des forces qui agissent sur ce poids mobile est une attraction proportionnelle à la distance au point fixe O. Le pendule simple S est sollicité, lorsque l'angle d'écart est α, par une force tangentielle égale par unité de masse à $g \sin\alpha$, et cette force tend à rapprocher le mobile du point R. L'équation du mouvement est donc dans ce cas

Fig. 8.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\alpha,$$

s étant l'arc compté à partir du point R dans le sens RS. Mais $s = l\alpha$, en appelant l la longueur PR. L'équation prend la forme

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\alpha,$$

et si les limites de l'angle α sont très-petites, on peut confondre $\sin\alpha$ avec α, et poser

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha,$$

équation de forme identique à celle que nous venons de traiter.

19. Remarquons encore que si l'on fait $h = 0$, ou si l'on place sans vitesse le poids P à l'extrémité B de la tige, le cercle EE′ ne se réduit pas à un point ; le rayon de ce cercle devient égal à l, et l'allongement total que prend la tige, par l'effet de la vitesse acquise du poids P, s'élève à $2l$, c'est-à-dire au double de l'allongement statique.

On voit par là l'effet des oscillations. Cet effet peut être très-nuisible, car une barre peut être capable de subir sans altération d'élasticité un allongement l, et n'être pas en état de supporter l'allongement total de $l + \sqrt{l^2 + 2lh}$.

Comme nous avons négligé la masse de la tige, on ne peut pas dire qu'il y ait choc du poids P contre la tige ; car un choc suppose une rencontre de deux masses, ce que nous n'avons pas admis ici.

La formule $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ donne un moyen théorique de déterminer approximativement la valeur du coefficient d'élasticité d'une tige. Si la tige, sous l'influence de ses vibrations longitudinales, rendait un son musical et qu'on pût apprécier le nombre n des vibrations par seconde, on aurait $t = \frac{1''}{2n}$ pour la durée d'une excursion simple, et

$$l = g \times \frac{1}{4\pi^2 n^2},$$

ce qui donnerait l'allongement statique, et par suite le coefficient d'élasticité, $E = \frac{P}{\Omega} \times \frac{L}{l}$. L'observation des flexions transversales conduit plus facilement au résultat cherché.

L'ALLONGEMENT D'UNE TIGE QUI RÉUNIT DEUX MASSES ANIMÉES D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE COMMUN.

20. Nous supposerons deux corps M, M′ de masses données, et réunis par une tige homogène MM′, de longueur L, et de masse μ par unité de longueur, en mouvement le long de la droite indéfinie OX, et sollicités, le corps M par une force F, mouvante, et le corps M′ par une autre force F′, résistante.

Fig. 9.

On demande l'allongement total pris par la barre MM′, en supposant les vibrations éteintes et l'équilibre intérieur établi.

Il faut d'abord déterminer la tension de la tige MM′ en ses divers points.

Appelons x l'abscisse du centre de gravité du système, variable avec le temps et comptée à partir d'une origine fixe O. Nous aurons pour définir le mouvement du système l'équation.

$$(M + M' + \mu L)\frac{d^2x}{dt^2} = F - F'.$$

Appelons s la distance d'un point quelconque A de la tige à l'extrémité M′, cette distance étant comptée dans l'état naturel de la tige, c'est-à-dire avant qu'elle ait subi aucune extension. La variable s sera indépendante du temps.

Pour trouver la tension T de la tige au point A, considérons l'un des tronçons, le tronçon AM′ par exemple, et écrivons l'équation du mouvement de son centre de gravité; il vient

$$(M' + \mu s)\frac{d^2x}{dt^2} = T - F'.$$

Entre ces deux équations nous pouvons éliminer $\frac{d^2x}{dt^2}$, et nous aurons une équation qui nous donnera T :

$$T = \frac{FM' + F'M + F'\mu L + (F - F')\mu s}{M + M' + \mu L},$$

équation du premier degré en s.

Telle est la tension au point A; l'élément ds de la tige, étant soumis à cette tension T, prend un accroissement égal à $\frac{T}{\Omega} \times \frac{ds}{E}$, c'est-à-dire devient égal à $ds\left(1 + \frac{T}{E\Omega}\right)$; si donc on veut avoir la longueur totale de la tige étendue (abstraction faite de tout mouvement vibratoire), il faudra intégrer $ds\left(1 + \frac{T}{E\Omega}\right)$ entre les limites 0 et L, ce qui donne

$$L + \int_0^L \frac{T}{E\Omega}\, ds.$$

Cette dernière intégrale représente l'allongement total. T étant une fonction linéaire de s, de la forme $a + bs$, on voit que l'intégrale sera $\frac{1}{E\Omega}\left(aL + \frac{1}{2}\, bL^2\right)$, ou, en remplaçant a et b par leurs valeurs,

$$\left(\frac{1}{E\Omega}\,\frac{FM' + F'M + F'\mu L}{M + M' + \mu L}\right) L + \frac{1}{2}\,\frac{(F - F')\mu}{E\Omega(M + M' + \mu L)}\, L^2.$$

On pourrait calculer de même les petites variations de la masse par unité de longueur; la nouvelle masse par unité de longueur, au point défini par une valeur particulière de s, est égale à

$$\frac{\mu}{1 + \frac{T}{E\Omega}},$$

quantité variable, puisque T est variable avec s.

Si les masses M et M' sont très-grandes par rapport au produit μL, la tension T varie très-peu d'un point à l'autre de la tige.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DES CONSTANTES SPÉCIFIQUES.

---

21. Les calculs de résistance exigent la connaissance d'un certain nombre de constantes spécifiques, qui dépendent de la nature des corps soumis à ces calculs. Il y en a quatre principales.

La première est le poids de l'unité de volume du corps, ou le *poids spécifique;* dans presque toutes les constructions, le poids de l'ouvrage est une des principales forces qu'il soit appelé à soutenir. Il arrive même quelquefois, pour les maçonneries par exemple, que le poids des surcharges accidentelles soit tout à fait négligeable par rapport au poids propre de l'ouvrage.

La seconde constante spécifique est le *coefficient d'élasticité;* c'est, comme nous l'avons vu, la valeur de la force fictive d'extension capable de doubler la longueur d'une tige qui aurait partout une même section droite, égale à l'unité de surface.

La troisième constante spécifique est la *limite d'élasticité;* elle est donnée par la plus grande valeur de la tension ou de la pression ne produisant encore qu'une déformation passagère. Nous avons vu sous quelles réserves cette définition pouvait être admise.

La quatrième constante spécifique est la *charge de rupture;* c'est la plus petite tension ou la plus petite pression qui rompe le corps ou qui l'écrase.

Ces constantes se détermineront pour chaque corps par une série d'expériences.

22. *Poids spécifique.* — La détermination du poids spécifique d'un corps est une des questions que l'on traite dans les cours de physique. Les expériences des ingénieurs ont un caractère moins rigoureux que celles des physiciens; ils ont plutôt à chercher une limite supérieure que la valeur exacte du poids spécifique. On trouve dans les recueils de tables les poids spécifiques des principaux matériaux : fer, bois, fonte, pierres... Lorsque ces renseignements font défaut, par exemple lorsqu'on doit employer une pierre nouvelle et non encore soumise à l'expérience, l'ingénieur aura à déterminer lui-même le poids spécifique de cette matière ; pour cela il fera tailler une vingtaine de blocs parallélépipédiques de mêmes dimensions, et les fera peser tous ensemble, en les empilant en tas sur le plateau de la balance de Quintenz. Le volume occupé par ces vingt morceaux pouvant être mesuré avec exactitude, et le poids étant connu par la pesée, une division donnera le poids de l'unité de volume.

Pour le fer et la fonte, il est d'usage de fixer dans les cahiers des charges la valeur du poids spécifique qui sera adopté pour les calculs des poids ; c'est au poids qu'on règle les comptes d'une entreprise d'ouvrage métallique ; or le métré se fait en mesurant les dimensions linéaires des différentes pièces qui figurent dans un tel ouvrage ; il est donc nécessaire, au point de vue du règlement des comptes, de connaître le poids spécifique, et on le fixe d'avance pour éviter les discussions. On adopte ordinairement 7800 kilogrammes pour le poids du mètre cube de fer, et 7200 pour le poids du mètre cube de fonte.

Pour les bois, les pierres et les briques, qui se payent au volume et non au poids, le poids spécifique est seulement un élément des calculs de résistance, qu'on n'a pas à faire entrer dans les conditions des marchés.

23. *Coefficient d'élasticité.* — Il y a un grand nombre de problèmes de résistance où la connaissance du coefficient d'élasticité n'est pas nécessaire. Considérons, par exemple, l'allongement d'une tige pris-

matique. Nous avons trouvé la formule $P = \frac{E\Omega l}{L}$, qui lie ensemble la *déformation relative* $\frac{l}{L}$ et la *charge par unité de surface* $\frac{P}{\Omega}$, au moyen du coefficient d'élasticité E. Si l'on se propose de déterminer seulement la charge par unité de surface, il suffira de diviser la force P par la section connue Ω, et la connaissance du coefficient d'élasticité sera inutile, tandis qu'elle serait indispensable s'il s'agissait de déduire de la tension développée dans le prisme l'allongement produit par cette tension.

Plus généralement, dans toute construction, la répartition des efforts entre les divers points résulte de la connaissance des forces, et le coefficient d'élasticité n'intervient que quand on a à évaluer les déformations correspondantes à ces efforts.

La répartition intérieure des efforts est l'objet capital de la théorie de la résistance; car c'est en l'étudiant qu'on peut reconnaître si la limite d'élasticité n'est pas dépassée, et si l'ouvrage est dans de bonnes conditions de durée. Mais elle suppose donnée la vraie distribution des forces, de sorte que si certaines forces sont inconnues, et si elles dépendent des déformations subies par les diverses parties de l'ouvrage, le coefficient d'élasticité peut paraître dans la solution; c'est ce qui arrive par exemple quand on cherche la poussée d'un arc métallique due à la dilatation causée par un accroissement de température. Mais en général le coefficient d'élasticité se trouve finalement éliminé des équations qui résolvent ce premier problème.

Comme les pierres ont une grande raideur, les déformations des ouvrages en maçonnerie échappent au calcul par leur extrême petitesse; aussi la connaissance du coefficient d'élasticité des maçonneries est à peu près inutile en pratique. On peut dire en effet que le tassement d'un ouvrage de maçonnerie doit être, en général, attribué à un vice de l'ouvrage, bien plutôt qu'au jeu naturel des forces élastiques. Les réactions inconnues se déterminent alors à l'aide d'une hypothèse, en appliquant les règles de la statique.

Il n'en est pas de même pour les charpentes en bois ou en fer: les dé-

formations de ces systèmes peuvent être déterminées avec exactitude, et pour cela la connaissance du coefficient d'élasticité est nécessaire. Nous donnerons tout à l'heure un résumé des diverses expériences qui ont conduit à en fixer la valeur.

24. *Limite d'élasticité.* — Certains matériaux ne sont propres à résister qu'à des efforts de compression : telles sont, sauf des exceptions très-rares, les maçonneries de pierres ou de briques. D'autres peuvent être soumis aux deux genres d'efforts, d'extension et de compression, mais en résistant mieux à l'un qu'à l'autre. Ainsi certaines fontes présentent une élasticité différente suivant qu'on les comprime ou qu'on les étend. Le fer et le bois ont au contraire dans les deux sens une élasticité égale.

La limite d'élasticité est une limite extrême, à laquelle il faut que les efforts développés dans les constructions soient notablement inférieurs. L'expérience a conduit à fixer pour chaque matière la limite pratique d'efforts qu'on doit admettre dans la rédaction des projets. En réalité, cette limite pratique pourra être accidentellement dépassée si, par exemple, l'ouvrage est soumis à une surcharge imprévue; mais ce sera sans inconvénient, pourvu que la limite extrême d'élasticité ne soit jamais atteinte. L'intervalle compris entre la limite usuelle et la limite extrême est, pour ainsi dire, la mesure de la sécurité de la construction.

Pour le fer, par exemple, la limite usuelle de résistance est fixée en moyenne à 6 kilogrammes par millimètre carré, tandis que la limite d'élasticité s'élève jusqu'à 15.

25. *Charge de rupture.* — La charge de rupture est plus facile à déterminer pour les pierres et les briques que la limite d'élasticité, à cause de leur grande raideur; les pierres s'écrasent en effet sous une forte pression, sans qu'aucune déformation bien sensible se soit manifestée sous des pressions moindres. On possède les résultats de nombreuses expériences sur la rupture de petits blocs en pierre ou en brique, et l'habitude des constructeurs est de prendre pour *limite usuelle* de résistance le dixième de la charge d'écrasement (1).

(1) L'emploi des mortiers de ciment permet de dépasser cette proportion, et d'aller jusqu'au cinquième.

Ainsi, au lieu de rapporter la limite usuelle à la limite d'élasticité, comme pour les bois et les métaux, on la rapporte à la charge de rupture. Pour exprimer cette charge, on peut se servir du poids spécifique de la matière dont il s'agit, et évaluer la charge de rupture d'une pierre par la hauteur d'une colonne cylindrique dont le poids suffirait pour écraser sa base. Ainsi le grès le plus dur, qui pèse 2520 kilogrammes par mètre cube, s'écraserait sous le poids d'une colonne cylindrique de 3226 mètres de sa propre matière, représentant à la base une pression de 813 kilogrammes par centimètre carré; le travertin des environs de Rome, qui pèse 2360 kilog., s'écraserait sous une hauteur de 1262 mètres, c'est-à-dire sous une pression de 298 kilog. par centimètre carré.

Cette évaluation d'une pression par une hauteur, analogue aux mesures des pressions dans l'hydrostatique, donne une idée de la limite de hauteur admissible pour un édifice ; si une pierre s'écrase sous une pression de 1000 mètres, il sera impossible, pratiquement, de donner plus de 100 mètres de hauteur à une colonne cylindrique construite en cette pierre. Les formes pyramidales permettraient d'atteindre des hauteurs plus grandes ; mais en réalité, les monuments les plus élevés ne dépassent pas 150 mètres (1).

TABLES DES CONSTANTES SPÉCIFIQUES ET RELEVÉ DES PRINCIPALES EXPÉRIENCES.

26. Les premières expériences sur la résistance des bois de charpente sont dues à Parent, à Buffon, à Duhamel, à Bélidor et à plusieurs autres observateurs. Les résultats publiés dans leurs mémoires ont été résumés en 1782 dans un petit *Traité sur la force des bois* par le Camus de Mézières, architecte. Dans notre siècle, on a répété ces expériences en s'aidant d'une théorie plus avancée, et

(1) Hauteur de la plus grande des pyramides d'Égypte, 146 mètres; de la flèche de la cathédrale de Strasbourg, 142 mètres.

dans les pays où le bois est abondant et très-fréquemment employé, les ingénieurs reprennent presque toujours quelques-unes de ces expériences pour vérifier les valeurs des constantes qu'ils auront à employer dans leurs projets de charpente. En France, les principales expériences faites sur les bois sont celles de Rondelet, de Navier, de M. Charles Dupin, et, plus récemment, de MM. Chevandier et Wertheim (1). En Angleterre, ce sont celles de Tredgold, de Barlow, de Rennie, et enfin de Hodgkinson.

Ces expériences ont conduit à fixer le coefficient d'élasticité, la limite d'élasticité et la charge de rupture, soit par écrasement, soit par extension. Le coefficient d'élasticité a été le plus souvent déterminé en observant les flèches prises par une poutre chargée transversalement.

Les expériences sur la résistance des pierres ont eu pour objet principal de déterminer la charge d'écrasement. Les principales sont celles de Gauthey, de Rondelet, de Soufflot, de Perronet, de Vicat, et en Angleterre, de Rennie et de Tredgold.

Vicat a étudié la résistance des briques et des mortiers.

Ces expériences se font ordinairement en écrasant de petits morceaux parallélipipédiques sous une charge que l'on doit mesurer. Quelquefois cependant, on a cherché à observer les flèches prises par un bloc de pierre sous l'action d'une charge transversale, ce qui conduit à déterminer le coefficient d'élasticité. Tredgold a opéré ainsi pour le marbre statuaire, qui possède un certain degré d'élasticité.

27. Le fer et la fonte, que l'on emploie aujourd'hui dans un grand nombre de constructions, n'étaient guère autrefois que des accessoires. On employait le fer pour fournir des liens aux pièces de charpente, et quelquefois aussi pour consolider les maçonneries (2). Ce

---

(1) *Mémoires sur les propriétés mécaniques des bois*, 1848.

(2) L'emploi du fer pour la consolidation des maçonneries a le double inconvénient d'établir entre les pierres des liaisons concentrées sur certains points, au lieu de les répartir sur toute l'étendue des surfaces des joints, et d'introduire dans le massif une matière susceptible de s'oxyder, au grand détriment des matières voisines. Quelques

n'est que plus récemment qu'on a songé à construire en fer des ouvrages entiers, des ponts, des fermes de toiture. On trouve quelques recherches sur la résistance du fer dans les ouvrages de Buffon, de plus nombreux documents dans les travaux de Rondelet, de Soufflot et de Perronet; mais c'est surtout l'Angleterre qui a poussé loin l'étude des propriétés du fer et de la fonte. Les anciens travaux sont ceux de Telford, de Barlow, de Tredgold. La construction des ponts suspendus a été plus tard l'occasion de nombreuses expériences, faites en France par Navier, par M. Séguin aîné, par Duleau, à Genève par le général Dufour. Une nouvelle série d'expériences sur la résistance de la fonte a été entreprise en Angleterre, de 1842 à 1846, par MM. Hodgkinson et Fairbairn; on en trouvera le compte rendu dans un article des *Annales des ponts et chaussées*, publié en 1855 par M. Ed. Pirel. L'emploi de la tôle pour la construction des ponts à grande portée a été depuis l'objet de recherches expérimentales faites à très-grande échelle par Stephenson et par Fairbairn, sur la résistance du fer laminé. Mais ces expériences avaient encore plutôt pour objet d'apprécier le mérite des nouveaux types imaginés par Stephenson que de déterminer le coefficient d'élasticité du fer. Les observations faites sur de grands ouvrages mettent en évidence une curieuse particularité : le coefficient d'élasticité de la matière employée est toujours moindre dans un grand ouvrage que dans un petit.

La fonte est peut-être de tous les matériaux celui qui se prête le moins bien aux calculs de résistance. Cela tient à sa nature cristalline. L'extension est en général plus capricieuse que la compression, et il semblerait qu'on doive, pour serrer de près les lois réelles de son élasticité, employer deux coefficients

---

ingénieurs invoquent, pour justifier cet emploi du fer, l'exemple de Perronet au Pont-Sainte-Maxence. Mais la liaison par des crampons en fer des cours de voussoirs de ce pont est l'œuvre, non de Perronet, mais de Demoustier, l'ingénieur qui acheva le pont sous sa direction. « Il faisait cette opération à l'insu de Perronet, qui assurément ne la lui aurait pas permise. » (De Prony, *Notice sur Perronet*, lue dans la séance publique des quatre Académies, le 24 avril 1829.)

différents, l'un pour les allongements, l'autre pour les raccourcissements. Ce serait introduire dans les calculs une complication bien gênante. De plus, la fonte a des propriétés toutes différentes suivant sa provenance et son mode de fabrication. Certaines fontes sont très-résistantes à la compression; d'autres, douées d'une grande raideur, se brisent sous l'action des chocs. La forme de la pièce fondue n'est pas sans influence sur sa solidité; pendant le refroidissement il peut se développer, par suite des formes données à la pièce, des tensions intérieures qui prédisposent à la rupture suivant certaines directions définies : un choc ou un changement de température suffit alors pour que la rupture ait lieu. Enfin, on a remarqué que l'élasticité de la fonte n'était pas égale en tous les points d'une même pièce, et les observations faites sur de grands ouvrages construits en cette matière ont montré qu'il serait nécessaire, pour rendre compte des déformations constatées, d'admettre deux coefficients différents, l'un applicable au pourtour de la pièce ou aux parties qui ont touché le moule, l'autre à l'intérieur, qui s'est plus lentement refroidi (1). Les expériences de Hodgkinson ont consisté dans la rupture d'un grand nombre de morceaux, et l'ont conduit à déterminer les meilleures formes à donner aux poutres ou aux colonnes. La théorie de ces résultats purement empiriques est encore à créer.

Pour le fer, au contraire, il obéit fort bien aux règles de la théorie, et il présente par conséquent beaucoup plus de sûreté que la fonte. Il a d'ailleurs, comme la fonte, mais à un moindre degré, des qualités variables avec sa provenance. Ainsi le fer de l'Oural, traité au bois, est un fer extrêmement élastique, et capable de résister sans altération à des charges beaucoup plus grandes que le fer anglais traité au charbon de terre. Le fer de l'Oural est un excellent fer pour la construction des ponts métalliques, pour la fabrication des harpons, etc., tandis que le fer anglais, qui est plus dur, convient mieux à la fabrication des rails. Autrefois on ne connaissait

(1) MM. Collet-Meygret et Desplaces, Mémoire sur le viaduc de Tarascon (*Annales des ponts et chaussées*).

qu'une manière de fabriquer le fer : on le traitait au bois et on le travaillait au marteau. Le traitement au charbon a permis d'accroître la production dans des proportions énormes, et en même temps le travail au laminoir a rendu admissibles une foule de formes qu'on n'aurait pas su donner économiquement au métal par les anciens procédés. Sans laminoir, par exemple, on n'aurait pu fabriquer de rails, et le développement des chemins de fer eût été impossible. Cette double révolution dans la métallurgie s'est faite en Angleterre vers l'année 1810. Depuis une vingtaine d'années, le fer laminé tend à se substituer à la fonte, surtout pour les grands ouvrages. Il est juste d'observer qu'en même temps les procédés de moulage ont fait de notables progrès.

On a tout récemment fait faire un nouveau pas à la construction métallique en se servant de l'acier fondu, qui possède une résistance beaucoup plus grande que le fer avec une homogénéité bien plus parfaite. Les rails d'acier sont préférés aujourd'hui aux rails de fer, et fournissent des voies d'une douceur et d'une stabilité remarquables. On a essayé aussi d'employer l'acier pour des chaudières de machines à vapeur, mais les essais ne paraissent pas avoir réussi (1).

28. Les anciennes expériences sur les bois, les pierres, les briques, les mortiers et les principaux métaux se trouvent résumées dans les *Tables de Géniéys*, publiées en 1835 par Cousinery. On y trouve, sous le titre de *Table de la résistance des corps*, quatre tableaux renfermant les données mêmes des expériences, avec les résultats calculés ou observés. Les deux premières ont pour objet la résistance à la compression et à l'extension; les deux dernières, la résistance à la flexion. Les leçons de Navier sur la résistance des matériaux, la mécanique industrielle de Poncelet, renferment un grand nombre de tableaux analogues.

L'*Aide-mémoire de M. Claudel* contient dans ses tableaux les résultats des expériences récentes, avec un résumé des formules les

(1) Voir sur cette question le rapport de MM. Combes, Lorieux et Ch. Couche (*Annales des ponts et chaussées*, 1861).

plus usuelles. On trouvera aussi des documents utiles dans l'*Architecture* de M. L. Reynaud, dans les ouvrages de M. le général Morin, etc.

Nous donnons ici deux petits tableaux qui contiennent sous une forme très-résumée les renseignements les plus nécessaires à l'étude d'un projet de charpente, d'ouvrage métallique ou de maçonnerie.

Tableau des constantes spécifiques relatives au fer, à la fonte et aux bois.

MATIÈRES	POIDS du mètre cube.	COEFFICIENT d'élasticité E	LIMITE d'élasticité		CHARGE de rupture		LIMITE PRATIQUE de résistance	
			à l'extension.	à la compression	à l'extension	à la compression	à l'extension.	à la compression.
	Kilogr.	Kilog. par mètre carré.	Kilogrammes par millimètre carré.					
Fer { fil de fer. forgé. . . tôle.. . .	7800	180×10^8 à 220×10^8 (160×10^8 pour les très-grands ouvrages.)	15	15	70 40 33	25	12 [1] 6.00 à 8.00 5 à 7.50	» 6.00 à 8.00 5 à 7.50
Acier fondu. .	7800	200×10^8	22	22	60	40	8	8
Fonte.	7200	à l'extension : 60 à 120 $\times 10^8$ à la compression : 80×10^8 En moyenne 80×10^8 dans les deux sens.	6	10	9 à 14	63	2 à 3	6.00 à 7.50
Bois { chêne sec. sapin sec.	800 530	9×10^8 à 12×10^8	2	2	6 à 9 4	4 à 4 ½	0.6 à 0.8	0.6 à 0.8

(1) Quelquefois poussée jusqu'à 18.

Poids du mètre cube de maçonnerie et limite usuelle de la charge.

	POIDS du mètre cube.	LIMITE de la charge par centimètre carré.
	k k	k k
Maçonnerie de pierre de taille.	2400 à 2700	30 à 40
Id. de moellons.	2100 à 2250	14 à 20
Id. de béton avec mortier ordinaire.	2300 à 2400	5
Id. de béton de ciment.	2300 à 2400	10 à 14
Id. de briques avec mortier ordinaire.	1700 à 1800	6
Id. de briques avec ciment.	1700 à 1800	10

29. *Observations.* 1° *Distinction entre les forces permanentes et les forces passagères.* — Prenons pour exemple un pont métallique. Le poids propre de la construction représente un effort permanent que les forces élastiques ont à équilibrer, tandis que le poids d'un train qui traverse le pont est une force passagère.

Pour une toiture, la charge permanente comprend le poids propre et le poids des neiges.

Pour une porte d'écluse, la charge d'eau du bief d'amont représente une charge permanente. S'il s'agit d'une écluse de bassin à flot, la plus grande charge peut être considérée comme passagère lorsque la durée de la mer basse est très-courte.

Il est sage d'abaisser la limite pratique de résistance aux deux tiers de sa valeur quand les matériaux ont à supporter un effort permanent.

2° *Influence du climat.* — Les climats extrêmes ont une influence très-remarquable sur les constructions. — La profondeur à laquelle la gelée pénètre force de descendre à un niveau inférieur les fondations des ouvrages (1). — Les climats froids augmentent les charges des constructions, par suite de l'augmentation de la masse de neige

(1) *Les Chemins de fer russes* de 1857 à 1862, 2e édition, p. 92 et suiv.

qui peut s'y accumuler. — D'un autre côté, le grand froid rend les métaux cassants et en diminue l'élasticité (1). — Les variations de température changent la poussée des arcs, font travailler les poutres droites, et ont une influence même sur les maçonneries. Les hautes températures réduisent aussi très-notablement la résistance des métaux.

3° *Effet des chocs.* — Les chocs pouvant altérer l'élasticité des matières, il est convenable de ne soumettre aux épreuves par choc que quelques échantillons, qu'on rebute ensuite, même lorsqu'ils y ont bien résisté.

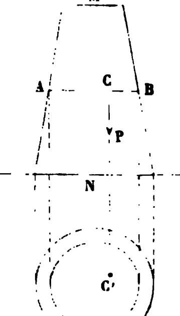
CHAPITRE III.

RÉPARTITION DES PRESSIONS SUR LES SECTIONS HORIZONTALES D'UN SOLIDE PRISMATIQUE SOUMIS A DES ACTIONS VERTICALES.

---

30. Le problème que nous allons chercher à résoudre consiste à trouver les pressions et tensions développées aux différents points d'une section horizontale AB d'un solide prismatique MN, qu'on suppose en équibre sous l'action de forces verticales parallèles à sa grande dimension.

Fig. 10.



Considérons la portion de solide comprise au-dessus de la section AB. Cette portion est sollicitée par certaines forces, qu'on suppose connues, et qui par hypothèse sont toutes verticales. On pourra composer toutes ces forces en une seule, P, qui sera encore verticale, et qui percera le plan AB en un certain point C.

(1) V. *Annales des ponts et chaussées*, 1864, p. 172.

L'équilibre de la portion MAB du solide exige donc que P soit égale et contraire à la résultante des actions moléculaires développées dans le plan de la section AB.

REMARQUE SUR LES RÉSULTANTES ET SUR LES FORCES ISOLÉES.

31. Il ne faut pas perdre de vue qu'une résultante est une force fictive qui équivaut à ses composantes quand on la fait entrer dans les équations de la mécanique, mais qui n'a aucune existence réelle.

Plus généralement, une force finie isolée, telle que celles que l'on considère dans la mécanique rationnelle, est nécessairement une force fictive, c'est-à-dire une résultante d'actions élémentaires. Si en effet une force finie était réellement appliquée à un point géométrique d'un corps solide, cette force excéderait la limite de résistance du solide en ce point, et l'équilibre moléculaire serait nécessairement troublé. Nous avons vu que la limite de résistance s'exprimait par *une force rapportée à l'unité de surface*; si la surface d'application était nulle, la tension ou la pression correspondante serait infinie, et par suite la limite de résistance serait dépassée. Aussi il faut s'habituer à considérer les forces de la nature comme des forces infiniment petites réparties entre les éléments infiniment petits des corps, et du même ordre de grandeur que ces éléments, de manière que le rapport de la force totale à la surface ou au volume qui en subit l'action soit toujours un nombre fini.

C'est ainsi que le poids d'un corps, résultante fictive des actions de la pesanteur, est réparti entre toutes les molécules, qui chacune ont un poids infiniment petit.

Pour exercer un effort en un point géométrique d'une poutre, il faudrait concentrer une surcharge sur ce seul point de la portée, ce qui est impossible, car la surcharge occupe nécessairement une certaine étendue.

Lorsqu'une roue O pose sur le sol, la charge P de cette roue n'est pas davantage appliquée en un point unique A, car la déformation commune de la roue et du sol fait naître autour du point de contact A une région finie sur laquelle la charge se répartit.

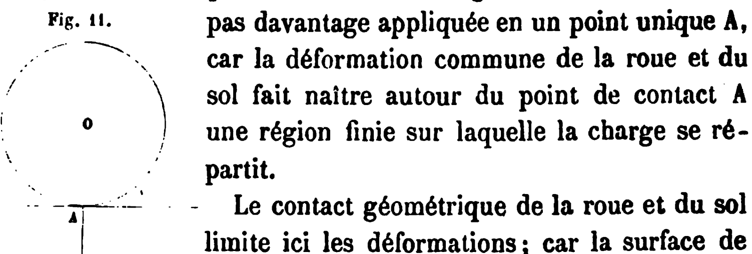


Fig. 11.

Le contact géométrique de la roue et du sol limite ici les déformations; car la surface de contact augmente rapidement à mesure que la déformation grandit. Si au contraire nous considérons l'action d'un couteau dont le tranchant presse la surface d'un corps, la pression rapportée à l'unité de surface est très-grande, parce que la surface d'application est très-réduite, et de plus, à cause de la forme du couteau, la surface d'application s'accroît peu à mesure que la déformation augmente : aussi, dans ce cas, la déformation est généralement très-sensible ; elle porte d'ailleurs principalement, suivant la dureté relative des matières, soit sur le couteau, soit sur le corps, qui est coupé.

Lorsqu'on parle d'une force P isolée, appliquée à un solide en équibre, il faut donc entendre une résultante de forces élémentaires ; P sera par exemple une somme d'actions parallèles infiniment petites. Soit p la charge par unité de surface au point A d'une section EF, et $d\omega$ l'élément de surface ABCD ; $pd\omega$ sera l'une de ces actions élémentaires, et l'on aura

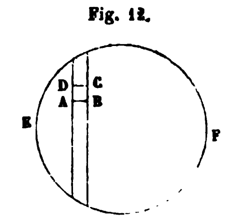


Fig. 12.

$$P = \iint pd\omega,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface, grande ou petite, EF, sur laquelle se répartit la force P.

Une force paraît isolée lorsque la surface sur laquelle elle se répartit est très-petite, et échappe par là à une mesure précise, comme il arrive pour la roue posant sur le sol. Les forces isolées que l'on introduit ainsi dans la résistance des matériaux correspondent aux *forces instantanées* de la mécanique rationnelle. On sait qu'une force instantanée P est en réalité l'impulsion d'une force

très-grande F, constante ou variable, agissant pendant un temps très-court $t - t_0$; de sorte que cette prétendue force P n'est autre chose qu'une intégrale

$$P = \int_{t_0}^{t} F dt.$$

De même, dans la théorie de la résistance, une force isolée P est une somme de la forme

$$\iint p d\omega,$$

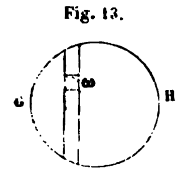


Fig. 13.

dans laquelle le facteur p désigne la force locale par unité de surface, force constante ou variable, et $d\omega$ l'élément de surface; les limites des intégrations sont celles qui correspondent à un contour GH très-resserré.

Dans son *Traité des voûtes*, Dupuit a contesté la théorie qui vient d'être exposée, et en plusieurs endroits de cet ouvrage, il admet des forces finies portant sur des arêtes et appliquées à des surfaces infiniment petites. Le motif qu'il donne pour justifier cette étrange théorie est *qu'on ne peut couper une pierre avec un rasoir, ni la percer avec une aiguille*, fait incontestable, bien que l'induction que Dupuit prétend en tirer soit inadmissible. Si une aiguille, ou un rasoir poussé par une force finie, ne pénètre pas dans une pierre, ce n'est pas parce que la pierre résiste à des forces finies appliquées à des surfaces infiniment petites, c'est parce que l'aiguille ou le rasoir se déforme, parce que l'aiguille perd sa pointe, le rasoir son tranchant, et que cette déformation ramène les conditions ordinaires de la résistance : des forces finies appliquées à des surfaces finies.

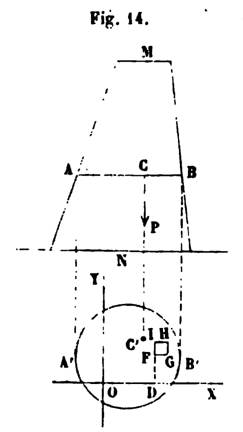
SOLUTION DU PROBLÈME AU MOYEN D'UNE HYPOTHÈSE.

32. Cherchons la répartition de la résultante P dans la section AB. Au point de vue analytique, le problème est indéterminé.

Prenons en effet dans le plan de la section deux axes rectangulaires OX, OY. Considérons un point F de cette section, et désignons

par R la pression verticale, rapportée à l'unité de surface, qui existe en ce point dans la matière; R sera une fonction inconnue des coordonnées du point F, c'est-à-dire des coordonnées $x = \text{OD}$ et $y = \text{FD}$. La force élémentaire développée par la déformation sur la surface du petit rectangle FGHI aura pour mesure $\text{R}dxdy$, et sera verticale; nous aurons des forces analogues en tous les éléments de la section, et la résultante de toutes ces forces doit être égale et contraire à la force P. Nous avons donc à exprimer l'équilibre de forces parallèles, ce qui exige trois équations, savoir : l'équation des forces, et les deux équations des moments par rapport aux axes OX, OY. De là les trois relations :

Fig. 14.



(1) $\text{P} = \iint \text{R}dxdy$, équation des forces,

(2) $\text{PY}_1 = \iint \text{R}ydxdy$, équation des moments par rapport à l'axe OX,

(3) $\text{PX}_1 = \iint \text{R}xdxdy$, *id.* par rapport à l'axe OY.

Y_1, X_1 sont les coordonnées du point de passage C' de la force P. Les intégrales sont étendues à tous les éléments de la section. C'est tout ce que donne la statique. La fonction R n'est pas déterminée par ces trois équations.

Nous pouvons considérer R comme l'ordonnée verticale d'une surface dont x et y soient les coordonnées dans le plan de la section. Les trois équations précédentes ont alors une interprétation géométrique très-simple.

L'équation (1) indique que le volume compris entre la surface $\text{R} = f(x, y)$, le plan de la section et les arêtes du cylindre projeté suivant le contour A'B', est égal à P.

Les équations (2) et (3) expriment que le centre de gravité de ce volume est situé sur la verticale passant au point C', c'est-à-dire sur la direction de la résultante.

Le problème est donc ramené à construire une surface telle que

le volume cylindrique compris entre cette surface et la section AB soit égal à un nombre donné, et telle que le centre de gravité de ce volume se projette sur la section A'B' en un point donné C'. Il est bien évident qu'on peut résoudre d'une infinité de manières ce problème de géométrie.

Au point de vue physique, cependant, la répartition des pressions n'a rien d'arbitraire; elle est réglée par une loi naturelle que nous ignorons, et qu'il serait extrêmement difficile de déterminer par l'observation directe. Pour tourner cette difficulté, on a recours à une hypothèse. La plus simple consiste à admettre que la surface cherchée $R = f(x, y)$ est un plan, ou que R est exprimée par une fonction linéaire de x et de y. L'équation générale du plan sera

$$(4) \qquad R = Ax + By + C,$$

dans laquelle A, B, C seront des constantes inconnues. Cette hypothèse réduit donc à *trois* le nombre des inconnues de la question, et comme nous avons trois équations, nous pouvons déterminer sans aucune ambiguïté les valeurs de ces inconnues.

Remplaçons R par cette valeur dans les équations (1), (2) et (3), et il viendra, en faisant sortir des signes $\iint$ les coefficients constants A, B, C :

$$(5) \qquad A\iint x\,dx\,dy + B\iint y\,dx\,dy + C\iint dx\,dy = P,$$

$$(6) \qquad A\iint xy\,dx\,dy + B\iint y^2\,dx\,dy + C\iint y\,dx\,dy = PY_1,$$

$$(7) \qquad A\iint x^2\,dx\,dy + B\iint xy\,dx\,dy + C\iint x\,dx\,dy = PX_1.$$

Ces équations sont du premier degré en A, B, C, et les doubles sommes peuvent être effectuées d'après la forme seule de la section A'B'. On pourra donc résoudre ces équations, trouver A, B, C, en fonction de P, de X_1, de Y_1 et des sommes, et enfin, introduire les valeurs de A, B, C, dans l'équation (4), qui résout entièrement la question proposée.

33. *Remarques.* — Si l'on cherche les points de la section pour lesquels la pression par unité de surface, R, a une valeur détermi-

née, R′, on voit que ces points sont tous situés sur une droite dont l'équation est

$$Ax + By + C = R'.$$

L'orientation de cette droite est définie par le rapport des coefficients A et B, et par suite, elle ne dépend pas de R′. Les lieux géométriques des points également pressés forment donc dans la section une série de droites toutes parallèles. On donne à ces droites le nom de *lignes isopiéziques* (lignes d'égale pression).

34. Les équations (5), (6) et (7) peuvent être simplifiées par un choix convenable des axes OX, OY. Prenons pour origine le point O, centre de gravité de la section; nous aurons

$$\iint y\,dx\,dy = 0 \quad \text{et} \quad \iint x\,dx\,dy = 0.$$

Observons d'ailleurs que $\iint dx\,dy$ n'est autre chose que l'aire Ω de la section. On voit par là que la première équation (5) donne simplement

$$C = \frac{P}{\Omega}, \tag{8}$$

c'est-à-dire que C est égal à la pression moyenne. Les équations (6) et (7) perdent les termes en C par cette même hypothèse sur la position du point O. Les sommes $\iint y^2 dx\,dy$, $\iint x^2 dy\,dy$ ont reçu, par analogie avec les définitions de la mécanique rationnelle, le nom de *moments d'inertie* de la section par rapport aux axes OX, OY. Enfin, on peut faire disparaître le terme $\iint xy\,dx\,dy$ en donnant une direction convenable à l'axe OX (1). Grâce à ces diverses préparations, les

---

(1) En effet, faisons tourner d'un angle α les axes coordonnés dans leur plan, et appelons x, y, les coordonnées du point dont les coordonnées primitives étaient x' et y'; nous aurons

(Fig. 15.)

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Donc

$$xy = x'^2 \cos\alpha \sin\alpha - y'^2 \cos\alpha \sin\alpha + x'y'(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)\sin 2\alpha + x'y' \cos 2\alpha.$$

$$\iint xy\,d\omega = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \left(\iint x'^2 d\omega - \iint y'^2 d\omega\right) + \cos 2\alpha \iint x'y'\,d\omega.$$

équations (6) et (7) se résolvent d'elles-mêmes, et si l'on fait

$$\iint y^2 dxdy = I_x,$$
$$\iint x^2 dxdy = I_y,$$

on a, en définitive,

$$(9) \qquad B = \frac{PY_1}{I_x},$$

$$(10) \qquad A = \frac{PX_1}{I_y}.$$

Par suite, l'équation (4) devient

$$R = P\left(\frac{X_1 x}{I_y} + \frac{Y_1 y}{I_x} + \frac{1}{\Omega}\right).$$

On peut substituer à I_x le produit $\Omega\rho_x^2$, et à I_y le produit $\Omega\rho_y^2$; ces quantités ρ_x, ρ_y, en suivant toujours l'analogie avec les définitions données dans la dynamique des corps solides, sont les *rayons de giration* de la section par rapport aux axes OX, OY, et alors l'équation (4) prend la forme :

$$(11) \qquad R = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{X_1 x}{\rho_y^2} + \frac{Y_1 y}{\rho_x^2} + 1\right).$$

Il ne faut pas oublier que l'équation (11) suppose que l'origine O est au centre de gravité de la section, et que l'axe OX a une orientation particulière. Si ces conditions n'étaient pas remplies, il faudrait s'en tenir aux équations générales (5), (6) et (7) et à l'équation (4).

On voit que la pression est également répartie en tous les points de la section si $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, ou si la force P passe par le centre de gravité O de cette section. On voit aussi que la pression au point O est toujours égale à la pression moyenne.

On peut disposer de l'angle α de manière que $\iint xy d\omega$ soit nul. Il suffit en effet de résoudre l'équation $\tan\alpha = \frac{2\iint x'y' d\omega}{\iint y'^2 d\omega - \iint x'^2 d\omega}$; elle fournit pour α deux valeurs positives, comprises entre 0 et π, et différant entre elles de $\frac{\pi}{2}$.

35. Dans tout ce qui précède, nous avons admis implicitement que le solide MN était susceptible de subir une extension aussi bien qu'une compression; nous avons regardé comme positives les valeurs de R qui correspondent à une pression : les valeurs négatives correspondent à une tension, et les formules seront générales, même si R devient en certains points négatif, pourvu que les tensions soient admissibles. Mais si le solide MN, au lieu d'être formé d'un seul morceau, est construit en blocs de pierre superposés, on sait que les pressions sont les seuls efforts que la matière puisse subir. Dans ce cas, si le calcul assigne à R des valeurs négatives en certains points de la section AB, ce résultat impossible indique qu'il faut modifier l'hypothèse qui a servi de base au calcul.

La force P ne peut se répartir alors dans toute l'étendue de la section A'B', et l'on admet en conséquence qu'il y a une région pour laquelle R est donnée par les ordonnées *positives* de la surface plane

$$R = Ax + By + C,$$

tandis que sur l'autre partie de la section on a partout $R = o$. La ligne de séparation de ces deux régions est la droite

$$Ax + By + C = 0,$$

ou la trace du plan sur la section A'B'. Pour déterminer A, B, C, il faudra donc reprendre les équations (5), (6) et (7), mais en étendant seulement les intégrations à la première région, en partie limitée à une droite dont la position varie avec les inconnues A, B, C. Le problème devient dans ce cas particulier beaucoup plus difficile; car les inconnues A, B, C entrent cette fois dans les limites des intégrales indiquées. Pour résoudre cette nouvelle question, il n'y a en général d'autre méthode que le tâtonnement.

Rappelons encore que la détermination de R, dans les deux cas, repose sur une hypothèse, de sorte que cette théorie n'a de valeur réelle que si elle est contrôlée par l'expérience. Mais l'accord de la théorie avec les faits observés est suffisant pour qu'on n'ait pas à chercher une hypothèse plus compliquée.

36. *Superposition des effets des forces.* — Nous supposerons dans

tout ce qui suit que l'hypothèse exprimée par l'équation (4) soit vraie sans restriction, c'est-à-dire que la section entière puisse développer des efforts à l'extension ou à la compression ; qu'en d'autres termes, les valeurs négatives et positives soient également admissibles pour R.

Nous pouvons décomposer la force P en autant de forces parallèles que nous voudrons,

$$P_1, P_2 \ldots\ldots P_n,$$

appliquées aux points définis par les coordonnées

$$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n,$$
$$y_1, y_2 \ldots\ldots y_n.$$

Les seules conditions à satisfaire dans cette décomposition sont exprimées par les trois équations :

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_n \\ PY_1 &= p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + \ldots\ldots + p_n y_n \\ PX_1 &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \ldots\ldots + p_n y_n. \end{aligned}$$

Cela posé, calculons successivement, au moyen des équations (5), (6) et (7), les valeurs des coefficients A, B, C, qui correspondraient à la force p_1 agissant seule ; puis à la force p_2, puis à la force p_3,.... enfin à la force p_n. Nous obtiendrons de cette manière n groupes de coefficients, savoir :

a_1, b_1, c_1	pour la force p_1	prise isolément,
a_2, b_2, c_2	*id.*	p_2,
. . .	.	.
, . .	.	.
a_n, b_n, c_n	*id.*	p_n.

La distribution des pressions partielles sera donc donnée par les formules successives :

$R_1 = a_1 x + b_1 y + c_1$	relativement à la force	p_1
$R_2 = a_2 x + b_2 y + c_2$	*id.*	p_2
.		.
.		.
$R_n = a_n x + b_n y + c_n$	*id.*	p_n.

Or, il est facile de reconnaître, à la forme linéaire des équations (5), (6) et (7), que la somme des coefficients a_1, a_2..... a_n est égale à A, coefficient correspondant à la résultante P; que de même la somme des coefficients b_1, b_2..... b_n est égale à B; que la somme des coefficients c_1, c_2..... c_n est égale à C; et qu'enfin

$$R = R_1 + R_2 + \ldots\ldots + R_n.$$

Donc la force P étant décomposée comme on voudra en plusieurs forces parallèles, *la pression en un point donné, sous l'action de la force* P, *est la somme algébrique des pressions qui correspondent en ce point à chaque composante prise isolément.*

Ce théorème peut être généralisé, et on le démontrerait dans toute sa généralité en ayant recours aux équations de l'équilibre élastique. On peut lui donner alors l'énoncé suivant, qui est d'une application très-commode et très-fréquente :

« *Les effets produits par une ou plusieurs forces appliquées à un* « *solide élastique peuvent s'obtenir en déterminant les effets partiels* « *dus aux composantes de ces forces prises isolément, et en compo-* « *sant ces effets par la règle du parallélogramme, comme on com-* « *pose les forces elles-mêmes.* »

Nous aurons souvent à faire l'application de ce principe qui, dans la théorie de l'élasticté, correspond au principe de la *coexistence des petites oscillations* dans l'hydrodynamique et dans la mécanique vibratoire. Il résulte essentiellement de la petitesse des déformations et de la proportionnalité admise entre les déplacements élémentaires et les forces qui les produisent. On peut le rattacher à une loi générale de l'analyse : *l'accroissement infiniment petit d'une fonction de plusieurs variables indépendantes est la somme des accroissements partiels correspondant à la variation de chaque variable considérée seule.*

37. *Effet d'un couple.* — Nous avons admis que les forces élémentaires, toutes parallèles entre elles, appliquées au solide, avaient une résultante P. Il peut arriver que ces forces élémentaires ne soient pas réductibles à une force unique, mais à un couple. Le calcul n'en serait pas modifié. Un couple peut être considéré comme une force

nulle appliquée à une distance infinie; pour traiter ce cas particulier, il faudrait donc remplacer P par zéro, et les produits PY_1, PX_1 par les moments des couples dans lesquels on décompose le couple donné, en le projetant sur les plans verticaux conduits par les axes OX, OY.

On peut aussi considérer successivement les deux forces P et — P qui constituent le couple, et appliquer le principe de la superposition des effets.

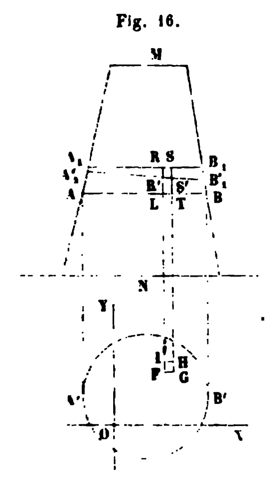
Remarquons qu'un couple pouvant être tourné comme on voudra dans son plan, on peut supposer que les forces qui le composent sont normales au solide au lieu d'être parallèles à sa grande dimension.

Le cas particulier du couple lie donc ensemble deux chapitres distincts de la déformation des prismes : déformation produite par des forces longitudinales, et déformation produite par des forces normales.

RECHERCHE DE LA DÉFORMATION DU SOLIDE.

38. Coupons le solide dans son état non déformé par un plan A_1B_1, parallèle au plan AB et infiniment voisin. Nous connaissons la répartition des pressions dans l'intervalle des plans AB, A_1B_1; considérons l'élément de prisme projeté verticalement en LRST et horizontalement en IFGH : cet élément peut être regardé comme une tige soumise à la pression R par unité de surface; elle subira donc, d'après la théorie de l'extension et de la compression des prismes, un raccourcissement l donné par l'équation

Fig. 16.



$$R = E\frac{l}{L}.$$

L représente la distance RL des deux plans dans l'état naturel du so-

lide, et l le raccourcissement RR′ de la *fibre* RL. Mais R est une fonction linéaire connue de x et de y : mettant pour R sa valeur $Ax + By + C$ et résolvant par rapport à l, il vient

$$l = \frac{L}{E}Ax + \frac{L}{E}By + \frac{LC}{E},$$

d'où l'on déduit

$$L - l = LR' = \text{[illegible]} = L\left(1 - \frac{Ax + By + C}{E}\right).$$

Cette équation représente un plan, lieu géométrique des points R′; de sorte que le plan A_1B_1, dans l'état naturel, vient, dans l'état déformé, occuper une nouvelle position $A_1'B_1'$ que notre calcul nous permet de déterminer. La déformation de la tranche ABA_1B_1 est donc connue.

Opérons de même pour chacune des tranches infiniment minces dans lesquelles on peut décomposer le solide MN. Nous pourrons par notre méthode déterminer la déformation de chacune d'elles, et il suffira de concevoir qu'on empile dans leur ordre les tranches déformées pour obtenir le solide après la déformation. La quantité L, qui mesure la distance des deux plans très-voisins AB, A′B′, devra être remplacée dans le calcul rigoureux par une différentielle, et l'empilement des tranches infiniment minces se fera sans erreur au moyen d'une intégration.

On remarquera que, conformément à ce que nous avons dit dans le § 23, le coefficient élastique intervient dans la recherche de la déformation, et non dans la recherche de la répartition des pressions.

Le calcul précédent, et l'hypothèse du § 32 qui lui sert de base, supposent que le coefficient d'élasticité E est le même en tous les points de la section donnée. S'il en était autrement, la déformation dépendrait des diverses valeurs du coefficient d'élasticité de chaque fibre, et il conviendrait de modifier l'hypothèse fondamentale. On admettrait, dans ce cas, que les molécules appartenant dans l'état actuel à un plan AB quelconque, restent encore dans un plan après la déformation. Le calcul s'achève alors de la manière suivante.

Soit E le coefficient d'élasticité, variable d'un point à l'autre, et connu en fonction de x et de y;

R la pression locale par unité de surface;

L l'intervalle primitif des deux plans parallèles AB, A_1B_1;

l le raccourcissement de la fibre soumise à la pression R;

z l'ordonnée $LR' = L - l$ du plan $A'_1B'_1$ par rapport au plan AB.

On aura à la fois

$$R = E\frac{l}{L},$$
$$z = Mx + Ny + Q,$$

M, N, Q désignant des constantes qui restent à déterminer. On en déduit

$$R = E\frac{L-z}{L} = E\left(1 - \frac{M}{L}x - \frac{N}{L}y - \frac{Q}{L}\right). \quad (1)$$

Les équations de l'équilibre seront encore

$$P = \iint R\,dxdy,$$
$$Px_1 = \iint Rx\,dxdy,$$
$$Py_1 = \iint Ry\,dxdy$$

Ces trois équations, où l'on devra remplacer R par sa valeur (1), permettront de déterminer les trois inconnues M, N, Q; le facteur variable E reste sous le signe $\iint$.

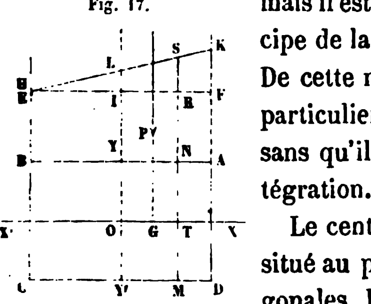
Cette recherche n'a qu'un intérêt théorique. Il est impossible de connaitre *à priori* la répartition de l'élasticité entre les diverses régions de la section AB, et d'un autre côté, il y aurait de graves inconvénients pratiques à unir ensemble des fibres solides d'élasticités différentes. Un tel assemblage est toujours défectueux.

EXEMPLES SIMPLES.

39. *Répartition d'une pression normale sur une base rectangulaire* ABCD. On donne les dimensions $AB = 2a$, $AD = 2b$.

Nous pourrions traiter ce problème par nos formules générales; mais il est préférable d'avoir recours au principe de la superposition des effets des forces. De cette manière, un certain nombre de cas particuliers donnent la solution générale, sans qu'il soit nécessaire de faire aucune intégration.

Fig. 17.



Le centre de gravité de la section AB est situé au point O, point de rencontre des diagonales. Par ce point menons des parallèles

aux côtés OX, OY. Examinons maintenant différents cas particuliers.

1° Supposons d'abord la force P appliquée au point O. Dans ce cas, la pression sera également répartie sur toute la section ABCD, et elle sera égale en tous points à $\frac{P}{\Omega}$, Ω étant la surface du rectangle. Ceci est tout à fait général, comme nous l'avons remarqué (§ 34).

2° Supposons ensuite que le point d'application de la force P soit le point G, situé sur la droite OX, et que la distance OG soit égale au tiers de la distance OX, de sorte que GX soit le tiers de la dimension AB du rectangle.

Le plan dont les ordonnées verticales représentent la pression R doit être, en vertu de la symétrie, perpendiculaire au plan vertical conduit par XX′, et sa trace sur le plan vertical est une droite HK telle, que le centre de gravité du trapèze HEFK soit situé sur la droite GP. Mais la droite GP divisant les côtés EF, HK de ce trapèze en parties dans le rapport de 2 à 1, on reconnaît immédiatement que ce trapèze se réduit à un triangle, et que le point H coïncide avec le point E. La pression en un point quelconque est donc représentée par les ordonnées de la droite EK, menée par le point E. La pression au point O est, comme on sait, égale à la pression moyenne, $\frac{P}{\Omega}$; donc la pression sur l'arête AD, double de la pression au point O puisque FQ est double de IL, est égale à $\frac{2P}{\Omega}$. Les lignes d'égale pression dans la section ABCD, projections des lignes horizontales du plan profilé en EK, sont des droites parallèles au côté AD. Si l'on veut la pression R en un point quelconque d'une ligne MN définie par son abscisse OT $= x$, cette pression est proportionnelle à l'ordonnée RS de la droite; par suite elle est donnée par la proportion

$$\frac{R}{\left(\frac{P}{\Omega}\right)} = \frac{RS}{LI} = \frac{ER}{EI} = \frac{a+x}{a},$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{x}{a}+1\right).$$

On a en effet

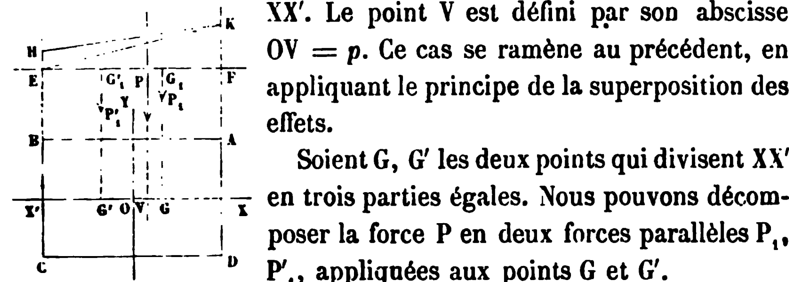
$$\text{pour } y=0,\quad R=\frac{P}{\Omega},$$

$$\text{pour } x=a,\quad R=\frac{2P}{\Omega},$$

$$\text{pour } x=-a,\quad R=0.$$

5° Nous allons supposer que le point d'application de la force P est un point quelconque, V, de la médiane XX'. Le point V est défini par son abscisse OV $= p$. Ce cas se ramène au précédent, en appliquant le principe de la superposition des effets.

Fig. 18.



Soient G, G' les deux points qui divisent XX' en trois parties égales. Nous pouvons décomposer la force P en deux forces parallèles P_1, P'_1, appliquées aux points G et G'.

Si la force P_1 agissait seule, nous aurions en un point quelconque défini par son abscisse x, la pression

$$R_1 = \frac{P_1}{\Omega}\left(\frac{x}{a}+1\right).$$

Si la force P'_1 agissait seule, nous aurions de même en ce point la pression

$$R'_1 = \frac{P_1}{\Omega}\left(-\frac{x}{a}+1\right) = -\frac{P'_1}{\Omega}\left(\frac{x}{a}-1\right).$$

On change le signe de a, parce que le point d'application de la force a pour abscisse $-\frac{a}{3}$ au lieu de $+\frac{a}{3}$. Pour avoir la pression R qui correspond à la force P, il suffit d'ajouter R_1 et R'_1, ce qui donnera

$$R = \frac{P_1}{\Omega}\left(\frac{x}{a}+1\right) - \frac{P'_1}{\Omega}\left(\frac{x}{a}-1\right).$$

Mais on peut remplacer P_1 et P'_1 par leurs valeurs en fonction de P; on a, en effet, en prenant les moments par rapport au point G'_1,

$$P_1 \times \frac{2a}{3} = P \times \left(\frac{a}{3}+p\right),$$

et en les prenant par rapport au point G'_1,

$$P'_1 \times \frac{2a}{3} = P \times \left(\frac{a}{3} - p\right).$$

Donc

$$P_1 = P\,\frac{\frac{a}{3} + p}{\frac{2a}{3}} = P\,\frac{a + 3p}{2a} = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{3p}{a}\right)$$

$$P'_1 = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{3p}{a}\right);$$

substituant, il vient l'équation finale :

$$R = \frac{P}{2\Omega}\left[\left(1 + \frac{3p}{a}\right)\left(\frac{x}{a} + 1\right) - \left(1 - \frac{3p}{a}\right)\left(\frac{x}{a} - 1\right)\right] = \frac{P}{2\Omega}\left(2 + \frac{6px}{a^2}\right)$$
$$= \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{3px}{a^2}\right).$$

On remarquera que si $p = o$, R est partout égal à $\frac{P}{\Omega}$, et que si $p = \frac{a}{3}$, R devient égal à

$$\frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

Ce sont les formules trouvées pour le premier et pour le second cas particulier.

Le cas que nous venons de traiter est représenté sur la figure par le trapèze EFKH, et la méthode que nous avons suivie revient à décomposer ce trapèze en deux triangles par une diagonale EK; chacun de ces triangles correspond à une des composantes de la force P.

4° Nous pouvons enfin passer au cas général, celui où la force P est appliquée en un point quelconque V de la base, défini par l'abscisse $OZ = X_1$ et l'ordonnée $ZV = Y_1$.

Fig. 19.

Par ce point menons une droite V'V'' telle, que le point V soit le milieu de la partie comprise entre les deux axes OX, OY. Le

point V' aura pour abscisse $OV' = OZ \times 2 = 2X_1$; le point V'' aura pour ordonnée $OY'' = VZ \times 2 = 2Y_1$.

Nous pouvons décomposer la force P en deux forces parallèles, appliquées en V' et V'', et égales chacune à $\frac{P}{2}$. Considérons-les individuellement.

La pression en tout point défini par son abscisse x sera donnée, relativement à la force $\frac{P}{2}$ appliquée au point V', par l'équation

$$R' = \frac{\left(\frac{P}{2}\right)}{\Omega}\left(1 + \frac{3 \times 2X_1 x}{a^2}\right).$$

La pression en tout point défini par son ordonnée y sera donnée, relativement à la force $\frac{P}{2}$ appliquée en V'', par l'équation

$$R'' = \frac{\left(\frac{P}{2}\right)}{\Omega}\left(1 + \frac{3 \times 2_1 Y y}{b^2}\right).$$

Donc la pression totale R qui correspond à la force P sera donnée pour le point (x, y) par la somme $R' + R''$, ou par l'équation

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{3X_1 x}{a^2} + \frac{3Y_1 y}{b^2}\right).$$

formule générale que nous aurions trouvée directement en nous servant des équations (5), (6) et (7), ou des équations plus simples (8), (9) et (10), après avoir fait les intégrations indiquées. Notre méthode de superposition des effets nous a permis d'éviter ces opérations.

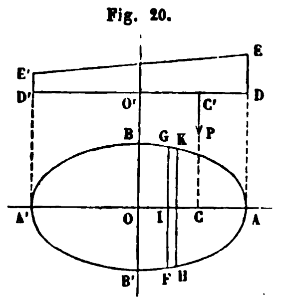
Comparant cette équation à l'équation (11), on en déduit

$$\rho_y = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \rho_x = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Ce sont les rayons de giration du rectangle dont les dimensions sont $2a$ et $2b$ par rapport aux droites OY, OX, menées par son centre de gravité parallèlement aux côtés.

40. ***Répartition des pressions sur une base circulaire ou elliptique.***

Fig. 20.



Soit $ABA'B'$ une section elliptique, définie par ses axes $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$.

Nous supposons que la résultante P passe en un point C de l'axe AA', à une distance OC du centre égale à p.

A cause de la symétrie, le plan représentatif des pressions R sera normal au plan vertical conduit par AA', et se projettera sur le plan vertical suivant sa trace EE'.

Considérons un élément de surface infiniment petit, compris entre deux droites FG, HK, infiniment voisines, et appelons x l'abscisse OI de la première de ces droites ; l'abscisse de la seconde sera $x + dx$, et la surface de l'élément aura pour mesure

$$2y\,dx,$$

y étant l'ordonnée positive, IG, qui correspond dans l'ellipse à l'abscisse x.

L'équation du plan profilé en $E'E$ sera

$$\mathfrak{R} = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{px}{\rho_y^2}\right),$$

Ω représentant l'aire de l'ellipse, ou πab, et ρ_y le rayon de giration par rapport à l'axe OB.

Pour déterminer ρ_y, cherchons le moment d'inertie I de l'ellipse par rapport à l'axe OB ; il sera donné par l'intégrale

$$I = 2\int_{-a}^{+a} y\,dx \times x^2.$$

Considérons le cercle décrit sur AA' comme diamètre ; les ordonnées de ce cercle sont aux ordonnées correspondantes de l'ellipse

dans le rapport de a à b, et par suite, le moment d'inertie I' du cercle par rapport à l'axe OB est au moment I dans le même rapport; on a donc

$$I = \frac{b}{a} I'.$$

La question est ramenée à déterminer le moment d'inertie I du cercle par rapport à l'un quelconque de ses diamètres; or on a à la fois, en appelant $d\omega$ un élément de surface et en étendant les intégrations au cercle entier,

$$I' = \iint x^2 d\omega = \iint y^2 d\omega.$$

De plus

$$\iint x^2 d\omega + \iint y^2 d\omega = 2I' = \iint (x^2 + y^2)\, d\omega.$$

Pour faire cette dernière intégration, partageons le cercle en éléments infiniment petits, compris entre des droites menées par le centre et des circonférences concentriques au cercle donné; θ et r désignant les coordonnées polaires, on aura $x^2+y^2=r^2$ et $d\omega = r dr d\theta$. Les limites de l'angle θ seront o et 2π; celles du rayon r seront o et a. Nous aurons donc

$$2I' = \int_{r=0}^{r=a} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r^3 dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{r=a} r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Donc

$$I' = \frac{\pi a^4}{4},$$

et enfin

$$I = \frac{\pi a^3 b}{4} = \Omega \times \frac{a^2}{4},$$

ou bien

$$\rho_1 = \frac{a}{2}.$$

L'équation qui donne la répartition des pressions locales est ramenée à la forme très-simple

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4px}{a^2}\right).$$

Si la force P, au lieu de passer par un point de l'axe AA', passait en un point quelconque (X_1, Y_1) de la section, nous pourrions généraliser notre formule en suivant la même marche que pour le rectangle : il faudrait décomposer la force P appliquée au point $(X_1 Y_1)$ en deux forces $\frac{P}{2}$ appliquées, l'une au point $(2X_1)$ de l'axe des x, et l'autre au point $(2Y_1)$ de l'axe des y, puis calculer, au moyen de la formule précédente, les valeurs de R correspondantes à chaque composante, et ajouter. On parvient ainsi à la formule générale :

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4X_1x}{a^2} + \frac{4Y_1y}{b^2}\right).$$

Autre méthode. — Le moment d'inertie polaire $\iint(x^2 + y^2)dxdy$ du cercle par rapport à son centre est le double du moment d'inertie du cercle par rapport à un diamètre quelconque; I' étant le premier de ces moments d'inertie et I'_x le moment cherché, on aura

$$I'_x = \frac{1}{2} I'.$$

Soit a le rayon du cercle. I' sera homogène à a^4, puisque le produit x^2dxdy a quatre dimensions, et l'on pourra poser

$$I' = ka^4,$$

k étant un coefficient constant qui reste à déterminer.

Différentions; nous aurons

$$dI' = 4ka^3da.$$

Or, dI' est le moment d'inertie polaire de la couronne qui s'ajoute au cercle de rayon a quand on augmente le rayon de da; on a donc

$$dI' = 2\pi ada \times a^2 = 2\pi a^3da.$$

Comparant ces deux équations, il vient successivement

$$k = \frac{\pi}{2},$$

$$I' = \frac{\pi a^4}{2},$$

$$I'_x = \frac{\pi a^4}{4} = \pi a^2 \times \frac{a^2}{4} = \pi a^2 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Le rayon de giration ρ_x est donc égal à $\frac{a}{2}$. On en déduit sur-le-champ la formule

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4X_1 x}{a^2}\right).$$

41. *Répartition des pressions sur la surface d'un losange* ABA_1B', défini par ses demi-diagonales $OA = a$, $OB = b$, la force P étant appliquée en un point C de l'une de ces diagonales.

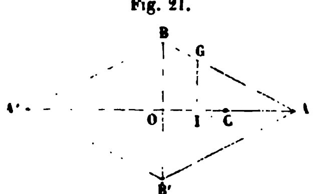


Fig. 21.

La distance OC sera représentée par p.

Soient encore x et y les coordonnées d'un point quelconque du contour ABA', correspondant aux ordonnées positives. Comme dans l'exemple précédent, l'inconnue à déterminer sera le coefficient α, dans l'équation

$$R = \frac{P}{\Omega}(1 + \alpha x),$$

et on le déterminera au moyen de l'équation des moments, pris par rapport à l'axe OB; cette équation prendra d'abord la forme

$$\frac{2P}{\Omega}\int_{-a}^{+a} xydx + \frac{2P\alpha}{\Omega}\int_{-a}^{+a} x^2ydx = Pp.$$

Or, à cause de la symétrie par rapport à l'axe BB', l'intégrale

$\int_{-a}^{+a} xydx$ sera égale à zéro, et l'intégrale $\int_{-a}^{+a} x^2ydx$ sera égale au double de $\int_0^a x^2ydx$. C'est cette seule intégrale qu'il faut chercher. Une fois qu'elle sera connue, on en déduira la valeur de α par l'équation

$$\alpha = \frac{p\Omega}{4\int_0^a x^2ydx}.$$

L'ordonnée Y = IG d'un point G de la droite AB est donnée par la proportion

$$\frac{\text{IG}}{\text{OB}} = \frac{\text{IA}}{\text{OA}},$$

ou bien

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}.$$

Donc

$$y = \frac{b}{a}(a-x) = b - \frac{b}{a}x$$

$$\int x^2ydx = b\int x^2dx - \frac{b}{a}\int x^3dx = b\frac{x^3}{3} - \frac{b}{a}\frac{x^4}{4}.$$

L'intégrale doit être prise entre les limites o et a, ce qui donne

$$\frac{ba^3}{3} - \frac{ba^3}{4} = ba^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{ba^3}{12}.$$

L'aire Ω du quadrilatère ABA'B' est égale au demi-produit des diagonales AA' $\times$ BB', multiplié par le sinus de l'angle qu'elles font entre elles; ici cet angle est droit, et son sinus est l'unité. Donc

$$\Omega = \frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 2ab.$$

Substituant toutes ces valeurs, on trouve définitivement

$$\alpha = \frac{p \times 2ab}{4 \times \frac{ba^3}{12}} = \frac{6p}{a^2}.$$

L'équation finale de la répartition devient

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}}{\Omega}\left(1 + \frac{6px}{a^2}\right).$$

42. En général, les solides qui entrent dans les constructions ont un plan de symétrie, et les forces qui leur sont appliquées sont distribuées symétriquement par rapport à ce plan. Il en résulte que les déformations s'opèrent parallèlement à ce plan de symétrie. S'il en est ainsi, le point de passage C de la résultante tombe sur l'axe de symétrie des sections. Dans cette hypothèse, les équations particulières auxquelles nous sommes parvenus pour les sections géométriques qui viennent d'être examinées, sont toutes de la forme

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}}{\Omega}\left(1 + \frac{\mathrm{K}px}{a^2}\right),$$

K étant un coefficient qui dépend de la figure de la section. On a en effet :

Fig. 22.

pour le rectangle	$\mathrm{K} = 3$	sections pleines.
pour le cercle ou l'ellipse	$\mathrm{K} = 4$	
pour le losange	$\mathrm{K} = 6$	

La répartition des pressions est donc plus égale pour le rectangle que pour le cercle, et plus égale pour le cercle que pour le losange.

43. Le cas des sections évidées se traite par les mêmes procédés de calcul ; mais les sommes, au lieu de s'étendre à toute la superficie du contour extérieur, doivent seulement s'étendre à la couronne comprise entre le contour extérieur et le contour intérieur. Nous prendrons pour exemple la cou-

ronne comprise entre deux cercles concentriques dont les rayons sont a et a'.

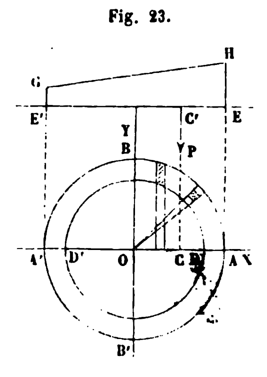


Fig. 23.

La force P étant appliquée en un point C du rayon OX, le plan représentatif de la pression R se projettera sur le plan vertical parallèle à OX suivant sa trace GH, et R sera donné encore par l'équation

$$R = \frac{P}{\Omega}(1 + \alpha x),$$

dans laquelle Ω désigne la surface annulaire comprise entre les deux cercles.

Prenons les moments par rapport à l'axe OB, il viendra

$$\frac{2P}{\Omega}\int xy\,dx + \frac{2P\alpha}{\Omega}\int x^2 y\,dx = Pp;$$

y désigne ici l'ordonnée positive de la circonférence extérieure entre les points A et D, A' et D', et la différence des ordonnées des deux circonférences entre les points D et D'. Les limites sont $-a$ et $+a$.

La première intégrale est nulle à cause de la double symétrie de la figure par rapport aux axes OX et OY. Pour la seconde, qu'il faut calculer, il est plus simple de changer de variable.

Cette intégrale est la somme des produits des éléments de surface de la couronne par le carré de leur distance à l'axe OY. Au lieu de prendre les coordonnées rectangles, nous prendrons, comme tout à l'heure, les coordonnées polaires r et θ, et nous considérerons les éléments infiniment petits compris entre les cercles de rayons r et $r + dr$, et les directions définies par les angles θ et $\theta + d\theta$; il faudra d'abord multiplier la surface $rdrd\theta$ de chaque élément par le carré $r^2 \cos^2\theta$ de la distance de cet élément à l'axe OY; puis intégrer le produit par rapport à r entre les limites

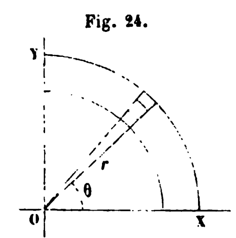


Fig. 24.

a' et a; enfin, intégrer le résultat par rapport à θ entre les limites o et π. On aura ainsi le résultat cherché.

On a donc à trouver l'integrale double

$$\int_0^\pi \int_{a'}^{a} r^3 \cos^2\theta dr d\theta.$$

La première intégration donne

$$\frac{r^4}{4} \cos^2\theta d\theta,$$

et, entre les limites a' et a,

$$\frac{a^4 - a'^4}{4} \cos^2\theta d\theta.$$

La seconde conduit à intégrer $\cos^2\theta d\theta$; on trouve pour l'intégrale générale

$$\int \cos^2\theta d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta.$$

Prise entre les limites o et π, cette intégrale se réduit à $\frac{\pi}{2}$; donc, en définitive, l'intégrale cherchée a pour valeur

$$\frac{\pi(a^4 - a'^4)}{8}.$$

On aurait pu trouver ce résultat en retranchant le moment d'inertie du cercle intérieur du moment d'inertie du cercle AA'.

Substituons dans l'équation qui doit nous donner α, en observant que $\Omega = \pi(a^2 - a'^2)$, et nous aurons pour résultat final

$$\alpha = \frac{p\Omega}{\frac{\pi}{4}(a^4 - a'^4)} = \frac{4p(a^2 - a'^2)}{a^4 - a'^4} = \frac{4p}{a^2 + a'^2},$$

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4px}{a^2 + a'^2}\right).$$

Si l'on fait $a' = 0$, on retrouve la loi de la répartition sur la surface du cercle.

Si l'on faisait $a' = a$, on aurait

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{2px}{a^2}\right).$$

Mais dans cette expression, Ω serait égal à zéro, et R serait par conséquent infini, ce qui doit être, puisque $a = a'$ réduit à zéro la largeur de la couronne.

44. Problème. — Proposons-nous, étant donné un rectangle ABCD, de trouver, en fonction de X_1 et Y_1, les valeurs de la force P qui donnent une pression constante, R, au point le plus chargé de la section.

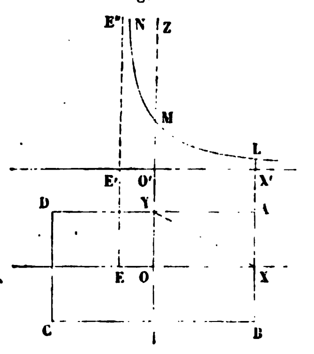


Fig. 25.

Nous traiterons la question pour la région comprise dans l'angle des parties positives des axes; la solution obtenue pour cette région devra ensuite être symétriquement reproduite dans les trois régions voisines.

X_1 et Y_1 étant positifs, il est facile de voir que le point le plus pressé est toujours le sommet A, dont les coordonnées sont $x = a$, $y = b$, lorsque le point d'application de la force P est dans l'angle YOX; que tous les points de l'arête AB subissent l'effort maximum si la force P est appliquée sur le côté OX de cet angle; qu'il en est de même de tous les points de l'arête AD si la force P est appliquée sur le côté OY. Dans tous les cas, il n'y a aucun point de la section qui soit plus pressé que le point A. Nous ferons donc $x = a$, $y = b$, dans la formule générale

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{X_1 x}{\rho^2_y} + \frac{Y_1 y}{\rho^2_x} + 1\right),$$

où il convient aussi de substituer $\frac{a}{\sqrt{3}}$ à ρ_y et $\frac{b}{\sqrt{3}}$ à ρ_x. Il vient après ces substitutions

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{3X_1}{a} + \frac{3Y_1}{b} + 1\right).$$

Dans cette équation, R est une constante, et P, X_1, Y_1 sont des variables : on peut considérer P comme l'ordonnée, normale au plan de la section, d'un point dont les coordonnées sont X_1 et Y_1. Le lieu des points ainsi obtenus est une surface cylindrique du second degré, dont les génératrices sont parallèles à la droite.

$$\frac{3X_1}{a} + \frac{3Y_1}{b} + 1 = \text{constante},$$

ou à la droite YX qui joint les milieux des côtés du rectangle aboutissant au point A.

Les plans normaux menés par les axes OX, OY, coupent ce cylindre suivant deux hyperboles : l'une d'elles, celle qui est contenue dans le plan OX, est représentée en LMN sur la figure. Elle est asymptote à la droite E′E″, menée par le point E, tiers de la médiane, perpendiculairement au plan de la section ; elle est asymptote à l'axe OX ; enfin, au point O elle a pour ordonnée $P = R\Omega$, et au point X, $P = \frac{1}{4} R\Omega$. On obtiendrait une section analogue dans le plan OY. L'une quelconque de ces deux hyperboles peut servir de directrice à la droite mobile qui engendre la surface cylindrique en restant toujours parallèle à XY.

La portion de la surface comprise dans le dièdre formé par les plans normaux OX, OY, répond seule au problème. Elle doit être répétée symétriquement dans les dièdres adjacents et dans le dièdre opposé par l'arête.

RECHERCHES DES POSITIONS DE LA FORCE P QUI DONNENT EN TOUT POINT DE LA SECTION UNE PRESSION POSITIVE.

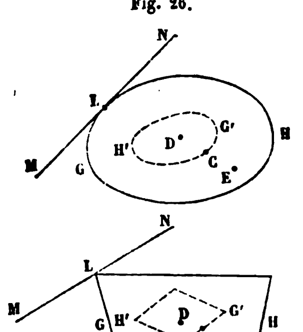
Méthode générale.

45. La pression est donnée en un point x et y par l'équation

$$R = Ax + By + C.$$

Si l'on fait $R = o$, on a l'équation, $Ax + By + C = o$, de la droite qui sépare la région où R est positif de celle où R est négatif. A, B, C sont des fonctions des coordonnées X_1 et Y_1 du point de passage de la force P. Suivant la position de ce point, la droite $Ax + By + C = o$ peut être extérieure à la section, toucher le contour de la section sans y pénétrer, ou enfin, traverser la section. Dans le premier cas, toutes les pressions R seront positives; dans le troisième, il y aura des pressions négatives; le second cas est un cas limite entre les deux autres, celui où il y a au moins un point de la section pour lequel la pression est nulle, sans que la pression soit négative nulle part.

Supposons que le contour GH de la section soit de forme convexe. Menons arbitrairement une droite MN qui ait au moins un point L commun avec le contour sans y pénétrer. Nous regarderons cette droite comme la droite de l'équation



$$Ax + By + C = 0,$$

ce qui déterminera les rapports de coefficients A, B et C. Ces rapports définissent complétement les coordonnées X_1, Y_1 du point d'application de la force P. A chaque droite MN correspond donc dans la section un point C. Faisons rouler la droite MN autour du contour GH, sans la laisser jamais pénétrer dans son intérieur. Le point correspondant C se déplacera en général, et tracera dans la section un contour G'H', dont la forme dépend de la forme du contour GH. Si la force P passe en un point C du périmètre de ce nouveau contour, la droite MN des pressions nulles touchera le contour de la section sans l'entamer, et aucune pression ne sera négative. Si la force P perce le plan de la section en un point D intérieur au contour G'H', la droite MN qui y correspond sera tout entière en dehors de la

section, et les pressions seront partout positives. Enfin, si la force P passe en un point E extérieur au contour G'H', la droite MN pénètre dans la section, et il y a une région de cette section où les pressions sont négatives. La surface comprise en dedans du contour G'H' prend le nom de *noyau central* de la section donnée.

La détermination de ce contour au moyen du contour GH se rattache à la théorie géométrique des *polaires réciproques* dans les courbes du second ordre. Nous donnerons tout à l'heure un résumé de cette théorie. Il nous suffit ici d'annoncer sans démonstration :

Qu'à chaque sommet d'angle du contour GH correspond une droite dans le contour G'H';

Qu'à chaque droite du contour GH correspond un point du contour G'H';

Qu'à chaque arc de courbe du second ordre du contour GH correspond un arc de courbe du second ordre du contour G'H'.

Ces théorèmes, que nous démontrerons dans le chapitre suivant, nous seront utiles pour achever le tracé du contour G'H', lorsque nous en aurons déterminé quelques éléments.

46. Exemples. — I. *Section rectangulaire.* — Si la force P est appliquée en un point C de l'une des médianes XX', à une distance p du centre O, la valeur de R est donnée par l'équation

Fig. 27.

$$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{3px}{a^2}\right).$$

R est donc égal à zéro le long de la droite

$$1+\frac{3px}{a^2}=0,$$

et pour que cette droite touche le contour sans y pénétrer, il faut qu'elle coïncide avec le côté A'A'', ou avec la droite $x=-a$. Ce qui exige qu'on ait

$$p=\frac{a}{3}.$$

Le point C du contour G'H' cherché est donc au tiers de la distance OX ; ce point correspond au côté A'A''.

Par raison de symétrie, on aura de même des points du contour cherché en prenant les tiers C', C'', C''' des distances OY, OX', OY' ; ce seront les points correspondants aux droites A''A''', AA''', AA' du contour donné.

Les sommets A, A', A'', A''' du contour donné devant correspondre à des droites du contour cherché, on aura ce contour en joignant les sommets C, C', C'', C''', ce qui donne en définitive un losange.

II. *Losange* ABCD. — L'équation à employer sera

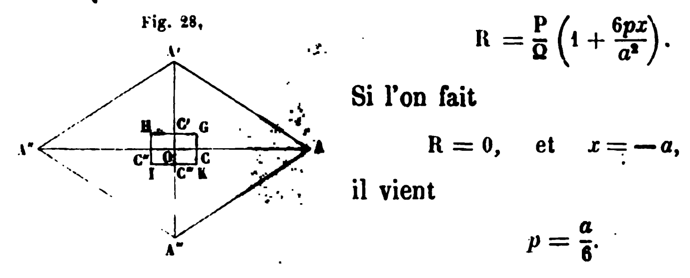


Fig. 28.

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{6px}{a^2}\right).$$

Si l'on fait

$$R = 0, \quad \text{et} \quad x = -a,$$

il vient

$$p = \frac{a}{6}.$$

On prendra donc

$$OC = OC'' = \frac{1}{6}a, \quad OC' = OC''' = \frac{1}{6}b,$$

et comme aux sommets A, A', A'', A''', doivent correspondre des droites dans le contour cherché, on aura à mener par ces quatres points C, C', C'', C''', des droites qu'on dirigera perpendiculairement aux diagonales AA'', A'A''' à cause de la symétrie de la figure. Le rectangle GHIK ainsi construit sera le contour correspondant aux pressions positives. Les sommets G, H, I, K, correspondent respectivement aux côtés du losange donné A''A''', A'''A, AA', A'A''.

III. *Cercle ou ellipse.* — Le contour cherché se déduira du contour donné en réduisant au quart les rayons issus du centre O.

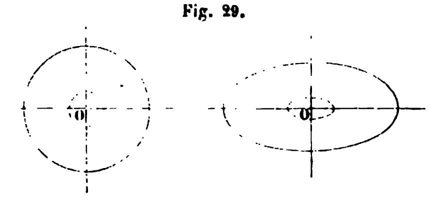


Fig. 29.

IV. *Section circulaire évidée.*—Soient a et a' les rayons de deux cercles qui limitent

extérieurement et intérieurement la section donnée; supposons

$$a' < a.$$

La pression en chaque point est donnée par la formule (§ 43)

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4px}{a^2 + a'^2}\right),$$

p étant la distance du point C au centre.

Si la droite R = o touche le cercle au point dont l'abscisse $x = a$, l'équation

$$1 + \frac{4px}{a' + a'^2} = 0$$

doit se réduire à la forme

$$x + a = 0,$$

et l'on a

$$p = \frac{a + \frac{a'^2}{a}}{4}$$

pour le rayon du noyau central.

Si, au lieu d'un anneau circulaire, il s'agit d'un anneau elliptique compris entre deux ellipses concentriques semblables, dont les demi-axes sont a, b, pour l'une, et a', b', pour l'autre, le noyau central est de même une ellipse dont les demi-axes p et q sont

$$p = \frac{a + \frac{a'^2}{a}}{4}, \quad q = \frac{b + \frac{b'^2}{b}}{4}.$$

CHAPITRE IV.

ELLIPSE D'INERTIE. TRACÉ DU NOYAU CENTRAL. POLAIRES RÉCIPROQUES. CENTRES DE PERCUSSION.

---

47. *Définition de l'ellipse centrale d'inertie.* — Par le centre de gravité O de la section donnée GH, menons deux axes rectangulaires OX, OY, puis formons les sommes

$$I_x = \iint y^2 dx dy, \quad I_y = \iint x^2 dx dy,$$

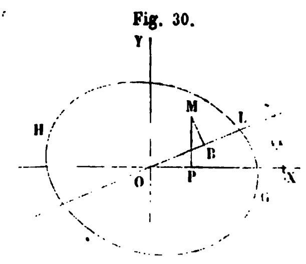


Fig. 30.

en les étendant à tous les éléments de l'aire de la section. Ces sommes sont les *moments d'inertie* de la section par rapport aux axes OX, OY ; si on les divise par l'aire totale Ω de la section, on obtient pour quotient les quantités ρ^2_x et ρ^2_y, carrés des rayons de giration de la surface par rapport aux mêmes axes.

Par le point O menons, dans le plan de la section, une droite OL faisant avec OX un angle ω quelconque, et appelons I le moment d'inertie de la section par rapport à cette droite OL. La distance MB d'un point M à la droite OL est donnée par la valeur absolue de l'expression

$$y \cos \omega - x \sin \omega,$$

dans laquelle $y =$ MP, $x =$ OP, sont les coordonnées du point M.

Le carré de cette distance est

$$y^2\cos^2\omega + x^2\sin^2\omega - 2xy\cos\omega\sin\omega.$$

Si l'on multiplie par $dxdy$ et qu'on intègre dans l'intérieur de toute la section, on aura I, c'est-à-dire

$$I = \cos^2\omega\iint y^2dxdy + \sin^2\omega\iint x^2dxdy - 2\cos\omega\sin\omega\iint xydxdy,$$

ou bien

$$I = I_x\cos^2\omega + I_y\sin^2\omega - 2\sin\omega\cos\omega\iint xydxdy.$$

On peut donc exprimer le moment d'inertie de la section autour d'une droite quelconque OL menée par le point O, en fonction des moments d'inertie par rapport à deux axes rectangulaires, de l'intégrale $\iint xydxdy$, que nous représenterons pour abréger par M, enfin de l'angle ω que fait la droite OL avec l'un des axes.

Nous pouvons construire une courbe qui nous aidera à nous représenter les moments d'inertie autour de différents axes conduits par le point O. Prenons sur chaque droite OL une quantité telle, que le produit de cette quantité par le rayon de giration autour de OL soit égal à une quantité constante λ^2, prise arbitrairement. Pour introduire les rayons de giration dans notre équation, appelons ρ le rayon de giration qui correspond à la ligne OL; nous aurons

$$I = \Omega\rho^2.$$

Nous poserons de même

$$M = \Omega c^2,$$

c représentant, non plus un rayon de giration, mais une longueur analogue, longueur connue, puisque la somme M est entièrement déterminée par le choix des axes. Introduisons ces nouvelles expressions dans l'équation qui donne I; il viendra, en supprimant Ω qui est facteur commun,

$$\rho^2 = \rho_x^2\cos^2\omega + \rho_y^2\sin^2\omega - 2c^2\sin\omega\cos\omega.$$

Prenons ensuite des longueurs r, r_x, r_y, c', liées aux précédentes par les équations

$$r = \frac{\lambda^2}{\rho}, \quad r_x = \frac{\lambda^2}{\rho_x}, \quad r_y = \frac{\lambda^2}{\rho_y}, \quad c' = \frac{\lambda^2}{c},$$

c'est-à-dire opérons la transformation connue en géométrie sous le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques*. Le lieu des points (r, ω) ainsi obtenus permettra de trouver les valeurs des rayons de giration pour une direction OL quelconque.

Remplaçons ρ, ρ_x, ρ_y et c par leurs valeurs

$$\frac{\lambda^2}{r}, \quad \frac{\lambda^2}{r_x}, \quad \frac{\lambda^2}{r_y}, \quad \frac{\lambda^2}{c'},$$

et nous aurons l'équation en coordonnées polaires, r et ω, du lieu cherché :

$$\frac{\lambda^4}{r^2} = \frac{\lambda^4}{r^2_x} \cos^2\omega + \frac{\lambda^4}{r^2_y} \sin^2\omega - 2\cos\omega \sin\omega \frac{\lambda^4}{c'^2}.$$

Le facteur λ^4 peut être supprimé ; si l'on multiplie ensuite par r^2, et qu'on remplace $r\cos\omega$ par x et $r\sin\omega$ par y, on aura en définitive pour l'équation du lieu en coordonnées rectangles

$$1 = \frac{x^2}{r^2_x} + \frac{y^2}{r^2_y} - \frac{2xy}{c^2},$$

équation d'une courbe du second ordre, qui est nécessairement fermée, puisque ses rayons r ne peuvent être infinis (1). C'est donc une ellipse. Si, comme on l'a supposé, l'origine O est le centre de gravité de la section, on appellera cette ellipse l'*ellipse centrale d'inertie* de la section. Les dimensions en sont encore indéterminées, car elles dépendent de la quantité λ qui est arbitraire.

---

(1) Sauf dans le cas où la section se réduirait à une droite sans épaisseur, cas inadmissible dans les applications.

On peut simplifier l'équation en prenant pour axes des x et des y les axes principaux de l'ellipse ; elle devient alors de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dans cette équation, a est inversement proportionnel au rayon de giration de la section autour du nouvel axe OX, et b, inversement proportionnel au rayon de giration autour du nouvel axe OY. Les quantités $\frac{\lambda^2}{a}$, $\frac{\lambda^2}{b}$ sont les *rayons de giration principaux* de la surface.

Avec cette orientation particulière des axes, la somme $M = \iint xydxdy$ est égale à zéro : nous avions déjà reconnu (§ 34, note) qu'il était toujours possible, en faisant un choix convenable d'axes, de satisfaire à cette condition.

Ces résultats sont tout à fait analogues à ceux que l'on obtient dans la dynamique des solides invariables pour l'ellipsoïde d'inertie.

48. ***Remarque** sur les axes de symétrie.* — Si l'aire donnée a un axe de symétrie XX', cet axe passe par son centre de gravité O, et de plus il est l'un des axes principaux de l'ellipse centrale. En effet, l'intégrale $\iint xydxdy$, prise relativement à cet axe considéré comme axe des x, est nulle à cause de la symétrie, puisqu'à tout élément superficiel $dxdy$ situé d'un côté de l'axe, correspond de l'autre côté un élément égal $dxdy$, ayant même x, mais ayant pour ordonnée $-y$. La somme des éléments symétriques $xydxdy$ pris deux à deux étant nulle, il en est de même de l'intégrale totale.

Fig. 31.

Si la surface donnée a deux axes de symétrie, faisant entre eux un angle différant d'un angle droit (auquel cas la surface a nécessairement encore d'autres axes de symétrie, qu'il est facile de déduire des deux premiers), l'ellipse d'inertie aura deux axes principaux non rectangulaires, ce qui indique qu'elle *se réduit à un cercle.*

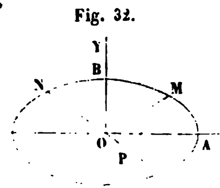
Il résulte de là, comme corollaire, que l'*ellipse d'inertie d'un*

polygone régulier quelconque est une circonférence, et que le moment d'inertie de la surface est le même autour de toute droite menée dans son plan par son centre de gravité. On voit aussi que le moment d'inertie polaire du polygone, par rapport à un axe mené par son centre de gravité perpendiculairement à son plan, est double du moment d'inertie par rapport à toute droite menée par le centre de gravité dans le plan de la figure.

Jusqu'ici, nous avons défini l'ellipse d'inertie de forme, et non de grandeur. Il est utile de faire une convention relativement à la quantité arbitraire λ; nous ferons $\lambda^2 = \rho_x \rho_y$, c'est-à-dire λ^2 égal au produit des rayons de giration de la section donnée autour de ses axes principaux d'inertie; on a alors

$$r_x = \frac{\lambda^2}{\rho^2} = \rho_y = a,$$
$$r_y = \frac{\lambda^2}{\rho_x} = \rho_x = b.$$

Fig. 32.



Le rayon de giration ρ de la section autour d'une droite ON sera donné par l'expression $\frac{\lambda^2}{ON} = \frac{\rho_x \rho_y}{ON} = \frac{ab}{ON}$. Mais dans l'ellipse le rectangle des axes est équivalent au parallélogramme construit sur un système de diamètres conjugués; menant donc OM, diamètre conjugué à ON, nous aurons

$$ON \times OM \times \sin NOM = OA \times OB = ab.$$

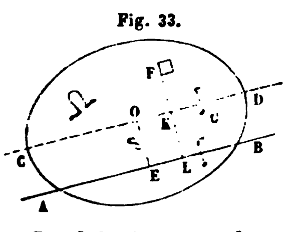
Donc

$$\frac{ab}{ON} = \rho = OM \sin NOM = MP,$$

distance du point M à la droite ON. Le choix de cette ellipse particulière d'inertie permet donc de poser la règle suivante : *Le rayon de giration de la section autour d'une droite quelconque passant par le point* O *est égal à la distance de cette droite à l'extrémité du diamètre conjugué à sa direction.*

49. Théorème. Le moment d'inertie I autour d'une droite AB, qui ne passe pas par le centre de gravité de la section, s'obtient en ajoutant au moment d'inertie autour d'une droite CD, menée par le centre de gravité parallèlement à AB, le produit de l'aire Ω de la section par le carré de la distance OE des deux droites.

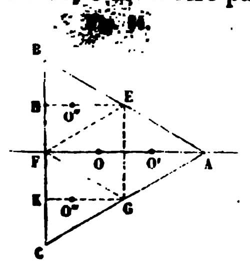
Fig. 33.



Ce théorème, analogue à celui qu'on établit en dynamique pour la relation entre les moments d'inertie d'un solide pris autour d'axes parallèles, se démontre exactement de même pour les surfaces. Le moment d'inertie d'un élément F par rapport à AB est

$$dxdy \times \overline{FL}^2 = dxdy\,(\overline{FK}^2 + 2FK \times KL + \overline{KL}^2).$$

Pour avoir le moment d'inertie par rapport à AB, on fera donc les trois sommes des produits $dxdy \times \overline{FK}^2$, $2dxdy \times FK \times KL$, $dxdy \times \overline{KL}^2$. La première somme, étendue à tous les éléments de la section, est le moment d'inertie de cette section par rapport à CD; la troisième, dans laquelle le facteur $\overline{KL}^2 = \overline{OE}^2$ est le même pour tous les éléments, donne le produit par $\overline{OE}^2$ de la surface totale Ω de la section. Enfin la seconde somme est nulle; car, en faisant sortir de la somme le facteur commun $2KL$, on doit étendre à toute la surface la somme des moments élémentaires, $dxdy \times FK$, par rapport à la droite CD; la quantité FK doit être prise positivement pour les points situés au-dessus de CD, et négativement pour les points situés au-dessous. Le résultat de la sommation est le produit de la surface entière par la distance à CD du centre de gravité O de la surface, c'est-à-dire par zéro, et le théorème est démontré.



50. *Recherche du moment d'inertie du triangle équilatéral* ABC *par rapport à une droite passant par son centre de gravité* O.

La figure ABC étant un polygone régulier, le moment d'inertie cherché est le même, quelle que soit la droite par rapport à laquelle on le prenne. Il suffit donc de con-

sidérer la droite FA, médiane du triangle. Le point O se trouvera au tiers de FA à partir du point F, milieu de la base BC.

Soient E, G, les milieux des autres côtés; nous décomposons, en joignant EN, EF, FG, le triangle donné en quatre triangles équilatéraux égaux entre eux, et dans lesquels les centres de gravité sont aux points O, O', O'', O'''. Soit I le moment d'inertie cherché, I' le moment d'inertie d'un des petits triangles par rapport à sa médiane. Nous aurons, en appliquant le théorème précédent,

$$I = 2I' + 2\left(I' + \Omega' \times \overline{FH}^2\right),$$

Ω' étant la surface de l'un des petits triangles.

FH est égal au quart du côté c du triangle donné; Ω' est aussi le quart de la surface Ω de ce triangle. Donc enfin

$$I = 4I' + \frac{1}{32}\Omega c^2.$$

Mais les petits triangles sont semblables au grand, et comme les sommes I ont quatre dimensions linéaires $(y^2 dxdy)$, I est à I' comme l'unité est à la quatrième puissance du rapport de similitude, qui est ici $\frac{1}{2}$; donc

$$I' = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

Remplaçant dans l'équation, il vient

$$\frac{3}{4} I = \frac{1}{32}\Omega c^2, \quad \text{ou bien} \quad I = \frac{1}{24}$$

Le rayon de giration du triangle équilatéral autour de toute droite menée par son centre de gravité est donc égal à

$$\sqrt{\frac{c^2}{24}} = \frac{c}{2\sqrt{6}}.$$

Cet exemple montre qu'on peut quelquefois éviter l'emploi du calcul intégral dans la recherche des moments d'inertie.

51. *Moment d'inertie d'un polygone régulier.* — Le moment d'inertie d'un polygone régulier est le même par rapport à toute droite menée dans son plan par son centre O : c'est la moitié du moment d'inertie polaire du polygone par rapport à ce point O.

Fig. 35.

Soient

AB = a le côté du polygone,
OC = h l'apothème,
n le nombre des côtés.

La surface Ω du polygone sera égale à $\frac{1}{2}nah$.

Soit I le moment d'inertie polaire. Si au polygone donné nous substituons un polygone semblable concentrique, dans lequel les dimensions a et h deviennent respectivement $a+da$, $h+dh$, le moment d'inertie I par rapport au centre s'accroîtra de la somme des moments d'inertie, par rapport au même point, des bandes additionnelles ABB'A', qui s'ajoutent à chaque triangle OAB. Ces bandes sont assimilables à des rectangles qui auraient pour base $AB = a$ et pour hauteur $CC' = dh$. Leur surface est donc adh, et leur moment d'inertie par rapport à leur centre de gravité, qui est infiniment voisin du point C, est

$$adh \times \frac{a^2}{12}.$$

Ajoutant le produit $adh \times h^2$ de la surface par le carré de la distance de son centre de gravité au point O, on a le moment d'inertie de la même surface par rapport au centre O du polygone.

Donc

$$dI = nadh \times \left(\frac{a^2}{12} + h^2\right).$$

Mais les deux variables a et h sont dans un rapport constant, et nous pouvons remplacer a par kh, k étant une constante. On en

déduit

$$dI = nkhdh\left(\frac{k^2h^2}{12} + h^2\right) = nkh^3dh\left(1 + \frac{k^2}{12}\right);$$

d'où résulte, en intégrant,

$$I = \frac{nkh^4}{4}\left(1 + \frac{k^2}{12}\right),$$

ou bien

$$I = \frac{nkh \times h}{2}\left(\frac{h^2}{2} + \frac{k^2h^2}{24}\right) = \frac{1}{2}nah\left(\frac{h^2}{2} + \frac{a^2}{24}\right) = \Omega\left(\frac{h^2}{2} + \frac{a^2}{24}\right).$$

Prenant la moitié de cette somme, on aura le moment d'inertie cherché

$$I_x = \Omega\left(\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{48}\right).$$

En fonction du rayon R du cercle circonscrit et du nombre n de côtés, on aurait

$$\Omega = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$h = R\cos\frac{\pi}{n},$$

$$a = 2R\sin\frac{\pi}{n},$$

et

$$I_x = \frac{1}{2}nR^4\sin\frac{2\pi}{n}\left(\frac{1}{4}\cos^2\frac{\pi}{n} + \frac{1}{12}\sin^2\frac{\pi}{n}\right).$$

Applications particulières.

Triangle équilatéral :

a côté,

h apothème $= \frac{a}{2\sqrt{3}}$,

$I_x = \frac{1}{24}a^2\Omega, \qquad \rho_x = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$

Carré :

a côté,

$h = \frac{a}{2}$,

$I_x = \Omega \times \frac{1}{12}a^2, \qquad \rho_x = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$

Hexagone régulier :

$$a \text{ côté},$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a,$$
$$I_x = \Omega a^2 \times \frac{37}{48}, \qquad \rho_x = a\sqrt{\frac{37}{48}}.$$

Cercle :

$$a = 0,$$
$$h = R,$$
$$I_x = \Omega \times \frac{R^2}{4}, \qquad \rho_x = \frac{R}{2}.$$

52. *Comparaison des polygones réguliers d'égale superficie, au point de vue de l'inégalité des pressions locales développées par une force normale* P.

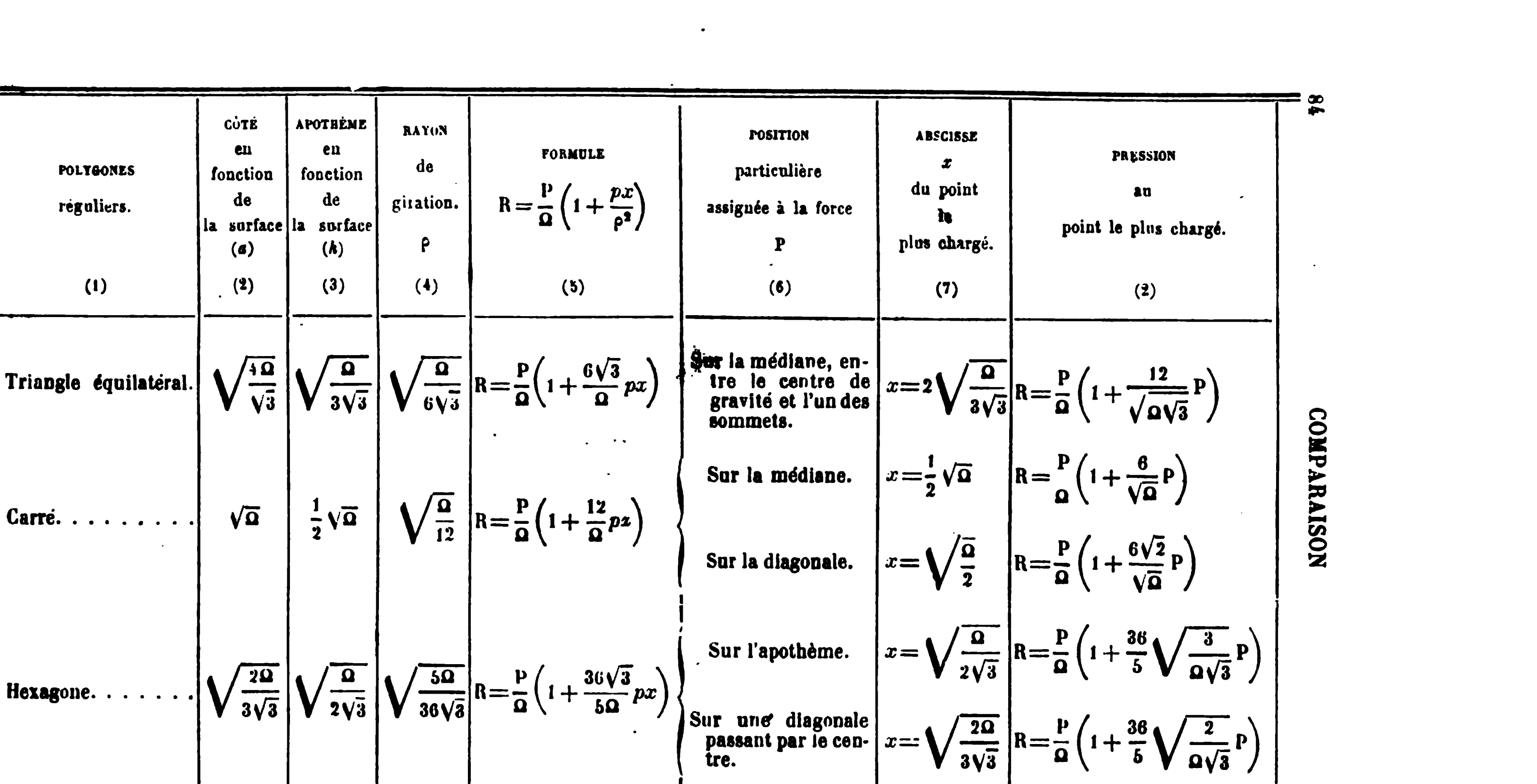
Soient Ω, l'aire commune à tous les polygones considérés ;
ρ, le rayon de giration de cette aire par rapport à une droite quelconque menée par son centre dans son plan ;
p, la distance du centre au point d'application de la force P.

La pression par unité de surface R, au point dont l'abscisse est x, est donnée par la formule

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{px}{\rho^2}\right).$$

ρ est une fonction de Ω et du nombre de côtés du polygone. L'inégalité de la distribution des pressions peut être évaluée de deux façons : 1° par l'inclinaison plus ou moins grande du plan dont les ordonnées représentent les valeurs de R ; 2° par l'écart entre la pression moyenne $\frac{P}{\Omega}$ et la pression au point le plus chargé.

Ces deux méthodes de comparaison conduisent à des résultats différents, comme il résulte des tableaux suivants.



POLYGONES réguliers. (1)	CÔTÉ en fonction de la surface (a) (2)	APOTHÈME en fonction de la surface (h) (3)	RAYON de giration. ρ (4)	FORMULE $R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{px}{\rho^2}\right)$ (5)	POSITION particulière assignée à la force P (6)	ABSCISSE x du point le plus chargé. (7)	PRESSION au point le plus chargé. (2)
Triangle équilatéral.	$\sqrt{\frac{4\Omega}{\sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{\Omega}{3\sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{\Omega}{6\sqrt{3}}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{6\sqrt{3}}{\Omega}px\right)$	Sur la médiane, entre le centre de gravité et l'un des sommets.	$x=2\sqrt{\frac{\Omega}{3\sqrt{3}}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{12}{\sqrt{\Omega\sqrt{3}}}P\right)$
Carré.	$\sqrt{\Omega}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\Omega}$	$\sqrt{\frac{\Omega}{12}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{12}{\Omega}px\right)$	Sur la médiane.	$x=\frac{1}{2}\sqrt{\Omega}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{6}{\sqrt{\Omega}}P\right)$
					Sur la diagonale.	$x=\sqrt{\frac{\Omega}{2}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega}}P\right)$
Hexagone.	$\sqrt{\frac{2\Omega}{3\sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{\Omega}{2\sqrt{3}}}$	$\sqrt{\frac{5\Omega}{36\sqrt{3}}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{36\sqrt{3}}{5\Omega}px\right)$	Sur l'apothème.	$x=\sqrt{\frac{\Omega}{2\sqrt{3}}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{36}{5}\sqrt{\frac{3}{\Omega\sqrt{3}}}P\right)$
					Sur une diagonale passant par le centre.	$x=\sqrt{\frac{2\Omega}{3\sqrt{3}}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{36}{5}\sqrt{\frac{2}{\Omega\sqrt{3}}}P\right)$
Cercle.	0	$\sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{4\pi}{\Omega}px\right)$	»	$x=\sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}$	$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{\Omega}}P\right)$

On trouve, en effectuant les calculs :

POLYGONES.	COLONNE 5.	COLONNE 8.
Triangle équilatéral.	$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 10,38\frac{px}{\Omega}\right)$	$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 9{,}12\frac{p}{\sqrt{\Omega}}\right)$
Carré. 1° 2°	$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 12\frac{px}{\Omega}\right)$	1° $R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 6,00\frac{p}{\sqrt{\Omega}}\right)$ 2° $R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 8,46\frac{p}{\sqrt{\Omega}}\right)$
Hexagone régulier. 1° 2°	$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 12,45\frac{px}{\Omega}\right)$	1° $R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 6,69\frac{p}{\sqrt{\Omega}}\right)$ 2° $R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 7,72\frac{p}{\sqrt{\Omega}}\right)$
Cercle.	$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 12,57\frac{p}{\Omega}\right)$	$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + 7,03\frac{p}{\sqrt{\Omega}}\right)$

Si l'on adopte le premier point de vue, on pourra représenter l'inégalité par les nombres

10,38 pour le triangle équilatéral,
12 pour le carré,
12,45 pour l'hexagone,
12,50 pour le cercle.

L'inégalité s'accentue de plus en plus à mesure que le nombre de côtés du polygone augmente.

Si l'on adopte la seconde définition, il y a lieu de distinguer deux cas : lorsque la force P est appliquée en un point d'une droite menée du centre du polygone à l'un de ses sommets, l'inégalité cherchée

est représentée par les coefficients

9,12 pour le triangle équilatéral,
8,46 pour le carré,
7,72 pour l'hexagone,
7,03 pour le cercle.

Lorsque P est appliquée en un point de l'apothème, l'inégalité est au contraire représentée par les coefficients

6 pour le carré,
6,69 pour l'hexagone,
7,03 pour le cercle,

qui varient dans le même sens que les coefficients d'inclinaison du plan représentatif des pressions R.

Pour un cercle évidé concentriquement, si a et a' sont les rayons de la circonférence extérieure et de l'intérieure, on aura

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4px}{a^2 + a'^2}\right) = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4px}{2a^2 - \frac{\Omega}{\pi}}\right),$$

et, au point le plus chargé $x = a$,

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{4p}{2a - \frac{\Omega}{\pi a}}\right).$$

Le coefficient d'inégalité est représenté, dans la première définition, par le nombre

$$\frac{4p}{\left(\frac{2a^2}{\Omega} - \frac{1}{\pi}\right)},$$

et dans la seconde par le nombre

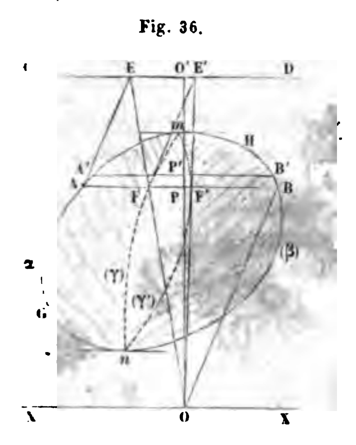
$$\frac{4}{\frac{2a}{\sqrt{\Omega}} - \frac{\sqrt{\Omega}}{\pi a}};$$

nombres qui peuvent être rendus chacun aussi petit qu'on voudra en prenant le rayon a suffisamment grand.

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR TROUVER, PAR DES QUADRATURES, LES MOMENTS ET LES MOMENTS D'INERTIE DES AIRES PLANES PAR RAPPORT A DES DROITES MENÉES DANS LEUR PLAN.

53. Soit XX l'axe par rapport auquel on prend les moments; GH le contour donné. Menons arbitrairement une droite OO', perpendiculaire à XX, puis une droite CD parallèle à XX, à une distance arbitraire $OO' = a$. Soit ABB'A' un élément de la surface considérée, limité entre deux droites infiniment voisines, AB, A'B', menées parallèlement à l'axe XX.

Fig. 36.



Faisons $OP = x$, $PP' = dx$, $AB = y$.

Le moment de ABB'A' par rapport à XX est $xydx$; le moment d'inertie est x^2ydx.

Joignons OB. Par le point A menons AE parallèle à OB, jusqu'à la rencontre de la droite CD.

Joignons EO : cette droite coupe AB en F; soit $FB = y'$.

Par le point F, menons FE' parallèle à OB jusqu'à la rencontre en E' avec CD, et joignons OE'; cette droite détermine sur AB un point F'; faisons $F'B = y''$.

On déduit par cette construction une courbe (γ) de la courbe donnée (α); puis une courbe (γ') de la courbe (γ).

Les triangles AEF, FOB sont semblables, de même que les triangles FE'F', F'OB; on en déduit les proportions

$$\frac{FB}{AB} = \frac{OF}{OE} = \frac{OP}{OO'}, \quad \frac{F'B}{FB} = \frac{OF'}{OE'} = \frac{OP}{OO'},$$

ou bien

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{a}, \quad \frac{y''}{y'} = \frac{x}{a},$$

et par suite, en multipliant,

$$\frac{y''}{y} = \frac{x^2}{a^2}.$$

Donc

$$a'y = xy, \qquad a^2y'' = x^2y,$$
$$ay'dx = xydx, \quad a^2y''dx = x^2ydx,$$

et, intégrant entre les limites du contour,

$$a\int y'dx = \int xydx, \quad a^2\int y''dx = \int x^2ydx.$$

Le moment de l'aire donnée, comprise entre les lignes (α) et (β), est donc égal au produit par la constante a de l'aire comprise entre la courbe (β) et la courbe (γ), que l'on déduit de (α) par la construction indiquée pour le point F; et le moment d'inertie de la même aire est égal au produit par a^2 de l'aire comprise entre (β) et la courbe (γ'), déduite de (γ) par la même opération. En répétant l'opération pour le point F', on ramènerait de même à de simples quadratures la recherche des intégrales $\int x^3ydx$, $\int x^4ydx$, etc.

54. *Construction graphique de l'intégrale double* $\iint xydxdy$.

Soient MN, le contour donné;

OX, OY, les axes rectangulaires;

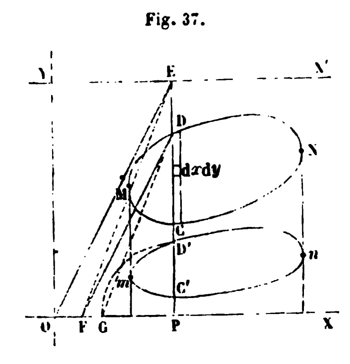


Fig. 37.

$OP = x$, l'abscisse, et $PC = y_0$, $PD = y_1$, les ordonnées correspondantes du contour.

En faisant d'abord varier y seul, on a à faire l'intégrale

$$xdx\int_{y=y_0}^{y=y_1} ydy = \frac{1}{2}\,xdx\left(y_1^2 - y_0^2\right).$$

Il reste à prendre l'intégrale de $\frac{1}{2}\,xy_1^2dx$ le long de la courbe MDN,

et l'intégrale de $\frac{1}{2}xy_1^2dx$ le long de MCN. Menons à distance arbitraire $OY = a$ une parallèle YX' à l'axe OX. Prolongeons PD jusqu'à la rencontre en E avec YX', joignons OE, puis menons DF parallèle; joignons EF, et menons DG parallèle; enfin prenons $PD' = PG$ sur l'ordonnée PD. Cette construction, appliquée à tous les points du contour MDN, conduira à tracer le contour mD'n; je dis que les aires de ce nouveau contour sont proportionnelles à l'intégrale $\int y^2xdx$ prise le long du premier.

En effet, les parallèles OE et FD, EF et DG, donnent

$$\frac{PG}{PF} = \frac{PD}{PE}, \quad \frac{PF}{PO} = \frac{PD}{PE},$$

ou, en faisant $PG = y'$ et en multipliant membre à membre,

$$\frac{y'}{x} = \frac{y_1^2}{a^2}.$$

Donc

$$a^2y' = y_1^2x,$$

et par suite

$$\frac{1}{2}a^2\int y'dx = \int\frac{1}{2}y_1^2xdx.$$

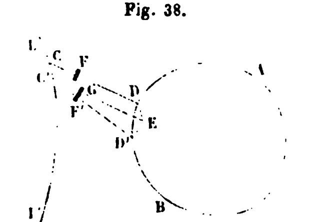
Construisons de même un contour mC'n, déduit de la ligne inférieure MCN; il suffira pour trouver $\iint xydxdy$ d'évaluer l'aire comprise à l'intérieur du contour fermé mD'nC'm, et de la multiplier par $\frac{1}{2}a^2$.

Si l'axe OY traverse la figure, il faudra se rappeler que chaque élément $\frac{1}{2}xy^2dx$ a le signe de x; l'ordonnée auxiliaire y' doit donc avoir aussi le signe de l'abscisse (1).

(1) V. *Association française pour l'avancement des sciences*, congrès de Lille, 1874, p. 1193.

PLANIMÈTRE D'AMSLER (1).

55. Le planimètre de M. Amsler, ingénieur à Schaffouse, a pour objet l'évaluation des aires planes.


Fig. 38.

L'appareil repose sur le principe suivant :

Soit AB le contour fermé, tracé dans un plan, dont on se propose d'évaluer la surface.

Imaginons qu'une droite CD de longueur constante se meuve en conservant ses deux extrémités C et D, l'une sur une courbe fixe LL', l'autre sur le contour AB.

Considérons deux positions CE, C'D' infiniment voisines de la droite mobile; évaluons l'aire C'C' DD' engendrée par le mouvement de la droite quand elle passe de la première position à la seconde. Elle se compose de deux parties : l'une CC'ED est un parallélogramme engendré par la translation de la droite CD, qui l'amène à passer au point C'. L'autre est un triangle C'ED', engendré par la rotation de C'E autour du point C', rotation qui ramène l'extrémité E de la droite au point D' qu'elle doit définitivement occuper. Soit CD = L; appelons dh la distance des parallèles C'E, CD, et $d\alpha$ l'angle EC'D'. L'aire élémentaire $d\omega$ = CDD'C' aura pour mesure

$$d\omega = \mathrm{L}dh + \frac{1}{2}\mathrm{L}^2 d\alpha. \tag{1}$$

Supposons qu'on fixe sur CD, dans un plan perpendiculaire à cette droite, une roulette F, qui, dans le déplacement de la droite, roule sur le plan de la figure quand le point F se meut perpendiculairement à CD, et qui glisse au contraire sans tourner lorsque le point F se déplace dans la direction de CD. Un compteur porté

(1) Voir aussi dans les *Annales des ponts et chaussées*, année 1872, t. III, p. 223, la description des appareils de M. Marcel Deprez, donnant à volonté l'aire, le moment et le moment d'inertie des surfaces planes.

par l'instrument permet d'évaluer les arcs décrits par la roulette.

Soit $d\theta$ l'angle dont elle tourne autour de son axe en passant de la position F à la position F'; si R est son rayon, $Rd\theta$ est la longueur de l'arc qu'elle applique sur le plan du papier. Or cette longueur est égale à dh, dans le passage de la position F à la position G sur la droite C'E; la composante du glissement parallèle à la droite CD ne contribue pas, en effet, à faire tourner la roulette, et la rotation correspond exclusivement au déplacement normal, qui est égal à dh. Dans le second mouvement, qui amène le point G au point F', la roulette applique sur le papier un arc égal à $\lambda d\alpha$, λ étant la distance C'F' = CF. Donc

(2) $$Rd\theta = dh + \lambda d\alpha.$$

Entre les relations (1) et (2), éliminons dh; il viendra

(3) $$d\omega - RLd\theta = \left(\frac{1}{2}L^2 - \lambda L\right) d\alpha.$$

L'intégrale nous donne par conséquent

(4) $$\omega = RL\theta + \int \left(\frac{1}{2}L^2 - \lambda L\right) d\alpha.$$

Or, si l'on fait parcourir au point D tout le contour de la figure A, les éléments $d\omega$ étant pris positivement quand ils augmentent l'aire déjà balayée par la droite mobile, et négativement quand ils la diminuent, la somme algébrique $\int d\omega$ sera la différence entre les sommes positives et les sommes négatives, c'est-à-dire l'aire cherchée. Quant à $\int d\alpha$, c'est l'angle total décrit par la droite CD; c'est donc zéro si la droite CD est revenue à sa position primitive, sans avoir fait le tour entier du point C. Ceci suppose le point C extérieur à l'aire qu'on veut évaluer. Si, au contraire, le point C se mouvait intérieurement à l'aire AB, la droite CD ferait un tour entier pour revenir à sa position primitive, et alors $\int d\alpha$ serait égal à 2π. On aura donc, suivant les cas,

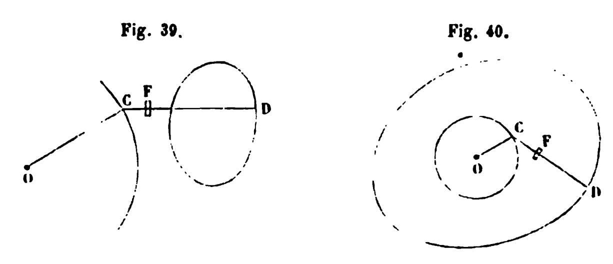
(5) $$\omega = RL\theta,$$

ou

(6) $$\omega = RL\theta + \left(\frac{1}{2}L^2 - \lambda L\right) \times 2\pi,$$

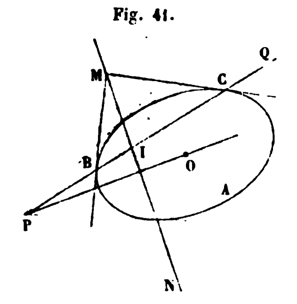
formules qui donnent la somme algébrique des aires comprises entre la courbe directrice LL′ et le contour donné.

M. Amsler prend, en général, pour courbe directrice un cercle décrit d'un point fixe comme centre, ce qui revient à attacher le point C à une tige rigide pivotant autour du point O. Dans ce cas, si le point O est intérieur au contour (*fig.* 40), il faut avoir soin d'ajouter à l'aire ω, donnée par l'équation (6), l'aire du cercle décrit par la branche OC de l'appareil.



RÉSUMÉ DE LA THÉORIE DES POLAIRES RÉCIPROQUES.

56. Étant donnés dans un plan un point P et une courbe du second ordre A, on appelle *polaire* du point par rapport à la courbe le lieu des points de rencontre M des deux tangentes MB, MC, menées à la courbe aux points B et C, où elle est coupée par une transversale quelconque PQ, menée par le point P (*fig.* 41 et 42).



Ce lieu est une droite MN, qui passe par les points de contact de la courbe avec les tangentes issues du point P.

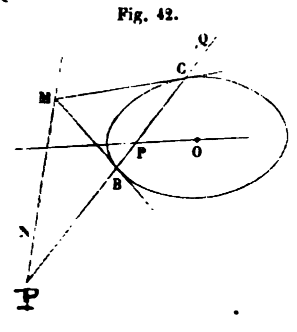
La droite MN et le diamètre PO, passant par le point P, sont parallèles à un système de diamètres conjugués de la courbe.

Le point P est appelé *Pôle* de la droite MN. — A chaque point P correspond une polaire; à toute droite MN correspond un pôle.

Les principales propriétés des pôles et polaires sont les suivantes :

1° Si l'on mène par le pôle P une transversale quelconque PQ, la courbe du second ordre, la polaire et le pôle la couperont en quatre points B, C, I, P, tels qu'on ait l'égalité

Fig. 42.



$$\frac{PB}{PC} = \frac{IB}{IC};$$

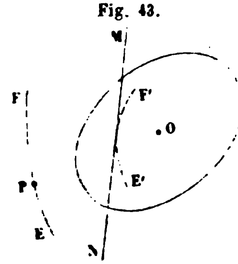
en d'autres termes, les points P et I seront *conjugués harmoniques* par rapport aux extrémités B et C de la corde BC.

2° Toute droite menée par un point P a pour pôle un point de la polaire du point P, et tout point pris sur une droite MN a pour polaire une droite passant par le pôle P de la droite MN.

Ces théorèmes sont très-faciles à démontrer pour le cercle; on peut les étendre ensuite aux courbes du second ordre par la méthode des projections coniques.

57. Supposons que le point P soit mobile, et qu'on lui fasse décrire une certaine courbe EF. A chaque position du point P correspondra une polaire particulière MN, et quand le point P décrira la courbe EF d'un mouvement continu, la droite MN enveloppera une courbe E'F', lieu des intersections de ses positions successives. Ces courbes EF, E'F', sont dites *polaires réciproques* par rapport à la courbe O; elles sont réciproques, parce que si l'on faisait décrire la courbe E'F' par un point mobile, la polaire de ce point envelopperait la courbe EF.

Fig. 43.



58. Si la courbe donnée est une ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

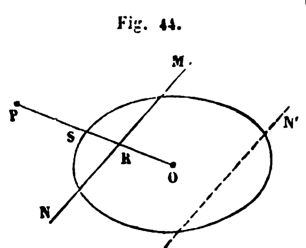
l'équation de la polaire correspondante à un point (X_1, Y_1) sera

$$\frac{X_1 x}{a^2} + \frac{Y_1 y}{b^2} = 1.$$

Si le point (X_1, Y_1) est pris sur la courbe elle-même, la polaire correspondante est la tangente à la courbe en ce point.

59. Rappelons enfin la propriété suivante: Si O est le centre d'une courbe du second ordre, P un point quelconque, et MN la polaire de ce point par rapport à la courbe, la droite PO coupe la courbe et la polaire en deux points S et R vérifiant l'égalité :

Fig. 44.



$$PO \times RO = \overline{OS}^2.$$

Si la courbe du second ordre n'a pas de centre, le point S est le milieu de la distance PR, comptée sur le diamètre mené par le point P.

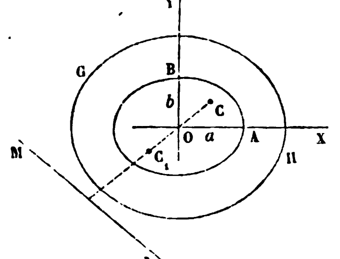
Ces propositions sont de simples corollaires des théorèmes que nous venons de rappeler.

60. On appelle *antipolaire* d'un point P par rapport à une courbe du second ordre, la droite M'N', symétrique de la polaire MN du point P, par rapport au centre de la courbe; le point P est l'*antipôle* de la droite M'N'.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES POLAIRES RÉCIPROQUES A LA RECHERCHE DU NOYAU CENTRAL D'UNE SECTION DONNÉE.

61. Nous supposons la section donnée, GH, limitée à un contour convexe. Soit O le centre de gravité, OX, OY la direction des axes principaux d'inertie de la section. L'équation de l'ellipse d'inertie AB sera

Fig. 45.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

a et b sont liés aux rayons de giration principaux par les relations

$$\rho_x a = \lambda^2 \quad \text{et} \quad \rho_y b = \lambda^2,$$

λ étant une longueur arbitraire, que nous prendrons égale à $\sqrt{\rho_x \rho_y}$, ou à $\sqrt{ab}$.

Soient X_1, Y_1, les coordonnées du point de passage C de la résultante P. La pression locale sera donnée par l'équation

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(\frac{X_1 x}{\rho^2_y} + \frac{Y_1 y}{\rho^2_x} + 1\right),$$

et la droite lieu des points pour lesquels la pression est nulle aura pour équation

$$\frac{X_1 x}{\rho^2_y} + \frac{Y_1 y}{\rho^2_x} + 1 = 0.$$

Remplaçons dans cette équation ρ_y, ρ_x par leurs valeurs $\frac{\lambda^2}{b}$, $\frac{\lambda^2}{a}$, puis disposons de l'arbitraire λ, comme nous l'avons dit tout à l'heure, de manière à avoir $\frac{\lambda^2}{b} = a$, ce qui donne aussi $\frac{\lambda^2}{a} = b$. L'équation

$$\frac{X_1 x}{\rho^2_y} + \frac{Y_1 y}{\rho^2_x} + 1 = 0$$

deviendra

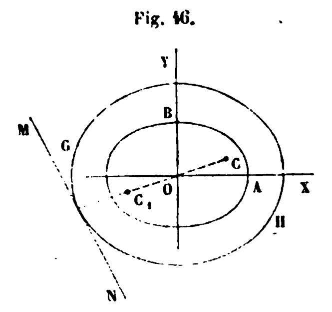
$$\frac{X_1 x}{a^2} + \frac{Y_1 y}{b^2} + 1 = 0.$$

Or cette équation représente, *dans l'ellipse particulière qui correspond à* $\lambda^2 = ab$, la polaire du point dont les coordonnées sont $-X_1$ et $-Y_1$, ou l'antipolaire du point d'application de la force P.

La droite le long de laquelle $R = 0$, correspondante au point de passage C de la force P, est donc l'antipolaire MN de ce point C par rapport à l'ellipse d'inertie.

Pour trouver le contour cherché G'H', on fera rouler une droite MN sur le contour GH de la section sans l'y laisser pénétrer, et on construira le lieu décrit par le point C, antipôle de la droite MN. Cela revient à construire d'abord le point C_1, pôle de la droite MN, et à construire ensuite le lieu du point C, symétrique de C_1 par rapport au point O. Le lieu du point C_1 est la *polaire réciproque* du contour GH; le lieu du point C, qui est le contour cherché, est par conséquent *l'antipolaire réciproque du contour de la section donnée.*

Fig. 46.



Si le contour GH est symétrique par rapport aux axes OX,OY, le lieu des points C_1 coïncidera avec son symétrique. C'est ce qui arrive pour le losange, le rectangle, le cercle ou l'ellipse.

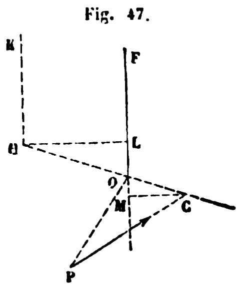
Ainsi se trouvent justifiées les règles posées au § 40 pour le tracé du contour G'H'.

ANALOGIE AVEC LA THÉORIE DES CENTRES DE PERCUSSION.

62. On sait que lorsqu'un corps solide libre reçoit une percussion P, dirigée suivant une droite PC quelconque, son mouvement initial comprend :

1° Une translation générale, dont la vitesse est parallèle à la percussion P, et est égale à $\frac{P}{M}$, M étant la masse totale du corps;

Fig. 47.



2° Une rotation autour d'une droite OF passant par le centre de gravité O; cette droite est, dans l'ellipsoïde central d'inertie, le diamètre conjugué du plan POC, conduit par le centre de gravité O et la direction de la force P.

Supposons que les droites PC et OF soient rectangulaires.

Les deux mouvements élémentaires du solide peuvent alors se composer en un seul; pour cela, menons par la droite OF un plan FOC perpendiculaire à la percussion P, ou à la vitesse de translation; les deux plans FOC, OPC, se coupent suivant une droite OC; prolongeons cette droite, et cherchons sur son prolongement un point H qui reste immobile lorsqu'on lui fait subir à la fois les deux mouvements élémentaires communiqués au système. Si v est la vitesse de translation, et ω la vitesse angulaire de rotation autour de OF, on voit que le point H sera défini par l'équation

$$v = \omega \times \mathrm{HL},$$

L étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point H sur l'axe OF.

Du point C abaissons CM perpendiculaire sur OF, et appelons MK^2 le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe OF; nous aurons, en prenant les moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe OF,

$$\omega = \frac{\mathrm{P} \times \mathrm{MC}}{\mathrm{MK}^2}.$$

Mais

$$v = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}},$$

donc

$$\omega = v \times \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{K}^2},$$

et par conséquent $\mathrm{HL} \times \mathrm{MC} = \mathrm{K}^2$, ou encore

$$\mathrm{HO} \times \mathrm{OC} \times \sin^2 \mathrm{FOC} = \mathrm{K},$$

relation géométrique qui lie les points conjugués H et C.

La droite HK est l'axe autour duquel le solide *commence à tourner*, comme si cet axe était fixe; le point C, qui lui correspond, est appelé le *centre de percussion* du corps par rapport à cet axe. Si l'axe HK était réellement fixe, la percussion P, appliquée au point C, perpendiculairement au plan HCK, ne produirait sur l'axe HK aucune pression, car le mouvement naturel du corps serait, dans les premiers instants, une rotation autour de cette droite HK.

L'ellipsoïde d'inertie est coupé par le plan KHC (fig. 46) suivant une ellipse ABA'B' (fig. 47), dans laquelle les droites OF, OC, forment un système de diamètres conjugués.

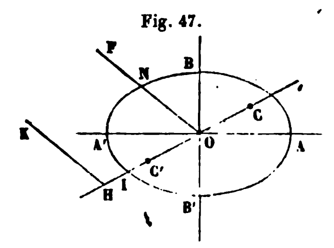


Fig. 47.

63. Cela étant, revenons à la distribution des pressions dans l'étendue d'une section donnée; l'équation de la ligne pour laquelle on a $R = p$ est

$$\frac{X_1 x}{\rho^2_y} + \frac{Y_1 y}{\rho^2_x} + 1 = 0.$$

Elle est, dans l'ellipse centrale (fig. 47), parallèle au diamètre OF conjugué de la droite OC.

Soit HK cette droite.

Nous pouvons regarder la section donnée comme un solide infiniment mince, ayant une masse égale à l'unité pour chaque unité de surface; l'ellipsoïde d'inertie correspondant à ce système invariable a pour plan principal le plan de la section, et si l'on applique au point C une percussion P normale à ce plan, la direction P sera bien perpendiculaire au diamètre OF conjugué du plan OPC dans l'ellipsoïde d'inertie. Prenons encore pour cette ellipse centrale l'ellipse particulière dans laquelle le demi-axe $OA = \rho_y$, et le demi-axe $OB = \rho_x$; la droite HK est alors la polaire du point C', symétrique du point C, et le produit $HO \times OC'$, ou $HO \times OC$, est égal à $\overline{OI}^2$.

Multipliant par $\sin^2 FOC$, il vient

$$HO \times OC \times \sin^2 FOC = \overline{OI}^2 \times \sin^2 FOC.$$

Mais (§ 51) $OI \times \sin FOC$, distance du point I de l'ellipse à la direction OF du diamètre conjugué de OI, est égal au rayon de giration K de la surface par rapport à OF.

Donc

$$OI \times \sin FOC = K,$$

et par suite

$$HO \times OG \times \sin^2 FOC = K^2,$$

relation qui lie la position de l'axe HK à celle du centre de pression correspondant.

Le point C est donc le centre de percussion de la section donnée par rapport à la droite HK, pour laquelle la pression est nulle.

On reconnaîtrait facilement aussi que le point C est le *centre de pression* de la paroi plane formée par la section donnée, si on la suppose baignée par un liquide homogène pesant, dont la surface libre passe par la droite HK.

CHAPITRE V.

RÉPARTITION DES PRESSIONS SUR LES SECTIONS HORIZONTALES D'UN SOLIDE QUI NE PEUT RÉSISTER A AUCUN EFFORT D'EXTENSION (MASSIF DE MAÇONNERIE).

64. Nous avons vu (§ 35) que, pour un massif de cette nature, l'hypothèse qu'on doit adopter consiste à admettre que les pressions locales sont en chaque point, ou nulles, ou représentées par les ordonnées positives d'un plan $R = Ax + By + C$. La fonction R ne peut plus être alors donnée par une seule et même expression analytique.

Supposons donc la force P appliquée en dehors du contour-limite qui correspond aux pressions positives (§ 45). Pour trouver les valeurs de A, B, C, il faudra reprendre les équations (5), (6) et (7) du § 32, dans lesquelles les intégrales doubles seront étendues seulement à la portion de la section qui se termine à la droite $Ax + By + C = 0$.

Il résulte de là que les inconnues A,B,C entrent non-seulement dans les coefficients des équations (5) (6) et (7), mais encore dans les limites des intégrales indiquées. Aussi le problème est-il beaucoup plus complexe, et conduit-il, dans la plupart des cas, à poser des équations transcendantes qu'on ne sait résoudre que par tâtonnements.

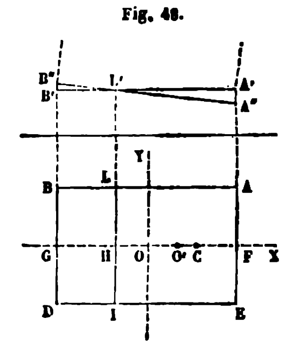
Nous traiterons d'abord le problème pour la section rectangulaire, lorsque la force P passe en un point C de l'une des médianes FG. C'est le cas qui se présente le plus fréquemment dans les applications (1).

Soit O le centre de gravité du rectangle, au milieu de la médiane FG.

Soient $OC = p$, et $AB = 2a$.

Si p est moindre que $\frac{a}{3}$, la section entière subira une compression.

Fig. 48.



Si $p = \frac{a}{3}$, il en sera encore de même, mais la compression sur l'arête BD sera nulle; le point C est alors au tiers de la médiane GF.

Si enfin $p > \frac{a}{3}$ la formule $R = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{3px}{a^2}\right)$ donnerait sur l'arête BD une compression négative, ou une tension, résultat que nous supposons inadmissible.

Posons

$$FC = q = a - p;$$

$$p \text{ étant } > \frac{a}{3}, \quad q \text{ sera } < \frac{2a}{3}.$$

(1) On s'exposerait à de graves erreurs, en voulant traiter cette question au moyen du *principe de la superposition des effets des forces*. Ce principe n'est applicable qu'aux systèmes élastiques, où l'effet d'une force est proportionnel à cette force, et change de sens en même temps qu'elle. Ici, au contraire, l'effet n'est produit que dans un seul sens, et il est constamment nul pour le sens contraire. La proportionnalité entre la force et l'effet n'est donc plus vraie d'une manière absolue.

Prenons sur la médiane, à partir du point F, une longueur FH = FC $\times$ 3 = $3q$, et par le point H menons la droite IL, parallèle au côté AE du rectangle. Supposons actuellement qu'on supprime la portion BLID de la section donnée, de manière à la réduire au rectangle AEIL. Ce nouveau rectangle, traité à part, est sollicité par la force P en un point C, qui est, par construction, au tiers de sa médiane FH. Donc les formules appliquées à ce rectangle donneront sur l'arête IL une pression nulle, et en tous les autres points une pression positive. La région supprimée ILBD n'intervenant pour rien dans le développement des forces moléculaires qui équilibrent la force P, ne subit en aucun point ni tension, ni pression.

La solution du problème consiste par conséquent à construire un rectangle ayant pour côté $3q$, et à appliquer la formule à ce rectangle réduit, sans s'occuper de la portion retranchée.

Le rectangle réduit a pour centre de gravité le point O', milieu de HF, et la quantité p à introduire dans la formule de répartition est maintenant O'C. Or

$$O'C = O'F - FC = \frac{3q}{2} - q = \frac{1}{2}q.$$

Le demi-côté du rectangle AL est égal à $\frac{3}{2}q$, et c'est cette quantité qui doit remplacer a.

La section de ce rectangle est

$$3q \times 2b = 6bq,$$

et enfin, en comptant les x à partir du point O', la répartition des pressions sera donnée par l'équation

$$R = \frac{6bq}{P}\left(1 + \frac{\frac{3}{2}qx}{\left(\frac{3}{2}q\right)^2}\right) = \frac{6bq}{P}\left(1 + \frac{2x}{3q}\right).$$

Si on fait $x = \frac{3}{2} q$, on a $R = \frac{P}{6bq} \times 2$; c'est le maximum de la pression sur l'arête AE la plus voisine de la force, maximum égal au double de la pression moyenne; et $x = -\frac{3}{2} q$ donne $R = 0$, pour l'arête fictive IL. La formule ne doit pas être étendue à des abscisses négatives plus grandes en valeur absolue que $\frac{3}{2} q$.

La déformation du solide s'opère alors seulement sur la région ALIE; la partie située au-dessus du plan de la section tourne, par suite de la déformation, autour de la droite IL, et les joints du massif s'ouvrent dans l'intervalle des deux droites IL et BD.

Cet effet est rendu sensible dans les voûtes, par les lézardes qui se produisent souvent à travers les tympans, aux environs du joint de rupture, c'est-à-dire aux environs du point où la pression mutuelle des voussoirs se rapproche le plus de la courbe d'intrados.

65. Nous résumerons comme il suit les règles à suivre pour trouver la pression en un point quelconque d'une section rectangulaire dans un massif en maçonnerie, lorsque la force P est contenue dans le plan de symétrie FG du massif.

Soit C le point de passage de la force P. On mesurera la distance FC du point C à la plus voisine des deux arêtes AE, BD.

Fig. 49.

On prendra le triple de cette distance.

1° Si 3FC est égal ou supérieur à FG, toute la section est comprimée; la pression moyenne est donc égale à $\frac{P}{AB \times AE}$, et la pression maximum, qui a lieu dans tous les cas sur l'arête AE, est au plus égale au double de la pression moyenne.

2° Si 3FC est inférieur à FG, on prendra FH = 3FC, et on ne tiendra compte que du rectangle limité à la droite IL. La pression moyenne est alors égale à

$$\frac{P}{FH \times AE} = \frac{P}{3 \times FC \times AE},$$

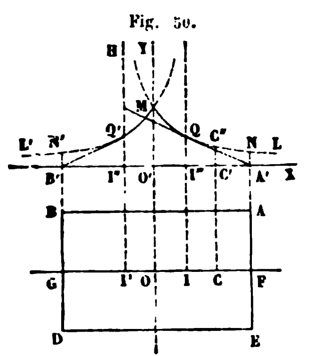
et le maximum de la pression, ou la pression sur l'arête AE, est double de la pression moyenne, ou égale à $\frac{2}{3}\times\frac{P}{FC\times AE}$.

La solution est donc complète. On a pu la trouver sans difficulté, parce que la droite IL, qui limite la zone à retrancher de la section, laisse à la section sa forme de rectangle, de sorte qu'on connaît d'avance la formule à employer.

On peut remarquer que la dimension AE du rectangle n'influe pas sur la détermination de la droite limite IL. Les résultats obtenus pour le rectangle peuvent donc s'appliquer sans modification à un mur droit indéfini dans le sens AE, dans la longueur duquel les forces seraient uniformément distribuées. Pour faire la recherche des pressions locales, il suffirait de couper le mur par deux plans perpendiculaires à sa direction, et écartés l'un de l'autre d'une quantité arbitraire, par exemple, de l'unité de longueur. Les forces P doivent être alors rapportées à cette même unité de longueur, et les formules du rectangle sont applicables en y faisant AE = 1.

66. Problème. Trouver la valeur à assigner à la force P, appliquée en un point C pris sur la médiane GF du rectangle ABDE, pour que l'arête la plus chargée supporte une pression donnée, de R unités de poids par unité de surface.

Fig. 50.



Nous avons traité dans le § 44 un problème analogue pour les sections où les efforts développés peuvent être positifs ou négatifs; la solution est donnée dans ce cas par l'arc MNL d'une hyperbole, asymptote à l'axe O'X ainsi qu'à la droite I''H, menée perpendiculairement à la section par le point I' au tiers de la médiane. Les ordonnées de cette hyperbole donnent, pour chaque point C situé à droite du point O, la valeur convenable C'C'' de la pression P qui produit sur l'arête AE la charge R par unité de surface. Au point O la force P

est égale à $RQ = MO'$; au point F, elle est égale à $A'N = \frac{1}{4} MO'$; au point I, tiers de la médiane FG, elle est égale à $I'''Q = \frac{1}{2} MO'$. La courbe MQ'L', symétrique par rapport à MO', donne les mêmes indications relativement aux positions du point C à gauche du centre O.

Cela posé, tant que le point C reste compris entre les points I et I', c'est-à-dire dans le tiers central de la médiane, la surface entière du rectangle est comprimée, et les arcs d'hyperbole MQ et MQ' résolvent encore la question, comme si la section pouvait développer des efforts négatifs. La solution ne doit être modifiée que pour les régions IF, I'G en dehors du tiers central. Prenons donc un point C entre I et F. La pression produite par la force P appliquée en ce point s'étend à une surface ayant pour largeur AE, et pour longueur le triple de CF; la pression moyenne est alors

$$\frac{P}{3AE \times CF};$$

la pression maximum, laquelle s'exerce sur l'arête AE, est double de la pression moyenne, c'est-à-dire est égale à

$$\frac{2P}{3AE \times CF}.$$

L'équation du problème est donc, pour cette région,

$$\frac{2P}{3AE \times CF} = R,$$

ou bien

$$\frac{P}{CF} = \frac{3}{2} R \times AE,$$

quantité constante.

Cette équation représente une droite qui, projetée sur le plan vertical, passe par les points A′ et Q. Il faudra donc substituer la droite QA′ à l'arc indéfini QNL d'hyperbole. La droite QA′ prolongée jusqu'à la seconde asymptote l″H de l'hyperbole MQL, est coupée au point Q en deux parties égales : elle est donc tangente à l'hyperbole en ce point. La modification à apporter au tracé de la courbe dont les ordonnées représentent les valeurs successives de la force P consiste, en résumé, à prolonger les arcs MQ, MQ′ par des droites QA′, Q′B′, tangentes à ces arcs aux points Q et Q′ (1).

RÉPARTITION DES PRESSIONS DANS LE CERCLE QUAND ON N'ADMET PAS DE PRESSIONS NÉGATIVES.

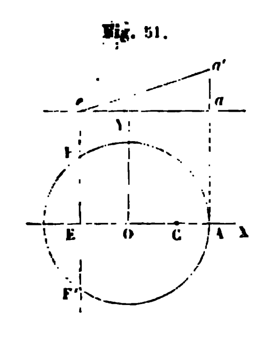


Fig. 51.

67. Soit OA = 1 le rayon du cercle donné; OC = p, la distance du centre au point d'application de la force P, distance supérieure à $\frac{1}{4}$ OA, pour que la force soit en dehors du noyau central.

Supposons que la portion pressée de la section se termine à la droite FF′, perpendiculaire à la droite OC à cause de la symétrie.

Soit OE = a.

Prenons pour axes la droite OC prolongée et la perpendiculaire OY. L'équation de la répartition sera

$$R = A(x + a), \text{ à droite de FF}',$$

et

$$R = 0, \text{ à gauche.}$$

Les quantités A et a sont inconnues. Pour les déterminer, on a les deux équations des forces et des moments, savoir,

$$\int 2Ry\,dx = P \quad \text{et} \quad \int 2Ryx\,dx = Pp;$$

(1) V. *Annales des ponts et chaussées*, 1867; Mémoire de M. Alfred Durand-Claye sur la stabilité des voûtes.

ces intégrales doivent être prises entre les limites $x = -a$ et $x = +1$.

Substituant, il vient

$$2A\left(\int_{-a}^{+1} xydx + a\int_{-a}^{+1} ydx\right) = P,$$

$$2A\left(\int_{-a}^{+1} x^2ydx + a\int_{-a}^{+1} xydx\right) = Pp.$$

Pour faire les intégrations, il convient de changer de variable.

Faisons $x = \cos\theta$; il en résulte $y = \sin\theta$, $dx = -\sin\theta d\theta$. La droite-limite FF′ sera définie par une valeur θ' de l'angle θ, et l'on aura $a = -\cos\theta'$. Les équations précédentes deviennent donc, en observant que la limite inférieure correspond à $\theta = \theta'$ et la supérieure à $\theta = 0$,

$$2A\left[\int_{\theta'}^{0}(-\cos\theta\sin^2\theta d\theta) - \cos\theta'\int_{\theta'}^{0}(-\sin^2\theta d\theta)\right] = P,$$

$$2A\int_{\theta'}^{0}(-\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta) - \cos\theta'\int_{\theta'}^{0}(-\cos\theta\sin^2\theta d\theta) = Pp;$$

ou bien, en changeant l'ordre des limites et le signe des intégrales,

$$2A\left(\int_{0}^{\theta'}\sin^2\theta\cos\theta d\theta - \cos\theta'\int_{0}^{\theta'}\sin^2\theta d\theta\right) = P,$$

$$2A\left(\int_{0}^{\theta'}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta - \cos\theta'\int_{0}^{\theta'}\sin^2\theta\cos\theta d\theta\right) = Pp.$$

Les quadratures indiquées se font aisément, et donnent

$$\int_{0}^{\theta'}\sin^2\theta d\theta = \int_{0}^{\theta'}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{\theta'}{2} - \frac{\sin 2\theta'}{4},$$

$$\int_{0}^{\theta'}\sin^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sin^3\theta'}{3},$$

$$\int_{0}^{\theta'}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \int_{0}^{\theta'}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta d\theta = \frac{1}{8}\int_{0}^{\theta'}\sin^2 2\theta d(2\theta) = \frac{1}{8}\left(\theta' - \frac{\sin 4\theta'}{4}\right).$$

Substituons dans les deux équations, puis divisons l'une par l'autre; A s'élimine, et il vient pour déterminer θ' l'équation

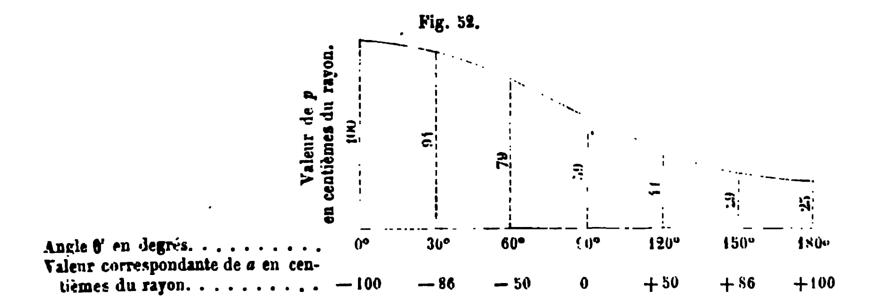
$$\frac{\frac{\theta'}{8} - \frac{\sin 4\theta'}{32} - \cos\theta' \frac{\sin^3\theta'}{3}}{\frac{\sin^3\theta'}{3} - \cos\theta' \left(\frac{\theta'}{2} - \frac{\sin 2\theta'}{4}\right)} = p.$$

C'est une équation transcendante qu'on ne peut résoudre que par tâtonnement.

On sait d'avance que $p = \frac{1}{4}$ donne $\theta' = \pi$, tout le cercle subissant alors une pression. On voit aussi que $p = 1$ donne $\theta' = 0$, la région utile se réduisant à zéro quand la force P passe en un point du périmètre du cercle.

Pour rendre les calculs plus simples, on pourra remplacer $\sin^3\theta'$ par $\frac{1}{4}\sin 3\theta - \frac{3}{4}\sin\theta$. On obtient facilement le tracé de la courbe suivante, dont les ordonnées p correspondent aux abscisses θ' :

Fig. 52.



Connaissant θ' ou a en fonction de p, on déterminera A par l'équation des forces,

$$A = \frac{\frac{1}{2}P}{\frac{\sin^3\theta'}{3} - \cos\theta' \left(\frac{\theta'}{2} - \frac{\sin 2\theta'}{4}\right)},$$

et on aura tout ce qu'il faut pour définir le plan ed', dont les ordonnées représentent en chaque point les pressions R par unité de surface.

Même problème pour une section triangulaire isocèle, pressée en un point de sa hauteur.

68. Soit ABB′ la section donnée, présentant la forme d'un triangle isoscèle.

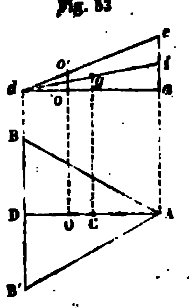


Fig. 53

Cherchons la position qu'il faut donner au point de passage, C, de la force P sur la hauteur AD, pour que la base BB′ soit la ligne de pression nulle.

Soit, en élévation, *da* la trace du plan de la base; la trace du plan représentatif des pressions locales sera une droite *de* quelconque, menée par le point *d*. La force P doit passer par le centre de gravité *g* du volume compris entre la base ABB′, le plan *de*, et les plans latéraux AB, AB′, élevés perpendiculairement à la base. Ce volume est un tétraèdre, et son centre de gravité est le milieu de la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées. Prenons pour arêtes la droite (A, *ae*) et la droite (BB′, *d*). La droite *di* joint en projection verticale le point (D, *d*) au milieu *i* de l'arête *ae*; son point milieu, *g*, est la projection verticale du centre de gravité, et, par conséquent, il suffira de projeter le point *g* sur la hauteur DA pour avoir le point de passage C de la force P correspondante.

De cette construction résulte que C est le milieu de AD. Le centre de gravité O de la section est au tiers de AD à partir du point D; la distance OC est le sixième de la longueur AD.

La pression moyenne $\frac{P}{\Omega}$ est celle qui a lieu au point O; elle est représentée sur l'élévation par *oo′*. Donc la pression maximum a lieu au sommet A, et elle est égale à $\frac{3P}{\Omega}$.

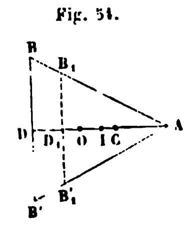


Fig. 54.

Si le point de passage C est compris entre le point A et le milieu I de la hauteur AD, la section entière n'est pas pressée, et pour

avoir la limite qui sépare les pressions positives des pressions nulles, il suffira de prendre $CD_1 = CA$, et de mener $B_1B'_1$ par le point D_1 perpendiculairement à AD_1. La pression maximum sera égale à $\frac{3P}{\text{surf. } AB_1B'_1}$.

INDICATION D'UNE OBJECTION FAITE CONTRE LES HYPOTHÈSES QUI SERVENT DE BASE A LA SOLUTION GÉNÉRALE.

69. Soit (fig. 55) ABCD un massif pesant, de forme prismatique, ayant pour base AB un rectangle, et dans lequel les masses sont distribuées de telle sorte, que la résultante P des forces verticales passe au point E, au tiers de la dimension AB. Ce massif porte sur le sol MN.

Fig. 55.

Supposons de plus que la dimension de la base perpendiculaire au plan de la figure soit égale à l'unité de longueur.

La pression moyenne sur la base sera donnée par l'expression $\frac{P}{AB}$, et la pression sur l'arête B la plus chargée, sera double de la pression moyenne, ou égale à $\frac{2P}{AB}$.

Considérons le même massif ABCD (fig. 56); mais imaginons que, sans modifier sensiblement les poids, on refouille la base sur le tiers AF de sa largeur, de manière que la partie portante de la base soit limitée à la région FB, et que la région AF ne soit plus en contact avec le sol. La base effective sera réduite à la dimension FB; la pression moyenne sera donc égale à $\frac{P}{FB}$, et comme le point E tombe au centre de gravité de la nouvelle base, les pressions locales y

Fig. 56.

seront uniformément réparties. La modification opérée sur le massif a ainsi pour résultat de réduire la surface de la base, et d'augmenter la pression moyenne, mais en même temps de rendre égales les pressions en tous les points de la nouvelle base, de sorte que la pression n'est nulle part supérieure à $\frac{P}{FB}$ ou à $\frac{3P}{2 \times AB}$, tandis que dans le premier cas elle atteignait $\frac{2P}{AB}$ sur l'arête B.

La réduction de la base entraîne donc comme conséquence une diminution de la pression maximum. La matière est mieux employée, d'après les formules, dans le second cas que dans le premier.

Certains auteurs regardent ce résultat comme paradoxal : le massif ayant une plus grande base dans la figure 55 que dans la figure 56, ils trouvent contradictoire d'admettre que la matière soit dans de meilleures conditions dans la seconde figure que dans la première.

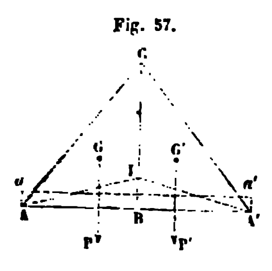
Nous ne partageons point cette opinion. L'étendue des surfaces n'est une garantie de résistance que lorsque la répartition des pressions y est à peu près égale. Une plus grande surface peut donc être dans de moins bonnes conditions qu'une moindre, si la moindre surface est plus également pressée que la plus grande.

On a un exemple frappant de cette influence de l'inégalité des pressions, dans les enveloppes de chaudières ; lorsqu'elles ont une grande épaisseur, elles tendent à se déchirer sous une moindre pression intérieure qu'une chaudière de même diamètre et d'épaisseur plus petite, parce que l'inégalité des pressions développées dans le métal est d'autant plus grande que l'épaisseur est plus grande par rapport au diamètre.

La remarque donnée comme une objection aux principes hypothétiques de la théorie ne suffit donc pas pour renverser ces principes ; mais elle montre par un exemple simple que l'intelligence des dispositions est pour les ouvrages une meilleure garantie de résistance que l'exagération des dimensions, ce qui est confirmé par l'expérience de tous les constructeurs.

70. *Autre objection.* — Dupuit, dans son *Traité de l'équilibre et de la stabilité des voûtes*, indique l'objection suivante à l'hypothèse de la répartition des pressions suivant la loi linéaire $R = Ax + By + C$.

Fig. 57.



Sur une base rectangulaire AB on élève un massif auquel on donne en élévation la forme ABC d'un triangle rectangle en B. Le poids P du massif est appliqué en son centre de gravité G. Les pressions se répartissent sur la base AB suivant la loi connue : la pression est nulle sur l'arête A; elle est maximum sur l'arête B, et double de la pression moyenne $\frac{P}{\Omega}$.

Cela fait, on élève un massif A'BC, symétrique du premier par rapport au plan CB, de telle sorte que ces deux massifs se joignent exactement suivant le plan BC, et qu'ils ne forment qu'un seul et même massif.

Si l'on prend le massif A'BC à part, les pressions se répartissent sur le rectangle A'B comme sur le rectangle AB. En A', on a une pression nulle, et en B une pression double de la pression moyenne; la répartition sur la base totale AA' est donc représentée par les ordonnées du contour polygonal AIA', dans lequel $IB = \frac{2P}{\Omega}$.

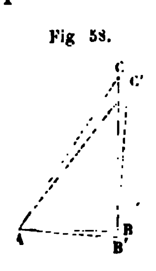
Si, au contraire, on considère les deux massifs réunis en un seul, le poids 2P passe par le centre de gravité B de la base totale AA', et par suite la pression est également répartie; de sorte que la ligne représentative des pressions est une parallèle aa' à la base, menée à la distance $Aa = \frac{P}{\Omega}$.

L'hypothèse du plan conduirait ainsi, suivant la manière de considérer le problème, à une solution ou à une autre.

Nous ferons remarquer que l'hypothèse de la construction après coup d'un massif A'BC faisant corps avec le massif ABC, de manière à réaliser les conditions d'homogénéité du massif total AA'C, construit

par assises, est tout à fait inadmissible. Pour nous en assurer, imaginons qu'on ait construit le premier massif ABC sur un terrain compressible, dont le tassement soit en chaque point proportionnel à la pression qu'il subit. Sous l'influence de ce tassement, le massif prendra une certaine inclinaison vers la droite, et occupera la position déviée AB'C', par rotation autour de l'arête A. Il en serait de même du second massif A'BC considéré seul; il tendrait à prendre, s'il était isolé, une inclinaison vers la gauche par rotation autour de l'arête A'. Pour ramener ces deux massifs à l'état où ils seraient s'ils avaient été construits ensemble, il faudrait rapprocher les faces voisines, et les ramener à la position verticale, en détruisant leur inclinaison; les pressions mutuelles développées entre ces deux faces, pendant l'opération du rapprochement, auraient pour effet de faire tourner les deux triangles en sens contraire des tassements primitifs, c'est-à-dire d'augmenter les pressions sur les arêtes éloignées A et A', et de les diminuer sur les arêtes contiguës B. Il est rare que dans les constructions on développe ainsi après coup des efforts correctifs de cette nature. On peut donc admettre que l'hypothèse de Dupuit donne deux massifs juxtaposés, au lieu d'un massif homogène; en définitive, la contradiction signalée n'existe pas, car deux propositions ne peuvent être contradictoires que si elles ont rapport à un seul et même objet.

Fig. 53.



L'exemple n'en est pas moins bon pour faire voir, qu'en matière de construction, il y a lieu de tenir grand compte des procédés employés pour obtenir les systèmes matériels soumis aux calculs, de même qu'en dynamique la solution des problèmes dépend des circonstances initiales.

EXEMPLE DE L'EMPLOI DES MAÇONNERIES POUR RÉSISTER A UNE TENSION.

71. En général, on doit éviter d'exposer un massif en maçonnerie à des tractions qui tendent à séparer les pierres, à ouvrir les joints, et qui sont équilibrées seulement par la résistance des mortiers. Cependant l'emploi des mortiers de ciment permet, jusqu'à un certain point, de former des massifs capables de résister à des tensions. Le renchérissement des fontes (1873) a amené, par exemple, la ville de Paris à exécuter en maçonnerie des tuyaux de grands diamètres, où l'on admet l'eau sous des pressions qui peuvent s'élever jusqu'à la limite de 10 mètres au maximum. Tantôt le tube est fait en maçonnerie de meulière et ciment, tantôt en béton de ciment moulé sur place. La haute température dégagée pendant la prise des matières équivaut, pour ainsi dire, à une cuisson, et transforme le tube de maçonnerie en une sorte de tuyau de poterie, capable de résister sans se disjoindre à un effort intérieur modéré.

Les fortes épaisseurs nécessaires pour ce genre de tuyaux entraînent une grande inégalité dans la répartition des tensions. Cette inégalité s'accuse de plus en plus à mesure que l'épaisseur augmente, et ne permettrait pas d'étendre indéfiniment cette solution à des charges extérieures quelconques.

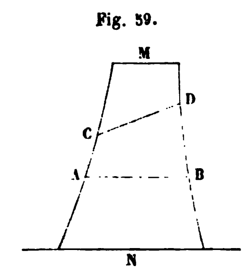
DIRECTION A DONNER AUX JOINTS DANS UN MASSIF EN MAÇONNERIE.

72. Reportons-nous au problème général de la répartition des pressions dans un massif pesant.

Les sections horizontales AB, que nous avons considérées dans le solide MN, peuvent être des sections idéales ou des plans de joint effectifs. Dans un massif de maçonnerie soumis seulement à des actions verticales, les plans de joint doivent être horizontaux. Si

en effet on les dirigeait sous une certaine inclinaison CD, le poids de la partie MCD du massif tendrait à faire glisser cette partie le long du plan CD; le frottement est la seule résistance qui puisse s'opposer à cet effort, et le glissement se produirait dès que le plan CD ferait avec l'horizon un angle un peu plus grand que l'angle du frottement de pierre sur pierre. Cette tendance au glissement n'existe pas lorsque les joints sont horizontaux. Plus généralement, dans un massif soumis à des forces quelconques, on doit, autant que possible, diriger les joints perpendiculairement aux résultantes P des réactions mutuelles des parties voisines, et, sinon, leur faire faire avec ces résultantes des angles aussi peu différents de l'angle droit qu'on le pourra. La limite extrême inférieure de ces angles est le complément de l'angle du frottement.

Fig. 59.



Si le massif est exposé à des ébranlements, on devra adopter pour angle du frottement celui qui est relatif aux corps en mouvement, et qui est un peu moindre que celui qui s'applique aux corps en repos. Cette règle est suivie dans les constructions du génie militaire, qui ont à subir pendant les siéges les ébranlements causés par le tir du canon.

Un plan de joint fictif, au contraire, peut être dirigé comme on voudra. Nous pouvons imaginer qu'on coupe le massif par un plan CD complétement arbitraire; il faudra encore que l'équilibre existe entre les forces sollicitant la partie MCD, et les forces moléculaires développées dans le plan sécant. Le poids de la partie MDC tend, comme tout à l'heure, à faire glisser cette partie le long de la section; mais si ce plan n'est pas une surface de séparation réelle des assises du massif, la résistance au glissement n'est plus seulement le frottement mutuel des deux parties en contact, c'est aussi la cohésion des matériaux, force avec laquelle le frottement ne saurait être confondu. En effet, le frottement entre solides est proportionnel à la pression qui s'exerce entre les corps en contact, et indépendant des surfaces sur lesquelles cette pression est répartie;

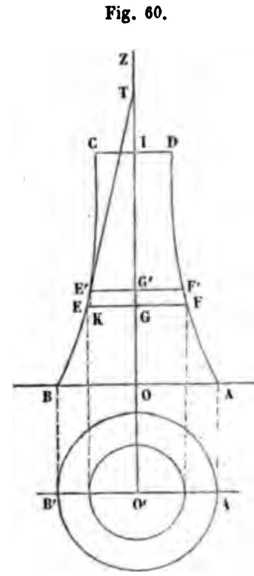
au contraire, la cohésion entre deux parties d'un même solide est proportionnelle à l'étendue de la surface de jonction de ces deux parties, et elle paraît indépendante de la pression. Cette distinction entre les deux forces permet d'apprécier la véritable influence de la direction des plans de joint sur l'équilibre intérieur d'un massif. Les plans de joint menés à travers un massif supposé primitivement continu sont des surfaces suivant lesquelles on supprime la cohésion naturelle des matériaux pour ne laisser subsister que leur frottement mutuel. On comprend d'après cette remarque que le tracé des surfaces de joint réelles n'est pas indifférent, qu'il peut modifier l'équilibre moléculaire d'un massif en maçonnerie, et que dans certains cas un tracé défectueux peut compromettre la stabilité des ouvrages. L'introduction des mortiers et des ciments dans les joints a, il est vrai, pour effet de créer une sorte de cohésion artificielle entre les assises; mais cette liaison ne se produit qu'au bout d'un certain temps, et il serait imprudent d'y compter d'une manière absolue. Le mortier donne un surcroît de résistance, répartit les pressions avec plus d'égalité, et empêche les porte-à-faux; néanmoins un ouvrage en maçonnerie est mal construit si l'équilibre n'est pas assuré par la coupe même des pierres. On jugera de l'influence des mortiers sur la stabilité d'un massif en observant ce qui se passe quand on décintre une voûte. Lorsqu'elle est bien construite et qu'elle est restée longtemps sur son cintre, elle n'éprouve au décintrement aucun tassement appréciable, tandis que la même voûte, décintrée aussitôt après qu'elle est terminée, subit une déformation qui porte tout entière sur le mortier contenu dans les joints.

Nous aurons à revenir, du reste, sur ces principes, dans la partie du cours consacrée à l'équilibre des maçonneries soumises à des efforts transversaux, telles que les pieds-droits des voûtes et les murs de soutenement.

TOUR RONDE D'ÉGALE RÉSISTANCE (1).

73. On propose de trouver la forme à donner au méridien AD d'une tour pleine ABCD, pour que la pression développée dans cette tour soit la même en tous les points. Pour que le problème soit possible, il faut admettre que le haut de la tour, CD, porte une surcharge donnée N, également répartie sur le plan du cercle projeté suivant CD.

Fig. 60.



Prenons pour axes les droites OZ, OB; sur la première, nous compterons les abscisses z des différents points E du méridien cherché, et parallèlement à OB, nous compterons les ordonnées $EG = r$, rayons des parallèles engendrées par les points E sur la surface de révolution.

La hauteur de la tour OI est une donnée de la question. Nous la représenterons par la lettre h. Soit R la pression de la matière par unité de surface, et p le poids spécifique des matériaux.

Menons un plan horizontal EF, défini par son abscisse z. Ce plan supporte tout le poids de la partie du massif située au-dessus de lui, et en outre la surcharge N. Si l'on divise cette charge totale par πr^2, on aura la pression moyenne dans la section EF; elle est la même en tous les points de cette section, puisque la résultante des actions exercées sur le solide CDFE passe par le centre de gravité G de cette section, et elle doit être égale à la pression donnée, R.

L'équation du méridien cherché est donc

$$R = \frac{N + p\,\text{vol.}(CDEF)}{\pi r^2},$$

(1) Poncelet, *Introduction à la Mécanique industrielle*, p. 368.

ou bien

$$\pi r^2 R = N + p \text{ vol. (CDEF)}.$$

Différentions cette équation, et observons que, quand la variable z s'accroît de sa différentielle $dz = GG'$, le volume indiqué diminue de la tranche comprise entre les plans EF, E'F', laquelle a pour mesure $dz \times \pi r^2$; la différentiation donne ainsi

$$2\pi r R dr = -p \times \pi r^2 dz,$$

équation dans laquelle les variables se séparent ; écartant la solution idéale $r = 0$, il vient pour l'équation différentielle du méridien cherché

$$\frac{dr}{r} = -\frac{p}{2R} dz.$$

Intégrant, nous avons l'équation en termes finis

$$\log \text{nép.} \frac{r}{r_0} = -\frac{p}{2R} z,$$

ou enfin

$$r = r_0 e^{-\frac{p}{2R} z}.$$

Cette équation représente une logarithmique asymptote à l'axe OZ (1). La quantité r_0 est une constante arbitraire qui représente le rayon de la tour à sa base. Pour l'éliminer, observons qu'au sommet

(1) Poncelet arrive au même résultat en montrant, par la simple géométrie, que la sous-tangente de la courbe cherchée est constante. La section EF supporte le poids $N + p$ (vol. CDEF); la section E'F' supporte seulement le poids $N + p$ vol. (CDE'F'). Comme elles sont toutes deux également pressées, la différence des deux sections supporte, à raison de R unités de poids par unité de surface, le poids du volume compris entre les deux sections. On a donc l'équation

$$R \times \pi(\overline{EG}^2 - \overline{E'G'}^2) = p \times \pi \overline{EG}^2 \times GG'.$$

Projetons le point E' en K sur le rayon EG ; remplaçons $\overline{EG}^2 - \overline{E'G'}^2$ par $(EG - E'G') \times (EG + E'G')$ ou par $EK \times (EG + E'G')$, ou enfin par $EK \times 2EG$, en

de la tour, pour $z=h$, on a $\frac{N}{\pi r_1^2} = R$, r_1 étant le rayon CI; donc

$$r_1 = \sqrt{\frac{N}{\pi R}},$$

et par suite

$$\sqrt{\frac{N}{\pi R}} = r_0 e^{-\frac{p}{2R}h}.$$

L'arbitraire r_0 disparaît par la division des deux équations l'une par l'autre, et il vient

$$r\sqrt{\frac{\pi R}{N}} = e^{-\frac{p}{2R}(z-h)} = e^{\frac{p}{2R}(h-z)}.$$

Proposons-nous de trouver le volume total V de la tour; il faudra faire l'intégrale $\int \pi r^2 dz$ entre les limites 0 et h; mais

$$dr = -\frac{2R}{p}\frac{dr}{r},$$

et

$$\pi r^2 dz = -\frac{2R\pi}{p} rdr$$

L'intégrale est donc

$$V = \frac{\pi R}{p}(r_0^2 - r_1^2),$$

r_0 et r_1 étant les rayons de la tour à la base et au sommet.

Ce résultat pouvait s'obtenir sans intégration; en effet, la base de la tour a une surface égale à πr_0^2; si on la multiplie par R, on aura la pression qu'elle supporte; or cette pression se compose du

---

remarquant que E'G' diffère infiniment peu de EG. Il viendra

$$EK \times 2EG = \frac{p}{R} EG^2 \times GG' = \frac{p}{R}\overline{EG}^2 \times E'K.$$

Donc $\frac{EG \times E'K}{EK} = \frac{2R}{p}$. Menons la droite EE', qui à la limite sera tangente à la méridienne, et prolongeons-la jusqu'au point T où elle rencontre l'axe OZ; les triangles semblables EKE', EGT donnent $GT = \frac{EG \times E'K}{EK}$. Donc la sous-tangente à la méridienne est constante et égale à $\frac{2R}{p}$.

poids de la colonne, c'est-à-dire du volume total V multiplié par p, et de la pression N, qui est égale à $\pi r_1^2 R$. Donc

$$\pi r_0^2 \times R = V \times p + \pi r_1^2 R,$$

et par suite

$$V = \frac{R\pi}{p}(r_0^2 - r_1^2).$$

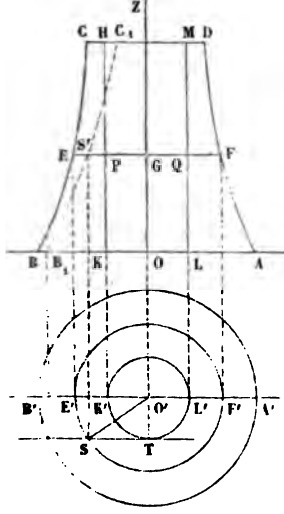
Comme on suppose N donné, le rayon r_1 s'en déduit; dans ces conditions, le rayon à la base r_0 grandit indéfiniment à mesure que h augmente, et le volume V de la tour croît indéfiniment avec h.

Si l'on fait $N = 0$, on pourra supposer $h = \infty$, la tour ne portant que son poids propre; r_0 étant alors le rayon donné de la base, l'équation du méridien sera

$$r = r_0 e^{-\frac{2R}{p}z}.$$

et le volume total de la tour, qui a une hauteur infinie, sera fini et égal à $\frac{\pi R r_0^2}{p}$. Ce cas particulier n'est évidemment pas réalisable en pratique.


Fig. 61.



74. Cherchons à résoudre le même problème pour une tour creuse.

Nous supposerons que la partie creuse de la tour soit un cylindre droit à base circulaire, HKLM, de rayon donné, OL.

La solution peut être obtenue directement; elle peut aussi se déduire de la solution relative à la tour pleine.

Considérons une section horizontale quelconque EF; elle coupera le solide suivant une couronne annulaire projetée horizontalement entre les circonférences de rayon O'E' et de rayon O'K'.

Imaginons une tour pleine d'égale résistance, qui ait la même hauteur h que la tour creuse, avec la même surcharge N au sommet, et qui soit

enfin soumise en tout point à la pression R. Le problème sera résolu pour la tour creuse, si les sections pleines des deux tours, pour une même hauteur du plan sécant, sont équivalentes; car alors les poids seront les mêmes de part et d'autre, ainsi que les surfaces sur lesquelles ces poids se répartissent également. Or, la section pleine de la tour creuse à la hauteur du plan EF est l'anneau compris entre les circonférences O'E', O'K'; elle est mesurée par la différence $\pi(\overline{O'S}^2 - \overline{O'T}^2)$, O'S et O'T étant les rayons de ces deux circonférences. Menons en un point T du petit cercle O'K une tangente TS à ce cercle, jusqu'à la rencontre en S avec le cercle extérieur. La différence $\overline{O'S}^2 - \overline{O'T}^2$ sera égale à $\overline{ST}^2$; donc ST est le rayon du parallèle de la section pleine à la hauteur du plan EF. Si, le long d'une arête quelconque (T, OZ) du cylindre droit qui limite intérieurement l'épaisseur de la tour, on mène un plan tangent à ce cylindre, il coupera la surface extérieure de la tour suivant une courbe qui sera le méridien de la tour pleine équivalente. En prenant pour le point T le pied de l'arête antérieure du cylindre, la courbe d'intersection se projettera en vraie grandeur sur le plan vertical suivant le tracé $B_1S'C_1$. Cette courbe est la méridienne déterminée dans le problème précédent; on la construira comme si la droite (T, OZ) était l'axe d'une tour pleine. Puis on la fera tourner autour de la droite (O', OZ), et l'on déterminera l'intersection de la surface ainsi engendrée avec le plan vertical dont la trace est B'A'; cette intersection sera le méridien cherché. C'est de la même manière qu'on construit la surface de l'hyperboloïde de révolution par la rotation autour de l'axe d'une droite non contenue dans un plan méridien.

Pour avoir l'équation du méridien de la tour creuse, il suffit, dans l'équation de la courbe B_1C_1,

$$r\sqrt{\frac{\pi R}{N}} = e^{\frac{p}{2R}(h-z)}$$

de remplacer le rayon r de la tour pleine par l'expression $\sqrt{r'^2 - a^2}$, où r' est le rayon extérieur de la tour creuse, et a le rayon constant du cylindre vide ménagé à l'intérieur. L'équation

$$\sqrt{r'^2 - a^2}\sqrt{\frac{\pi R}{N}} = e^{\frac{p}{2R}(h-z)},$$

ou bien

$$r'^2 = a^2 + \frac{N}{\pi R} e^{\frac{p}{R}(h-z)}$$

représentera la courbe BC cherchée.

Les formes que nous avons trouvées dans ces deux problèmes présentent un empatement vers la base. Poncelet observe que cet empatement contribue à donner aux massifs de la résistance aux actions transversales, telles que l'action du vent. C'est la forme adoptée pour les phares en mer; elle se dessine aussi naturellement au pied des arbres, où elle accroît la résistance du tronc aux efforts exercés par le vent.

LIVRE SECOND.

FLEXION PLANE DES POUTRES DROITES.

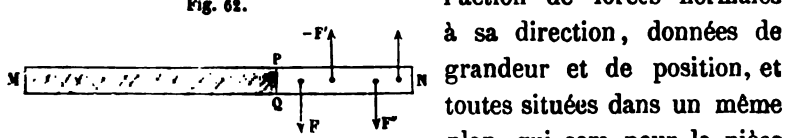
CHAPITRE PREMIER.

FLEXION PLANE DES POUTRES DROITES SOLLICITÉES PAR DES FORCES NORMALES.

EFFORT TRANCHANT, MOMENT FLÉCHISSANT, MOMENT D'ÉLASTICITÉ.

75. Considérons une pièce prismatique MN, en équilibre sous l'action de forces normales à sa direction, données de grandeur et de position, et toutes situées dans un même plan, qui sera pour la pièce un plan de symétrie. Coupons-la par un plan PQ perpendiculaire à sa longueur.

Fig. 62.



Le plan PQ partage la pièce en deux tronçons, qui sont en équilibre chacun, sous l'action des forces extérieures qui y sont spécialement appliquées et des forces moléculaires développées dans la section PQ. Ces forces moléculaires font donc équilibre aux forces extérieures qui sollicitent l'un quelconque des deux tronçons.

Prenons en particulier le tronçon PQN; soient F, F′, F″.... les forces

normales qui agissent sur lui ; soient de plus f, f', f''.... les distances de ces forces à la section PQ, ou les bras de levier de ces forces par rapport à un point quelconque de cette section. Les forces moléculaires dans le plan PQ se réduisent donc pour l'équilibre :

1° à une force A, égale et opposée à la somme algébrique $F + F' + F'' + \ldots$;

2° à un couple M, égal et opposé à la somme des moments $Ff + F'f' + F''f'' + \ldots$

Cela posé, on appelle :

Effort tranchant dans la section PQ, la résultante $F + F' + F'' + \ldots$ des forces qui tendent à faire glisser la portion PQN sur la portion PQM, en cisaillant la pièce suivant le plan PQ;

Résistance à l'effort tranchant la force moléculaire A, égale et contraire à l'effort tranchant;

Moment fléchissant ou *moment de rupture*, le couple résultant $Ff + F'f' + F''f'' + \ldots$ des moments des forces extérieures qui tendent à courber la pièce dans la section PQ;

Moment d'élasticité, le couple résultant M des actions moléculaires développées dans la section PQ, égal et opposé au moment fléchissant. Nous adoptons cette définition du moment d'élasticité, conformément à l'usage adopté par plusieurs auteurs, notamment par Bélanger (1) et par Delaunay (2). Mais nous verrons plus loin que d'autres auteurs donnent à l'expression *moment d'élasticité* une signification différente. Pour éviter toute confusion on pourrait appeler le moment d'élasticité, tel que nous l'avons défini, *moment du couple résultant des forces élastiques*. La confusion n'est du reste pas à craindre (3).

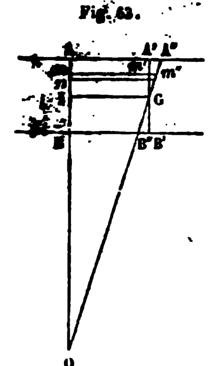
EXPRESSIONS DIVERSES DU MOMENT D'ÉLASTICITÉ.

76. Soient AB, A'B', deux sections transversales infiniment voisines faites dans la pièce, et parallèles dans l'état naturel. Après la

(1) Cours de l'École des ponts et chaussées.
(2) *Mécanique rationnelle*, liv. III, p. 228.
(3) M. Bresse a donné à ce moment des forces élastiques le nom de *moment d'inflexibilité*, pour montrer qu'il s'agit des forces qui résistent à la flexion, et qui équilibrent le *moment fléchissant*.

déformation du prisme, on peut concevoir que la position nouvelle de la section AB soit ramenée à coïncider avec sa position primitive, et alors les molécules de la section A'B' prennent une certaine position A''B'', différente de A'B'. L'hypothèse de Jacques Bernoulli revient à admettre qu'après la déformation, les molécules primitivement situées dans le plan normal A'B' appartiennent encore à un plan A''B'', perpendiculaire au plan de symétrie, et normal à la pièce fléchie. Ces deux plans A''B'' et A'B' se coupent suivant une droite projetée en G.

Fig. 43.



Considérons le prisme élémentaire ayant pour base l'élément de section projeté en mn dans la section AB; ce prisme avait avant la déformation la longueur mm'; après la déformation, sa longueur devient mm''. Désignant par ω la section de la base projetée en mn, l'extension du prisme élémentaire représente une tension égale à $\frac{E\omega \times m'm''}{mm'}$.

Ce sont toutes les forces analogues qui doivent se réduire à un couple, dont le moment doit être égal au moment d'élasticité de la pièce dans la section AB.

Pour cela, il faut et il suffit que la somme algébrique de toutes ces forces parallèles soit égale à zéro, ce que l'on exprime en posant

$$\sum \frac{E\omega \times m'm''}{mm'} = 0.$$

La somme Σ doit être étendue à toute la section A'B'. Cette équation se réduit à $\Sigma\,(\omega \times m'm'') = 0$, en faisant sortir du signe Σ les facteurs constants E et $\frac{1}{mm'}$.

Mais dans le triangle $Gm'm''$, $m'm''$ est proportionnel à Gm', de sorte que l'équation précédente revient à celle-ci

$$\sum (\omega \times Gm') = 0;$$

cette équation indique que le centre de gravité de la section A'B' se projette au point G sur le plan de symétrie. La fibre IG, qui passe par ce point, ne change pas de longueur par suite de la déformation: c'est la *fibre neutre*. L'axe neutre d'une pièce droite sollicitée par des forces normales est le lieu géométrique des centres de gravité des sections transversales.

Le moment d'élasticité est égal à la somme des moments des forces $\frac{E\omega \times m'm''}{mm'}$ par rapport à la droite projetée en G : nous aurons donc à faire la somme

$$\sum \left(\frac{E\omega \times m'm''}{mm'} \times Gm'\right),$$

en l'étendant à tous les éléments de la section A'B'.

Prolongeons le plan A''B'' jusqu'à la rencontre en O avec le plan AB. Les triangles semblables OIG, $Gm'm''$ donnent la proportion

$$\frac{m'm''}{mm'} = \frac{m'm''}{IG} = \frac{Gm'}{OI}.$$

Donc

$$\frac{m'm'' \times Gm'}{mm'} = \frac{\overline{Gm'}^2}{OI},$$

et le moment d'élasticité est par conséquent égal à

$$\frac{E}{OI} \sum (\omega \times Gm'^2).$$

La somme Σ ($\omega \times Gm'^2$) est le *moment d'inertie* de la section A'B', ou de la section AB, par rapport à la droite menée par le centre de gravité de cette section perpendiculairement au plan de symétrie. Nous le représenterons par la lettre I.

Le point O, point de rencontre des deux normales AB, A''B'' à l'axe neutre après la flexion, est le centre de courbure de cette ligne une fois fléchie. Le dénominateur OI est donc le rayon de courbure ρ de l'axe neutre déformé.

La première expression du moment d'élasticité est en définitive $\frac{EI}{\rho}$.

M étant le moment fléchissant dû aux forces extérieures qui agissent sur le prisme entre la section considérée et l'une des extrémités de la pièce, moment pris avec le signe convenable, l'équation

$$\frac{EI}{\rho} = M$$

définit la courbe affectée par l'axe neutre après la déformation. On admet en général que la déformation est assez petite pour ne pas altérer sensiblement les valeurs et les positions des forces extérieures.

77. Si l'on prend l'axe neutre avant la déformation pour axe des abscisses, et que y représente après la déformation l'ordonnée du point de l'axe neutre défini par son abcisse x, on aura pour le rayon de courbure

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Or la petitesse des déformations permet de négliger $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ vis-à-vis de l'unité ; on a donc approximativement

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

et l'équation

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

est l'équation différentielle de l'axe neutre déformé.

78. Proposons-nous enfin de trouver en un point m de la section AB la tension ou la compression de la matière. Pour y parvenir, posons $Gm' = v$, et appelons R la tension par unité de surface de la fibre mm'.

Nous aurons, en divisant la force $\frac{E\omega \times m'm''}{mm'}$ par la section élémentaire ω,

$$R = \frac{E \times m'm''}{mm'} = \frac{E \times Gm'}{OI} = \frac{Ev}{\rho}.$$

Donc

$$\frac{R}{v} = \frac{E}{\rho},$$

et par suite le moment d'élasticité $\frac{EI}{\rho}$ est aussi représenté par $\frac{RI}{v}$. C'est la troisième expression du moment d'élasticité, et c'est une expression rigoureuse.

En résumé on a la série d'équations

$$\frac{EI}{\rho} = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{RI}{v} = M.$$

La dernière $\frac{RI}{v} = M$ donnera la charge R par unité de surface en un point pris arbitrairement dans une section quelconque. En attribuant à v la plus grande valeur absolue qu'il puisse avoir, on trouvera pour R la plus grande charge à laquelle la matière soit soumise dans la section considérée.

REMARQUE SUR LES SIGNES A ADOPTER POUR LES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET POUR LES EFFORTS TRANCHANTS.

79. Toute section transversale PQ partage la poutre MN en deux tronçons, et suivant que l'on considère l'un de ces tronçons ou l'autre, les forces moléculaires à introduire dans les calculs sont dirigées dans un sens ou en sens opposé.

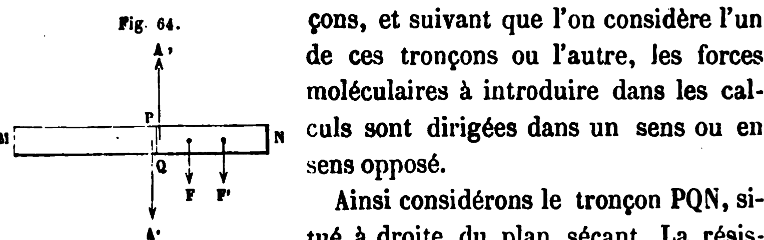


Fig. 64.

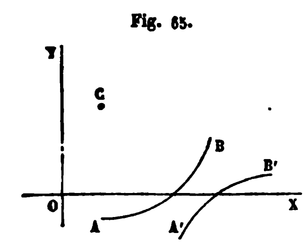
Ainsi considérons le tronçon PQN, situé à droite du plan sécant. La résistance à l'effort tranchant développée

dans le plan PQ sera égale et contraire à la somme algébrique F+F'+... des forces appliquées au tronçon PQN pris isolément. Ce sera une certaine force A, qui a un sens parfaitement déterminé, et qui représente l'action tangentielle au plan PQ, exercée par le tronçon MPQ sur le tronçon PQN. Si au contraire, on étudie ce qui se passe dans le tronçon MPQ, à gauche de PQ, on trouvera pour résistance à l'effort tranchant une force A', égale et contraire à A, et qui sera l'action tangentielle exercée par PQN sur MPQ, ou la réaction égale et contraire à l'action A.

Pour définir entièrement l'effort tranchant en un point donné, il est donc nécessaire de dire à quel côté du plan PQ on le suppose appliqué; car il change de signe d'un côté à l'autre de ce plan.

Le moment fléchissant et le moment d'élasticité donnent lieu à des observations de même nature. On attribue en mécanique aux moments des forces les signes + ou —, savoir, le signe +, si les forces tendent à faire tourner leurs points d'application de gauche à droite autour de l'axe des moments, et le signe — si elles tendent à les faire tourner de droite à gauche; avec cette convention, les signes du moment fléchissant et du moment des forces élastiques n'ont plus rien d'arbitraire, pourvu qu'on indique auquel des deux tronçons MPQ, PQN on suppose les forces appliquées.

Fig. 65.



Nous rapporterons la courbe formée par l'axe neutre après la déformation, à deux axes rectangulaires, OX, OY, dont l'un OX coïncide *à peu près* (1) avec l'axe neutre avant la déformation.

La partie positive de l'axe OY étant dirigée au-dessus de l'axe OX, l'analyse donnera une valeur positive à la seconde dérivée $\frac{d^2y}{dx^2}$, le long de tout arc de courbe AB qui a ses centres de courbure C au-dessus de sa direction, c'est-à-dire le long de tout arc AB concave

(1) *A peu près*, parce que l'axe neutre peut, dans l'état naturel, n'être pas rigoureusement une ligne droite.

du côté des ordonnées positives, et une valeur négative à la seconde dérivée le long d'un arc A'B' concave vers les ordonnées négatives.

L'expression trouvée pour le moment d'élasticité, EI $\frac{d^2y}{dx^2}$, a toujours le signe de $\frac{d^2y}{dx^2}$, lequel ne dépend par conséquent que de la forme prise par la fibre neutre.

Le moment d'élasticité pris avec le signe que lui attribue la statique, est donc égal, suivant le tronçon considéré, à

$$\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

ou à

$$-\,\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Mais la règle suivante permet d'éviter cette distinction, moyennant une nouvelle convention sur le signe des moments des forces.

Quel que soit le tronçon considéré, on peut employer l'équation

$$\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{M},$$

en prenant positivement les moments des forces qui tendent à *augmenter algébriquement* la courbure du tronçon dans la section PQ, et négativement les moments des forces qui tendent à la *diminuer algébriquement.*

Rappelons qu'une augmentation algébrique peut consister dans la diminution de la valeur absolue d'une quantité négative.

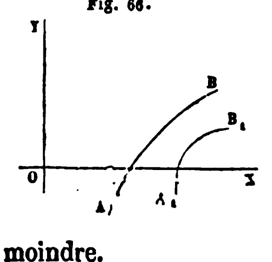


Fig. 66.

Ainsi des deux courbes AB, A_1B_1 qui toutes deux ont des courbures négatives, la courbe la moins prononcée, AB, est celle qui algébriquement a la plus grande courbure, parce qu'en valeur absolue, sa courbure est la moindre.

OBSERVATIONS SUR LES FORMULES

$$\frac{EI}{\rho} = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{RI}{v} = M.$$

80. — 1° Plusieurs auteurs, entre autres Navier, appellent moment d'élasticité, non pas le moment des forces élastiques égal et contraire au moment M des forces extérieures, mais le produit EI du moment d'inertie de la section par le coefficient d'élasticité. C'est une définition que nous n'emploierons pas, mais qu'il est utile de connaître.

2° Des équations

$$\frac{EI}{\rho} = M,$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M,$$

la première seule est rigoureusement conforme à l'hypothèse; la seconde n'est qu'approximative, car elle se déduit de la première par la suppression du facteur $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ qui, dans les applications aux poutres droites, est très-voisin de l'unité.

Ces deux équations sont des équations différentielles du second ordre; l'intégration introduira deux constantes arbitraires, qu'il faudra déterminer dans chaque cas particulier.

Par exemple, supposons qu'une pièce MN de section uniforme soit sollicitée par deux couples (P, —P), (F, —F), se faisant équilibre. Il est facile de voir qu'entre les points I et K où s'appliquent les forces P et F les plus voisines, la courbe formée par l'axe neutre sera un arc de cercle.

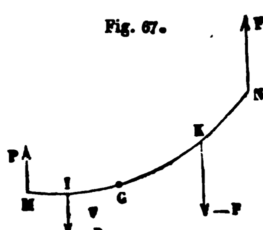


Fig. 67.

En effet, coupons la poutre en un point G de cet intervalle; nous aurons en ce point

$$\frac{EI}{r} = M,$$

M étant la somme algébrique des moments des forces F, —F par rap-

port au point G, c'est-à-dire le moment du couple donné (F, —F). L'équation précédente montre que le rayon de courbure ρ est constant dans tout l'intervalle IK, ou que l'arc IK appartient à une circonférence dont elle fait connaître le rayon. Restent deux constantes à déterminer pour définir la position de l'arc (1).

3° L'équation $\frac{\mathrm{RI}}{v} = \mathrm{M}$ donne dans chaque section les valeurs de la pression de la matière, aux points éloignés de la quantité v de l'axe neutre.

Le moment d'élasticité est regardé comme positif quand la courbure est positive; si l'on compte positivement les quantités v au-dessus de l'axe neutre, les valeurs positives de R indiqueront une pression, et les valeurs négatives prises en valeur absolue, une tension.

4° L'équation $\frac{\mathrm{EI}}{\rho} = \mathrm{M}$, qui conduit à déterminer la forme prise par la fibre neutre, renferme le coefficient d'élasticité E.

L'équation $\frac{\mathrm{RI}}{v} = \mathrm{M}$, qui donne la répartition des pressions dans les sections transversales, ne renferme pas ce coefficient.

AUTRE MANIÈRE D'EXPOSER LA THÉORIE.

81. Soit AB une section transversale faite dans la poutre;

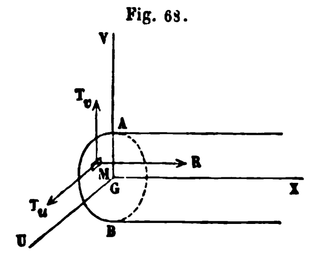


Fig. 68.

G, le centre de gravité de cette section;

GX, un axe normal à la section, mené par le centre de gravité;

VGX, le plan de symétrie dans lequel agissent les forces appliquées aux différents points de la pièce;

---

(1) Si au lieu de la formule $\frac{\mathrm{EI}}{\rho} = \mathrm{M}$, on employait la formule approximative $\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{M}$, on trouverait pour la courbe IK un arc de parabole, très-voisin de l'arc de cercle donné par l'équation rigoureuse, pourvu que l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ des tangentes à ces arcs reste très-petite.

GU, un axe mené par le point G dans le plan de la section, perpendiculairement au plan de symétrie;

GV, un troisième axe, mené par le point G perpendiculairement aux deux premiers.

Considérons en M un élément de section ayant pour aire *dudv*; la force moléculaire développée sur cet élément, et rapportée à l'unité de surface, peut être décomposée parallèlement aux trois axes; appelons R la composante parallèle à GX, T_u la composante parallèle à l'axe GU, et T_v la composante parallèle à GV. La force R représentera l'effort de compression ou d'extension subi par la fibre qui passe au point M; les forces T_u, T_v seront les efforts de glissement parallèles aux axes GU, GV, auxquels la même fibre est appelée à résister.

Écrivons les six équations d'équilibre du tronçon de poutre limité au plan AB; appelons A l'effort tranchant, M le moment fléchissant, il viendra, pour les équations

des composantes parallèles à GX, $\iint R\,du\,dv = 0$,

— parallèles à GU, $\iint T_u\,du\,dv = 0$,

— parallèles à GV, $\iint T_v\,du\,dv = A$,

et pour les équations des moments

autour de GX, $\iint (T_v u - T_u v) \times du\,dv = 0$,

— de GV, $\iint R u\,du\,dv = 0$,

— de GU, $\iint R v\,du\,dv = M$.

Les doubles sommes sont étendues à tous les éléments de la section AB.

De ces six équations, il y en a trois qui contiennent la force R, et les trois autres contiennent les forces tangentielles T_u et T_v. Laissons provisoirement ces trois dernières de côté. Il viendra pour déterminer la fonction inconnue R les trois relations

$$\iint R\,du\,dv = 0,$$

$$\iint R u\,du\,dv = 0$$

$$\iint R v\,du\,dv = M.$$

Nous ferons une hypothèse sur la forme de la fonction R ; elle consistera à poser

$$R = au + bv + c;$$

a, b, c étant des fonctions de x, indépendantes de u et de v. Substituant cette expression, on a les trois équations

$$\begin{aligned} a \iint ududv + b \iint vdudv + c \iint dudv &= 0, \\ a \iint u^2dudv + b \iint uvdudv + c \iint ududv &= 0, \\ a \iint uvdudv + b \iint v^2dudv + c \iint vdudv &= \mathrm{M}. \end{aligned}$$

Si les forces extérieures avaient des composantes parallèles à la pièce, il suffirait de remplacer dans la première équation le zéro du second membre par la somme de ces composantes.

Le point G étant le centre de gravité de la section, on a identiquement

$$\iint ududv = 0, \qquad \iint vdudv = 0.$$

De plus, la section est supposée symétrique par rapport au plan VGX ; la droite GV est donc un des axes principaux de l'ellipse d'inertie, et par suite

$$\iint uvdudv = 0.$$

Les équations se réduisent donc à

$$\begin{aligned} c \iint dudv &= 0, \\ a \iint u^2dudv &= 0, \\ b \iint v^2dudv &= \mathrm{M}. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$c = 0, \qquad a = 0, \qquad b = \frac{\mathrm{M}}{\iint v^2dudv} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}},$$

car $\iint v^2 dudv$ est le moment d'inertie, I, de la section par rapport à la droite GV.

On voit en même temps que si la section n'était pas symétrique par rapport au plan moyen VGX, les coefficients a et b se détermineraient par les équations

$$a \iint u^2 dudv + b \iint uvdudv = 0,$$
$$a \iint uvdudv + b \iint v^2 dudv = \mathrm{M},$$

ce qui donnerait

$$a = \frac{\mathrm{M} \iint uvdudv}{(\iint uvdudv)^2 - \iint u^2 dudv \times \iint v^2 dudv},$$

$$b = -\frac{\mathrm{M} \iint u^2 dudv}{(\iint uvdudv)^2 - (\iint u^2 dudv)(\iint v^2 dudv)}.$$

Le coefficient a ne serait pas nul, et la déformation de la pièce ne s'opérerait pas parallèlement à son plan moyen.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, a est nul, et b égal à $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}}$.

Donc $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}$, formule à laquelle on est déjà parvenu. Notre nouvelle analyse a l'avantage de mettre en évidence l'importance de la symétrie de la pièce par rapport à son plan moyen.

Nous pouvons passer facilement de là à la recherche de la déformation.

Soit dx la longueur d'un élément GG' pris sur la fibre neutre (fig. 69). Cet élément ne change pas de longueur par suite de la déformation. Un élément parallèle MM', défini par la distance $v = \mathrm{GM}$, acquiert par suite de la déformation une longueur dx', et se raccourcit par conséquent de la quantité $dx - dx'$; la compression correspondante de l'élément est

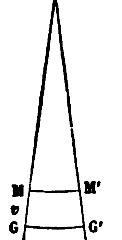
$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{E}(dx - dx')}{dx}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{E}(dx - dx')}{dx} = \frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}.$$

Les deux sections MG, M'G', primitivement parallèles, viennent converger en un point O, qui est le centre de courbure de la fibre moyenne, et les triangles semblables OMM', OGG', donnent la proportion $\frac{MM'}{GG'} = \frac{OM}{OG}$; appelant ρ le rayon de courbure OG, on a $OM = \rho - v$, $MM' = dx'$, $GG' = dx$, et $\frac{dx'}{dx} = \frac{\rho - v}{\rho}$, ou bien $\frac{dx - dx'}{dx} = \frac{v}{\rho}$. Donc $\frac{Ev}{\rho} = \frac{Mv}{I}$, et enfin $\frac{EI}{\rho} = M$.

Fig. 69.

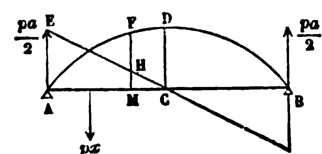


APPLICATIONS.

Détermination des efforts tranchants et des moments fléchissants dans une poutre droite posée sur deux appuis de niveau.

82. Les forces extérieures qui agissent sur la poutre sont, d'une part, les poids qu'elle porte et qu'on suppose donnés, et, d'autre part, les réactions des appuis.

Fig. 70.



1[er] CAS. — Les poids donnés se réduisent à une charge également répartie sur la longueur de la pièce.

Soient AB la poutre, A et B les appuis; soit enfin p le poids uniformément réparti par unité de longueur.

Les réactions des appuis seront verticales et égales à $\frac{pa}{2}$.

Prenons le point A pour origine et AB pour axe des abscisses, puis considérons un point M défini par son abscisse $AM = x$. Le moment fléchissant M des forces extérieures agissant sur la pièce entre la section M et l'une des extrémités A sera égal à la différence

$$\frac{pa}{2} \times x - px \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\,p(ax - x^2) = M.$$

L'effort tranchant A dans la section M est égal à la différence

$$\frac{pa}{2} - px = A.$$

On reconnaît sur le champ

1° Que le moment fléchissant M est proportionnel à l'ordonnée d'une parabole dont l'équation serait

$$my = \frac{1}{2}p(ax - x^2),$$

le facteur m étant introduit pour rendre l'équation homogène et dépendant seulement du choix de l'échelle des hauteurs;

Que M est nul au point A et au point B pour $x = 0$ et pour $x = a$, et qu'il est maximum au point C, milieu de la portée, pour $x = \frac{a}{2}$; il est alors égal à $\frac{1}{8}pa^2$;

2° Que l'effort tranchant A est proportionnel à l'ordonnée d'une droite représentée par l'équation

$$ny = \frac{pa}{2} - px,$$

n étant de même un facteur dépendant du choix de l'échelle des hauteurs;

Que A est nul au point C; si on le prend positivement dans la région CA, il acquiert une valeur négative dans la région CB; il atteint sa valeur absolue maximum aux deux points A et B; il est alors égal à $\pm \frac{pa}{2}$.

Si l'on compare les deux équations

$$M = \frac{1}{2}p(ax - x^2),$$

$$A = \frac{1}{2}pa - px,$$

on voit que $A = \frac{dM}{dx}$, c'est-à-dire que l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse.

La parabole ADB, qui passe par les points A et B et qui a pour axe la verticale CD menée par le milieu C de la portée, représente par ses ordonnées les valeurs du moment fléchissant en un point quelconque M. Si l'ordonnée maximum CD représente le moment de rupture maximum, $\frac{1}{8}pa^2$, l'ordonnée MF élevée au point M représentera à la même échelle le moment fléchissant en M. Si l'on prend de même à une échelle arbitraire $AE = \frac{pa}{2}$ et qu'on joigne EC, l'ordonnée MH représentera, à cette seconde échelle, la valeur de l'effort tranchant au point M.

Il est facile de trouver la charge de la matière par unité de surface dans une section M quelconque.

Soient Ω l'aire totale de la section;

I, le moment d'inertie de la section par rapport à une horizontale menée dans son plan par son centre de gravité;

R, la charge par unité de surface en un point de la section défini par sa distance v à la fibre neutre;

R′, la résistance moyenne à l'effort tranchant par unité de surface.

On aura en un point quelconque

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{RI}{v} \\ A &= R'\Omega \end{aligned}\right\} \quad \text{d'où l'on tire} \quad \left\{\begin{aligned} R &= \frac{Mv}{I}, \\ R' &= \frac{A}{\Omega}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on cherche, au contraire, la forme de l'axe neutre après la déformation, on prendra l'équation :

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = \frac{1}{2}p(ax - x^2),$$

d'où l'on tire, en intégrant deux fois,

$$EI\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tang}\varphi\right) = \frac{1}{4}pax^2 - \frac{1}{6}px^3,$$

$$EI\,(y - x\operatorname{tang}\varphi) = \frac{1}{12}pax^3 - \frac{1}{24}px^4.$$

et l'on déterminera la valeur de la constante tang φ en observant que pour $x = \frac{a}{2}$ on doit avoir $\frac{dy}{dx} = 0$; ce qui donne

$$\tang \varphi = -\frac{\frac{1}{24} pa^3}{EI}.$$

L'angle φ est l'angle que fait au point A avec l'horizon l'axe neutre déformé.

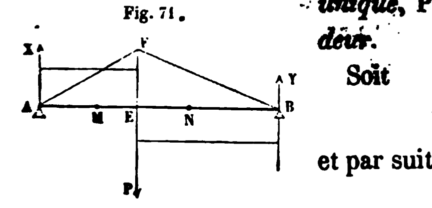
Substituant cette valeur dans la dernière équation et faisant $x = \frac{a}{2}$, on a

$$y = -\frac{pa^3}{EI} \times \frac{5}{384} a.$$

La valeur absolue de y est la flèche prise par la poutre.

83. 2° Cas. *Pièce posée sur deux appuis et sollicitée par un poids unique,* P, *donné de position et de grandeur.*

Fig. 71.



Soit

$$AB = a, \qquad AE = b,$$

et par suite

$$BE = a - b.$$

La réaction X au point A sera déterminée par l'équation des moments autour du point B; on aura

$$X \times a = P \times (a - b),$$

donc

$$X = \frac{P(a-b)}{a},$$

et de même

$$Y = \frac{Pb}{a}.$$

Du point A au point E, le moment fléchissant en un point M quelconque, est égal à X x, ou à $\frac{P(a-b)}{a} x$, x étant la distance va-

riable AM. Du point E au point B, le moment fléchissant en un point N, est représenté par $X x - P(x-b) = \frac{P(a-b)x}{a} - P(x-b)$, x étant encore l'abscisse AN du point N.

Le moment fléchissant M varie donc du point A au point E proportionnellement aux ordonnées d'une droite AF, dont la plus grande ordonnée, EF, représente la valeur $\frac{P(a-b)b}{a}$ du moment fléchissant pour $x = b$. De E en B, le moment fléchissant est représenté par les ordonnées de la droite FB.

L'effort tranchant entre A et F est partout égal à $X = \frac{P(a-b)}{a}$, et entre E et B, partout égal à $-Y$ ou à $-\frac{Pb}{a}$; la différence de ces deux valeurs est égale à P, et chacune d'elles est la dérivée de la valeur correspondante de M prise par rapport à l'abscisse.

Pour trouver l'équation de la fibre neutre déformée, nous emploierons la formule

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M.$$

Entre les points A et E, cette équation donne

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Xx,$$

et entre A et B,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = (X - P)x + Pb.$$

Intégrons deux fois chaque équation, ce qui introduira deux constantes pour chacune; nous pouvons écrire comme il suit les équations obtenues par l'intégration :

Tronçon AE $\begin{cases} EI\left(\frac{dy}{dx} + C\right) = \frac{1}{2}X(x^2 - b^2) \\ EI(y + Cx + C') = \frac{1}{2}X\left(\frac{x^3}{3} - b^2x\right) \end{cases}$

$$\text{Tronçon EB}\left\{\begin{array}{l} \mathrm{EI}\left(\frac{dy}{dx}+\mathrm{C}''\right)=\frac{1}{2}(\mathrm{X}-\mathrm{P})(x^2-b^2)+\mathrm{P}b(x-b) \\ \mathrm{EI}(y+\mathrm{C}''x+\mathrm{C}''')=\frac{1}{2}(\mathrm{X}-\mathrm{P})\left(\frac{x^3}{3}-b^2x\right)+\mathrm{P}b\left(\frac{x^2}{2}-bx\right) \end{array}\right.$$

Nous avons donc 4 constantes à déterminer ; nous le ferons en remarquant que pour $x=0$, y doit être nul ;

que pour $x=a$, y doit être nul également ;

que pour $x=b$, les deux tronçons de la courbe déformée doivent se raccorder tangentiellement, c'est-à-dire que les deux équations doivent donner pour $x=b$ le même y et le même $\frac{dy}{dx}$. En tout 4 équations du 1er degré par rapport aux constantes, ce qui permet d'en trouver les valeurs.

On aura d'abord

$$\mathrm{C}'=0, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C}=\mathrm{C}'',$$

puis

$$\mathrm{EI}(\mathrm{C}''a+\mathrm{C}''')-\frac{1}{2}(\mathrm{X}-\mathrm{P})\left(\frac{a^3}{3}-b^2a\right)-\mathrm{P}b\left(\frac{a^2}{2}-ba\right)=0.$$

Enfin, en retranchant la seconde équation de la quatrième, après y avoir fait $x=b$, et en observant que $\mathrm{C}=\mathrm{C}''$,

$$\mathrm{EIC}'''=\frac{1}{3}\mathrm{P}b^3-\frac{1}{2}\mathrm{P}b^3=-\frac{1}{6}\mathrm{P}b^3.$$

Connaissant C''', C'' s'en déduit ; toutes les arbitraires sont déterminées, et la question est entièrement résolue.

84. Si au lieu d'un poids P unique, il en avait plusieurs, on pourrait suivre une marche analogue et tracer le polygone des moments fléchissants ; on pourrait aussi traiter séparément la question pour chacun des poids, et composer ensuite par voie d'addition algébrique les ordonnées des contours obtenus pour chacun.

Prenons pour exemple le cas particulier d'une poutre AB posée sur deux appuis A et B, et supportant deux poids égaux P, P' en des points C et D également distants des extrémités de la pièce.

Fig. 72.

Les réactions des appuis seront égales à P.

Soit

$$BA = a \qquad \text{et} \qquad AC = b.$$

On aura, en prenant AB pour axe des x et A pour origine,

de A en C $\quad M = Px \qquad$ et $\qquad A = P,$

de C en D $\quad M = Px - P(x-b) = Pb \quad$ et $\quad A = P - P = 0,$

de D en B $\quad M = Px - P(x-b) - P[x-(a-b)] = P(a-x),$

et $A = P - P - P = -P.$

Prenant donc sur la verticale du point C une longueur $CE = Pb$ et une longueur égale DF, sur la verticale du point D, on obtient, en joignant AE, EF, FB, le polygone dont les ordonnées représentent les moments fléchissants aux différents points de la portée.

De même si l'on mène une droite HK parallèle à AB, à une distance $AH = P$, et, au-dessous de AB, une droite LN parallèle à AB et à une distance de AB égale aussi à P, les ordonnées du contour discontinu HK, CD, LN, donneront en chaque point de la portée la valeur de l'effort tranchant.

On peut encore vérifier sur ces deux exemples que l'effort tranchant A est la dérivée du moment fléchissant M par rapport à l'abscisse. Cette relation est un fait général, quelle que soit la distribution des forces.

Reprenons le problème, pour le traiter par la méthode de la superposition des efforts des forces. Pour cela, nous chercherons successivement les effets des deux poids P, P', et nous composerons ensuite les résultats partiels obtenus.

Considérons d'abord celui des deux poids qui est appliqué au point C, les réactions des appuis qui y correspondent sont $P \times \frac{a-b}{a}$ en A et $P \times \frac{b}{a}$ en B, et si l'on porte sur la verticale CE une longueur $CR = P\frac{a-b}{a} \times b$, le contour polygonal représentatif des moments fléchissants sera formé des deux droites AR, BR.

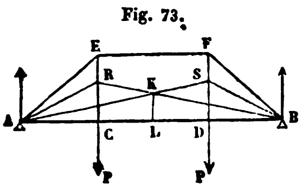


Fig. 73.

La force P appliquée en D, considérée isolément, donnera de même un polygone des moments formé des deux droites AS, SB, qui se coupent sur la verticale du point D, à la distance DS = CR ; car il y a symétrie de la poutre et des forces par rapport au plan qui la coupe en deux parties égales.

Il suffit alors de composer par voie d'addition les ordonnées qui correspondent à une même abscisse, ce qui donnera le contour polygonal AEFB, que nous avions déjà obtenu. L'ordonnée CE, qui s'applique sans variation à tous les points compris entre C et D, est double de l'ordonnée IK commune aux deux contours partiels. Or

$$\frac{IK}{CR} = \frac{BI}{BC},$$

ou bien

$$IK = \left(\frac{P\frac{a-b}{a} b \times \frac{a}{2}}{a-b}\right) = \frac{Pb}{2}.$$

Donc CE, double de IK, est égal à Pb, ce que nous avions trouvé directement. C'est l'application pure et simple des règles de la composition des forces parallèles. On vérifierait de même que les valeurs des pressions R en un point quelconque sont les sommes algébriques des valeurs afférentes à chaque force considérée seule.

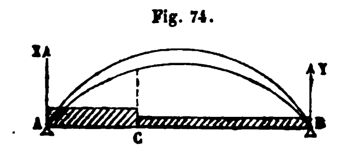


Fig. 74.

85. 3e Cas. — Les poids qui agissent sur la poutre se réduisent à une charge p, également répartie par unité de longueur sur la portion AC, et à une charge p', également répartie par unité de longueur sur le reste CB de la portée.

Soit

$$AB = a \quad \text{et} \quad AC = b.$$

Le théorème des moments donne encore les réactions des appuis. On a, en prenant les moments par rapport au point B,

$$X \times a = pb \times \left(a - \frac{1}{2}b\right) + p'(a-b) \times \frac{a-b}{2} = (p-p')ab + \frac{1}{2}p'a^2 - \frac{1}{2}(p-p')b^2,$$

puis, en les prenant par rapport au point A,

$$Y \times a = pb \times \frac{b}{2} + p'(a-b) \times \frac{a+b}{2}.$$

Le moment de rupture M est donné, entre les points A et C, par l'équation

$$M = Xx - \frac{1}{2}px^2,$$

et, entre C et B, par l'autre équation

$$M = Xx - pb \times \left(x - \frac{1}{2}b\right) - p'(x-b)\frac{x-b}{2}.$$

Ces équations représentent deux paraboles à axes verticaux dont les paramètres sont égaux à $\frac{2}{p}$ pour la première, et à $\frac{2}{p'}$ pour la seconde. Elles ont un point commun pour $x = b$, et elles s'y raccordent tangentiellement l'une à l'autre.

L'effort tranchant sera donné par les équations

$$A = X - px, \quad \text{entre A et C},$$

et

$$A = X - pb - p'(x-b), \quad \text{entre C et B},$$

équations qui représentent deux droites.

Il est facile de reconnaître que, si p est plus grand que p', le moment fléchissant M, donné par les équations que nous venons de poser, est en tous points inférieur à la valeur $\frac{1}{2}p\,(ax - x^2)$ qu'il aurait

si la charge p était répandue sur toute la portée; et comme ce qu'on cherche avant tout, ce sont les limites extrêmes des efforts subis par la matière, on voit qu'il est inutile pour cette recherche de considérer les charges incomplétement réparties dans la portée.

Il n'en est pas de même des efforts tranchants; car si la charge p est répartie sur toute la portée, l'effort tranchant A est nul au milieu de la poutre, tandis qu'il a en ce point une valeur différente de zéro lorsque la charge p n'est appliquée qu'à une longueur b moindre que a (1).

Pour prévoir tous les cas possibles de distribution des efforts tranchants, il faut faire varier b de o à a, et imaginer que l'on construise la série des contours polygonaux formés, pour chaque valeur de b, des deux droites :

$$A = X - px, \quad \text{entre A et C}$$

et

$$A = X - pb - p'(x - b), \quad \text{entre C et B.}$$

Le sommet de l'angle de ces deux droites décrit une parabole lorsqu'on fait varier la position du point C le long de la portée AB.

Pour trouver l'équation de cette courbe, remarquons qu'au point C, l'effort tranchant A est égal à $X - pb$.

Fig. 75.

Le sommet G de l'angle formé par les deux droites EG, GF, dont les ordonnées sont proportionnelles aux efforts tranchants dans chaque tronçon AC, CB, peut être considéré comme ayant $X - pb = y$ pour ordonnée CG, et b pour abscisse $AC = x$; on aura donc l'équation du lieu décrit par le point G, en remplaçant, dans l'équation

$$y = X - px,$$

X par sa valeur déduite de l'équation

$$Xa = (p - p')\,ab + \frac{1}{2}p'a^2 - \frac{1}{2}(p - p')\,b^2,$$

(1) L'effort tranchant au milieu de la portée diminue donc en valeur absolue quand on complète la charge répartie sur la poutre. L'égalité dans la répartition compense, et au delà, au point de vue de l'effort tranchant, l'excès d'effort développé. Comparer cette remarque à celles du § 69.

où l'on aurait changé en même temps b en x. Il vient en réduisant

$$ay = \frac{1}{2} p'a^2 - p'ax - \frac{1}{2}(p - p')x^2,$$

équation d'une parabole à axe vertical, dont le paramètre est $\frac{2}{p - p'}$.

Si l'on fait

$$x = 0, \quad \text{on a} \quad y = \frac{1}{2} p'a,$$

$$x = a \quad\quad y = -\frac{1}{2} pa,$$

et enfin

$$x = \frac{a}{2}, \quad\quad y = -\frac{1}{8}(p - p')a.$$

Ces ordonnées suffisent pour construire la courbe.

Au point A, élevons, dans le sens positif, une ordonnée $AE = \frac{1}{2} p'a$; au point B, dans le sens négatif, une ordonnée BF égale à $\frac{1}{2} pa$; prenons le milieu I de la portée AB, et joignons IE, IF; ces droites toucheront la courbe cherchée aux points E et F. Pour avoir l'ordonnée au milieu de la portée, nous joindrons EF, et au point I nous élèverons une verticale indéfinie, qui coupe EF en un point K; le milieu H de l'intervalle IK sera un point de la courbe.

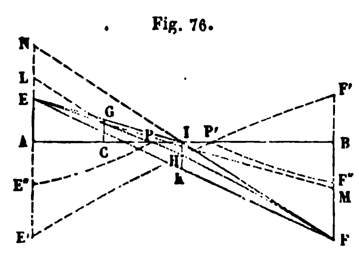


Fig. 76.

En effet on a

$$IH = \frac{1}{2} IK = \frac{1}{4}(BF - AE) = \frac{1}{8}(p - p')a.$$

La tangente à la courbe en H est parallèle à la corde EF.

Cette courbe étant tracée, si l'on veut avoir le polygone représentatif des efforts tranchants pour une surcharge s'étendant du point A à un point C quelconque, on prendra sur la courbe le point G dont l'abscisse est AC, puis par ce point on mènera une parallèle GL à IF, et une parallèle GM à EI. La première représentera, par ses ordonnées, les valeurs de l'effort tranchant en chaque point du tronçon le plus

chargé, AC; la seconde, les efforts tranchants dans le tronçon le moins chargé, CB.

La plus grande valeur possible pour l'effort tranchant au point A est donnée par l'ordonnée AN, que l'on obtient en prolongeant la droite FI; elle correspond au cas où la surcharge s'étend sur toute la portée.

La courbe EF a été tracée en supposant que la plus grande charge s'étende à partir du point A. Si la surcharge partait du point B, il faudrait renverser la figure, ce qui donnerait une courbe F'P'E', symétrique de la première par rapport à la verticale IK. Enfin, si l'on cherche seulement les valeurs absolues de l'effort tranchant, ce qui suffit pour l'évaluation des limites des efforts développés dans la matière, on pourra replier autour de AB l'une des portions de l'épure située d'un même côté de cette droite, de manière à la rabattre sur l'autre portion. Faisant cette opération pour la portion située au-dessus de AB, nous ramènerons la courbe PE en PE'', la courbe P'F' en PF''. Mais ces arcs restent en deçà des arcs E'H, FH; la portion utile de l'épure se réduit donc aux arcs E'H et FH, et par suite les ordonnées de ces arcs, prises en valeur absolue, donnent pour chaque section le maximum de la valeur que l'effort tranchant puisse atteindre.

Pour trouver la forme de la fibre neutre après la déformation, pour une valeur donnée de la longueur b sur laquelle s'étend la surcharge, on appliquera de A en C l'équation

$$\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx} = \mathrm{X}x - \frac{1}{3}\,px^2,$$

et de C en B l'équation

$$\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{X}x - pb\left(x - \frac{b}{2}\right) - p'\,\frac{(x-b)^2}{2}.$$

La double intégration introduira 4 constantes arbitraires ; mais on a 4 équations de condition, savoir

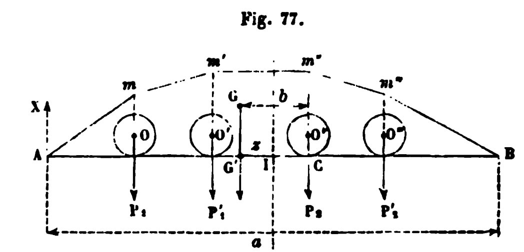
$$y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$
$$y = 0 \quad \text{pour} \quad x = a;$$

enfin pour $x = b$, les équations de chaque tronçon doivent donner le même y et le même $\frac{dy}{dx}$, pour que les deux tronçons se raccordent tangentiellement. De là, quatre équations du premier degré qui suffisent pour déterminer les arbitraires.

PROBLÈME.

86. Une locomotive à quatre essieux O, O', O'', O''' est placée sur une poutre AB, portée sur deux appuis de niveau A, B, dont la distance est a. On connaît les poids P_1, P'_1, P_2, P'_2 qui portent sur chacune des roues, les distances mutuelles des essieux, et la position G du centre de gravité de la machine, où s'applique le poids total $Q = P_1 + P'_1 + P_2 + P'_2$. On demande quelle position il faut donner à la machine sur le tablier du pont pour rendre le plus grand possible le moment fléchissant maximum. Nous empruntons la solution de ce problème à un travail de M. Barré, ingénieur civil.

Fig. 77.



Les moments fléchissants sont représentés, pour chaque position particulière de la charge, par des ordonnées d'un contour polygonal $Amm'm''m'''B$, dont les sommets sont situés à l'aplomb des points d'application des forces P_1, P'_1, etc. Il en résulte que le moment fléchissant maximum correspondant à une position donnée de la charge a lieu en l'un de ces points d'application, sauf le cas où le polygone des moments aurait un côté horizontal; alors le maximum du moment fléchissant aurait lieu pour tout l'intervalle compris entre les points d'application de deux forces consécutives, et il n'y aurait par conséquent aucune erreur à admettre qu'il a lieu pour un des sommets qui terminent ce côté.

Nous chercherons donc le maximum du moment fléchissant aux

points de contact des roues avec la poutre; comme il y a quatre roues, il y a quatre points à essayer.

Soit C un de ces quatre points. Cherchons le moment fléchissant de la poutre en ce point.

Soit I le milieu de la poutre; G′ la projection sur la poutre du centre de gravité G de la machine; nous définirons la position de la locomotive par la distance, positive ou négative, $IG' = z$ de son centre de gravité projeté au milieu de la portée. La distance $CG' = b$, du même point au point C que nous essayons, est une donnée de la question.

Le poids total Q appliqué en G′ donne sur l'appui une pression $X = \frac{Q\left(\frac{a}{2} + z\right)}{a}$. Le moment fléchissant M au point C est égal au moment de la réaction X, diminué de la somme μ des moments des forces P_1 et P'_1 comprises entre l'appui A et le point C. Nous aurons donc

$$M = \frac{Q\left(\frac{a}{2} + z\right)}{a} \times \left(\frac{a}{2} + b - z\right) - \mu.$$

Il s'agit de trouver la valeur de z qui rend M maximum; or μ est indépendant de z, car le déplacement de la locomotive laisse constantes les forces P_1, P'_1 et leurs distances au point C. Donc le maximum de M correspond au maximum du premier terme de sa valeur, c'est-à-dire au maximum d'un produit de deux facteurs $\frac{a}{2} + z$, $\frac{a}{2} + b - z$, dont la somme $a + b$ est constante; le maximum cherché correspond donc à l'égalité des deux facteurs, ou à $z = \frac{1}{2} b$. On devra par conséquent amener la locomotive dans la position où le point I, milieu de la poutre, divise en deux parties égales la distance horizontale CG′ du centre de gravité au point de contact C de la roue.

Après avoir opéré ainsi pour l'une des roues, on opérera de même

pour les trois autres; on calculera les moments fléchissants correspondants pour chacune, et l'on retiendra seulement le plus grand des quatre moments fléchissants ainsi calculés.

La même méthode est applicable au cas où l'on voudrait tenir compte du poids propre *pa* de la poutre, supposé réparti uniformément. Alors on aurait

$$X = \frac{Q}{a}\left(\frac{a}{2}+z\right) + \frac{pa}{2}.$$

et

$$M = \frac{Q}{a}\left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}+b-z\right) + \frac{pa}{2}\left(\frac{a}{2}+b-z\right) - \frac{pa}{2}\left(\frac{a}{2}+b-z\right)^2 - \mu;$$

μ ne varie pas avec z; le maximum de M s'obtiendra en égalant à o la dérivée du second membre, ce qui donne

$$\frac{dM}{dz} = \frac{Q}{a}\left(\frac{a}{2}+b-z\right) - \frac{Q}{a}\left(\frac{a}{2}+z\right) - \frac{pa}{2} + p\left(\frac{a}{2}+b-z\right) = 0,$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{Q}{2} + \frac{Qb}{a} & - \frac{Qz}{a} & - \frac{pa}{2} & \\ -\frac{Q}{2} & - \frac{Qz}{a} & + \frac{pa}{a} & \\ & - pz & + pb & \end{array}\right\} = 0,$$

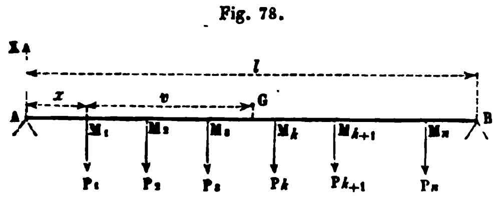
équation qui se réduit à

$$z = b\,\frac{Q+pa}{2Q+pa}.$$

On voit que le rapport $\frac{z}{b}$ est toujours compris entre $\frac{1}{2}$ et l'unité, et qu'il est voisin de la première ou de la seconde limite, suivant que le poids propre *pa* est très-petit ou très-grand par rapport à la surcharge Q.

87. Cette solution peut être généralisée.

Fig. 78.



Soient $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$, n poids distribués sur la portée $AB = l$, à des distances invariables les uns des autres.

Soient $a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$, ces distances, comptées à partir du premier P_1 de ces poids.

La position de l'ensemble sur la poutre est définie par la distance $x = AM_1$ du premier poids à l'appui A; cette quantité est positive et moindre que $l - a_n$, sans quoi un des poids au moins sortirait de la travée.

Le centre de gravité G du poids P sera défini, par rapport à leur ensemble, à l'aide de l'équation des moments. Appelant v la distance M_1G, on aura

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_n)v = P_2a_2 + P_1a_3 + \ldots + P_na_n.$$

La réaction X de l'appui A sera donnée par l'équation des moments par rapport au point B :

$$\begin{aligned} Xl &= P_1(l - x) + P_2(l - a_2 - x) + P_3(l - a_3 - x) + \ldots + P_n(l - a_n - x) \\ &= (P_1 + P_2 + \ldots + P_n)\,l - (P_1 + P_2 + \ldots + P_n)\,x - (P_2a_2 + P_3a_3 + \ldots + P_na_n) \\ &= (P_1 + P_2 + \ldots + P_n)\,(l - x - v), \end{aligned}$$

ou bien

$$X = Q\left(1 - \frac{v + x}{l}\right),$$

en appelant Q le poids total, $P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n$, engagé sur la travée.

Le maximum de la portion du moment fléchissant dû aux surcharges a lieu en un des points d'application des forces, au point d'application du poids P_k, par exemple. Le caractère auquel on reconnaîtra ce point est que l'effort tranchant, $A = \frac{dM}{dx}$, change de signe d'un côté à l'autre de la force P_k; il faut donc que la différence

$$X - (P_1 + P_2 + \ldots + P_{k-1}) \text{ soit positive,}$$

et que la différence

$$X-(P_1+P_2+\ldots\ldots P_{k-1}+P_k) \text{ soit négative.}$$

Or la force X est comprise entre deux limites qui correspondent, l'une à $x=o$, l'autre à $x=l-a_n$. Substituant ces deux limites dans les différences précédentes, on saura, à l'inspection des signes, en quels points d'application des forces le moment fléchissant peut acquérir la plus grande valeur.

Pour déterminer ensuite le maximum de ce moment fléchissant, il faut faire varier x de manière à rendre le moment M le plus grand possible. Soit k le numéro du point d'application où le moment fléchissant est le plus grand de tous. On aura en ce point

$$M=X(x+a_k)-P_1a_k-P_2(a_k-a_1)-P_3(a_k-a_2)\ldots\ldots-P_{k-1}(a_k-a_{k-1}),$$

fonction dont le premier terme varie seul avec x. Il suffit donc de chercher le maximum du produit

$$X(x+a_k)=Q\left(1-\frac{v+x}{l}\right)(x+a_k)=\frac{Q}{l}(l-v-x)(x+a_k).$$

La somme des deux facteurs variables étant constante, le maximum répond à l'égalité des facteurs, c'est-à-dire à $x=\frac{l-v-a_k}{2}$. Si cette valeur de x tombe entre o et $l-a_n$, elle donne bien le maximum cherché, et l'on peut vérifier que le milieu de la distance du poids P_k au centre de gravité G coïncide avec le milieu de la portée. Si au contraire la valeur de x ne tombe pas entre les limites o et $l-a_n$, le produit $X(x+a_k)$ varie toujours dans le même sens pour x croissant entre ces limites, et le maximum a lieu soit pour $x=o$, soit pour $x=l-a_n$.

DÉTERMINATION DES EFFORTS TRANCHANTS ET DES MOMENTS FLÉCHISSANTS DANS UNE POUTRE DROITE ENCASTRÉE.

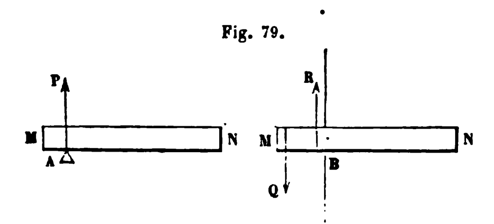
88. Quand une poutre est simplement *posée sur un appui*, sa liaison avec l'appui est telle, que la poutre, en se déformant, peut prendre une inclinaison quelconque sur sa direction primitive.

On dit qu'une poutre est *encastrée sur un appui*, lorsque sa liaison avec l'appui tend à réduire en ce point la déviation de la fibre neutre. L'encastrement est *parfait* quand la déviation de la fibre neutre sur l'appui est rigoureusement nulle. Il y a encastrement incomplet, si la déviation de la fibre neutre, sans être nulle, est gênée par la liaison et limitée à une valeur inférieure à celle qu'elle prendrait si la poutre était posée sur l'appui.

Nous ne nous occuperons dans ce paragraphe que des encastrements parfaits.

On a une image de l'encastrement, en considérant une tige soli-

Fig. 79.



dement pincée dans les mâchoires d'un étau, ou bien une poutre engagée par son extrémité dans un massif de maçonnerie suffisamment résistant. Un appui A, sur lequel la poutre MN serait simplement posée, ne fournirait qu'une réaction unique P. Un encastrement B, complet ou incomplet, développe au contraire à la fois deux forces Q, R, dans deux directions opposées, et équivaut par conséquent à une force R — Q et à un couple (Q, — Q); il résulte de là qu'une poutre chargée de poids peut être en équilibre en n'ayant qu'un appui unique, pourvu qu'il y ait encastrement sur

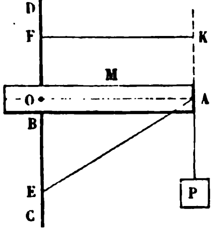
cet appui, tandis qu'elle aurait besoin de deux appuis au moins, si elle était simplement posée.

C'est en cherchant les conditions de l'équilibre intérieur des solides encastrés que Galilée a créé, il y a deux siècles, la science de la résistance des matériaux. L'hypothèse qu'il proposait était, il est vrai, inadmissible; car il plaçait la fibre neutre au point le plus bas de la section, et il supposait que les tensions développées dans tous les points de la section se composaient en une seule force appliquée au centre de gravité. L'hypothèse qu'on emploie aujourd'hui satisfait aux équations de la statique, et paraît d'ailleurs beaucoup plus voisine de la vraie loi des déformations.

Nous allons résoudre quelques problèmes sur l'équilibre intérieur des pièces encastrées.

89. 1er CAS. — *La pièce* BA *est encastrée au point* B *dans le mur* CD; *l'extrémité* A *est libre et porte un poids* P *donné.*

Fig. 80.



La longueur libre BA de la pièce est donnée et égale à a.

Prenons un point M de la fibre neutre, et considérons le tronçon MA. Soit O l'origine des abscisses comptées le long de OA, et soit $\text{OM} = x$. On aura $\text{MA} = a - x$. Le moment fléchissant au point M sera égal à $-\text{P}(a-x)$, avec le signe — parce que la force P tend à donner à la pièce une courbure négative.

L'effort tranchant au point M sera égal à P; il est constant pour tous les points de la portée.

Les forces dont l'encastrement tient lieu sont donc

1° Une force verticale égale à P,
2° Un couple, dont le moment est égal à $\text{P}a$.

Les moments fléchissants seront représentés par les ordonnées d'une droite AE, menée par le point A, et coupant la verticale en un point E, pour lequel l'ordonnée OE est égale à $\text{P}a$, pris à une échelle arbitraire; les efforts tranchants, par les ordonnées constantes d'une horizontale FK, menée à la distance $\text{OF} = \text{P}$ de l'axe des abscisses.

Cherchons la forme de la fibre neutre après la déformation. Pour cela, prenons l'équation

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{P}(a-x) = -\mathrm{P}a + \mathrm{P}x.$$

Intégrons cette première équation, qui nous donne

$$\mathrm{EI}\frac{dy}{dx} = -\mathrm{P}ax + \frac{1}{2}\mathrm{P}x^2;$$

nous n'ajoutons pas de constante, parce que, l'encastrement étant supposé parfait, il n'y a aucune déviation de la fibre neutre au point O; donc $x = 0$ doit donner $\frac{dy}{dx} = 0$.

Intégrons de nouveau :

$$\mathrm{EI}y = -\frac{1}{2}\mathrm{P}ax^2 + \frac{1}{6}\mathrm{P}x^3,$$

sans constante, parce que pour $x = 0$, y est égal à o.

Si nous faisons $x = a$, nous aurons l'ordonnée du bout de la pièce, ou, en valeur absolue, la flèche qu'elle prend sous la charge P. On trouve

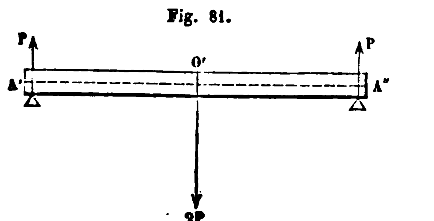
$$\mathrm{EI}y = \mathrm{P}a^3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\mathrm{P}a^3.$$

La flèche de l'extrémité A est donc égale à

$$\frac{\frac{1}{3}\mathrm{P}a^3}{\mathrm{EI}}.$$

Le cas d'une pièce encastrée par un bout et libre à l'autre, peut se ramener au cas d'une pièce posée sur deux appuis : nous pouvons considérer notre poutre encastrée comme la moitié, O'A', d'une poutre A'A'' de longueur égale à $2a$, posée sur deux appuis en A' et en A'', et chargée en son milieu O d'un poids égal à 2P.

Fig. 81.



En effet la charge 2P se partagera également entre les deux appuis, et y donnera une réaction égale à P. Le moment fléchissant au point O' sera égal à $P \times A'O = Pa$; enfin la poutre A'A'' conserve après la déformation, en vertu de la symétrie, une tangente horizontale au point O'. Donc chacune des demi-poutres O'A', O'A'' est dans les mêmes conditions qu'une pièce qui serait encastrée au point O', qui serait libre à son autre extrémité, et qui serait sollicitée en ce point par une force égale à P, agissant de bas en haut.

Le moment d'encastrement est, dans le cas considéré, égal à Pa.

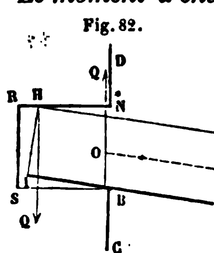


Fig. 82.

Ce moment est produit en général par l'arc-boutement aux points B et H, du prolongement de la poutre au dedans de la cavité NSRB, qu'on ménage dans le mur CD pour recevoir l'about de la pièce. On aura donc pour l'équilibre $Pa = Qb$, en appelant Q les forces du couple développées par les points B et H, et b la distance de ces forces, ou approximativement la longueur BI engagée dans le mur. Cette relation nous apprend que Q est d'autant plus grand que b est plus petit : que, par conséquent, la difficulté de réaliser l'encastrement parfait est d'autant plus grande que cet encastrement doit s'opérer sur une moindre longueur de poutre. Outre la force Q, le point B subit, comme on l'a vu, la réaction verticale de l'appui, égale à P.

Les forces Q et $P + Q$ étant développées par la maçonnerie du mur, il faudra vérifier dans chaque cas particulier que ces forces n'excèdent pas la résistance du massif, et n'en compromettent pas la stabilité.

90. 2ᵉ CAS. — *Poutre encastrée à une extrémité, libre à l'autre, et uniformément chargée de poids.*

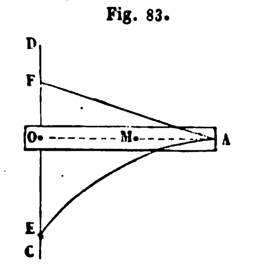


Fig. 83.

Soit a la longueur libre, OA, de la poutre, et p le poids qu'elle porte par unité de longueur. Soit $x = OM$ l'abscisse d'une section quelconque. L'équation de la courbe des moments sera

$$M = -\frac{1}{2}p(a-x)^2$$

et le moment d'encastrement sera égal en valeur absolue à $\frac{1}{2}\ pa^2$.
L'effort tranchant sera donné par la formule :

$$A = p(a - x).$$

La courbe des valeurs de M est une parabole AE, et la ligne dont les ordonnées représentent les valeurs de A est une droite AF.

L'équation de la fibre moyenne, après la déformation, est

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}p(a-x)^2 = -\frac{1}{2}pa^2 + pax - \frac{1}{2}px^2.$$

D'où résulte, en intégrant,

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}pa^2x + \frac{1}{2}pax^2 - \frac{1}{6}px^3,$$

$$EIy = -\frac{1}{4}pa^2x^2 + \frac{1}{6}pax^3 - \frac{1}{24}px^4.$$

On n'ajoute aucune constante, parce que $x = 0$ donne $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

Faisant $x = a$ dans la dernière équation, et changeant les signes, on a la valeur absolue de la flèche f à l'extrémité :

$$f = \frac{\frac{1}{4}pa^4 - \frac{1}{6}pa^4 + \frac{1}{24}pa^4}{EI} = \frac{pa^4}{EI} \times \frac{1}{8}.$$

Un poids P, concentré à l'extrémité de la pièce encastrée, lui ferait prendre une flèche

$$f' = \frac{Pa^3}{EI} \times \frac{1}{3},$$

tandis que le même poids P, uniformément réparti sur la longueur de la pièce, à raison d'une charge $\frac{P}{a}$ par unité de longueur, lui fait prendre une flèche

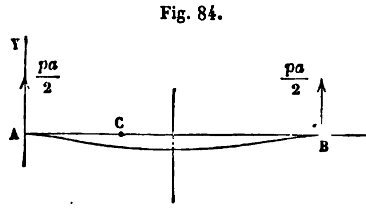
$$f=\frac{\frac{P}{a}\times a^4}{EI}\times\frac{1}{8}=\frac{Pa^3}{EI}\times\frac{1}{8}.$$

Le rapport des flèches $\frac{f'}{f}$ est égal à $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{8}}$ ou à $\frac{8}{3}$; c'est-à-dire que la concentration de la charge au bout de la pièce augmente la flèche à peu près dans le rapport de 1 à 3.

91. 3ᵉ Cas. — *Pièce encastrée à ses deux extrémités, et chargée de poids également répartis.*

Nous savons que l'encastrement équivaut à la fois à un couple et à une force; la force représente la valeur de l'effort tranchant sur l'appui, et le couple, la valeur du moment fléchissant au point où la pièce s'engage dans son encastrement.

Fig. 84.



Soit AB la pièce droite dans son état naturel; posons $AB = a$; soit p le poids également réparti par unité de longueur; prenons arbitrairement un point C sur la portée AB, et soit $x = AC$ l'abscisse de ce point.

Le poids total de la poutre chargée est pa; ce poids se partage également entre les deux appuis, et y donne une réaction verticale égale à $\frac{1}{2}pa$, comme si la poutre était seulement posée. Le moment fléchissant dans la section C se compose

1° du moment positif de la réaction verticale $\frac{pa}{2}$ de l'appui A;

2° du moment négatif des poids répartis de A en C;

3° du moment inconnu du couple développé dans l'encastrement; nous en représenterons la valeur absolue par la lettre μ; il est facile de voir que ce moment est négatif.

Nous pouvons donc poser l'équation différentielle

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}pax-\frac{1}{2}px^2-\mu,$$

dans laquelle μ est une inconnue à déterminer.

Intégrons une première fois, en remarquant que $x=o$ donne $\frac{dy}{dx}=o$, puisque l'encastrement est supposé parfait :

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}pax^2-\frac{1}{6}px^3-\mu x.$$

Si dans cette équation nous faisons $x=a$, nous aurons le $\frac{dy}{dx}$ du point B; or il est aussi égal à zéro à cause du second encastrement; de là résulte l'équation

$$\frac{1}{4}pa^3-\frac{1}{6}pa^3-\mu a=0,$$

qui donne

$$\mu=\frac{1}{12}pa^2.$$

Telle est la valeur absolue du moment d'encastrement, ou du moment fléchissant au point A, et par suite aussi au point B.

Introduisons cette valeur de μ dans l'équation différentielle, il viendra :

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}pax-\frac{1}{2}px^2-\frac{1}{12}pa^2,$$

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}pax^2-\frac{1}{6}px^3-\frac{1}{12}pa^2x.$$

Enfin, intégrant encore une fois,

$$EIy=\frac{1}{12}pax^3-\frac{1}{24}px^4-\frac{1}{24}pa^2x^2=-\frac{px^2}{24}(a^2-2ax+x^2)=-\frac{p}{24}[x(a-x)]^2.$$

Cette équation très-simple montre que y est nul pour $x=o$ et pour $x=a$, c'est-à-dire sur les appuis, et qu'il atteint sa valeur ab-

solue maximum au point où $x = \frac{a}{2}$, c'est-à-dire au milieu de la portée; on trouve pour la flèche en ce point :

$$f = \frac{p}{24EI} \times \frac{a^4}{16} = \frac{pa^4}{EI} \times \frac{1}{384} = \frac{pa^4}{EI} \times 0{,}00262.$$

Lorsque la poutre est simplement posée sur ses appuis, la flèche (§ 82) est égale à $\frac{pa^4}{EI} \times \frac{5}{384}$. Le double encastrement a donc pour effet de réduire la flèche au cinquième de la valeur qu'elle prend quand la pièce est seulement posée.

La courbe des moments fléchissants est représentée par l'équation :

$$M = \frac{1}{2}pax - \frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{12}pa^2.$$

C'est une parabole dont l'axe est vertical, et dont le paramètre est égal à $\frac{2}{p}$; pour construire cette courbe, faisons dans l'équation $x = 0$ puis $x = a$; nous trouverons $M = -\frac{1}{12}pa^2$, valeur du moment fléchissant développé par l'encastrement sur les appuis. Prenons donc au-dessous de AB (fig. 85) deux ordonnées AD, BE, égales en valeur absolue à $\frac{1}{12}pa^2$, mesuré à l'échelle arbitraire des moments. Les points D et E appartiendront à la courbe.

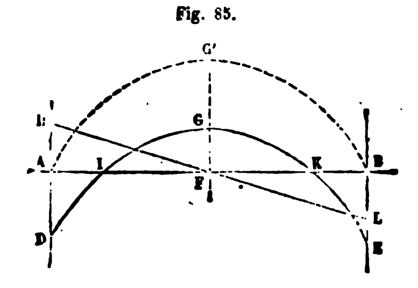
Si l'on fait ensuite $x = \frac{a}{2}$, on a le maximum de M : on trouve $M = \frac{1}{24}pa^2$, c'est-à-dire la moitié, en valeur absolue, du moment trouvé sur les appuis. On prendra donc au milieu F de la portée, et dans le sens positif, une ordonnée FG égale à la moitié de AD; le point G sera un troisième point de la courbe. L'axe de la courbe sera d'ailleurs la droite GF elle même. On achèvera cette courbe en la faisant passer par les trois points D, G, E, ce qui suffit pour la déterminer, puisque la direction de l'axe est connue.

La parabole DGE coupe l'axe AB en deux points I et K, pour les-

quels le moment fléchissant M est égal à zéro; on a les abscisses de ces points en résolvant l'équation

$$\frac{1}{2}pax - \frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{12}pa^2 = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 - ax + \frac{1}{6}a^2 = 0,$$

Fig. 85.



ce qui donne

$$x = \frac{a}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Le signe + correspond à l'abscisse AK $= a \times 0,7887...$; le signe —, à l'abscisse AI $= a \times 0,2113...$

En ces points le moment fléchissant est nul; par suite le $\frac{d^2y}{dx^2}$ est aussi nul; ce sont donc les points d'*inflexion* de la fibre neutre, suivant la définition géométrique de l'inflexion; ce sont aussi les points de *non-flexion* de la fibre neutre, c'est-à-dire les points où le moment fléchissant est nul, et où la fibre neutre ne reçoit aucune courbure par l'effet des forces. La pièce entre les points I et K se comporte comme une pièce simplement posée en ces points sur des appuis. La distance AI est égale à peu près au cinquième de la portée.

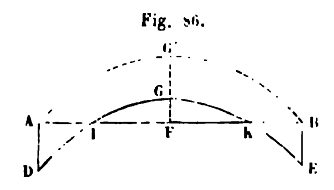
Si la pièce était posée sur les appuis A et B, au lieu d'y être encastrée, la parabole des moments aurait toujours la même forme, car elle aurait $\frac{2}{p}$ pour paramètre; mais elle serait déplacée parallèlement à elle-même, de manière a passer par les appuis A et B, et elle occuperait la position ponctuée AG'B. Comme les dimensions nécessaires des pièces sont réglées sur les valeurs absolues des mo-

ments fléchissants, l'encastrement, à égalité de résistance, conduit à une économie de matière; car la plus grande ordonnée, en valeur absolue, du contour DGE est égale à AD, ou à $\frac{1}{12}pa^2$; tandis que la plus grande ordonnée de la courbe AG'B est égale à G'F ou à $\frac{1}{8}pa^2$.

Pour les efforts tranchants, ils sont les mêmes dans les deux cas, et on les représentera, à une échelle arbitraire, par les ordonnées d'une droite HL, passant par le point F, milieu de la portée.

92. *Comparaison avec la poutre posée sur ses appuis.* —

Fig. 86.



La courbe des moments fléchissants de la poutre posée est la parabole AG'B, dont l'ordonnée maximum $FG' = \frac{1}{8}pa^2$.

La courbe des moments fléchissants de la poutre doublement encastrée est la même parabole déplacée verticalement de la quantité $GG' = AD = BE = \frac{1}{12}pa^2$; ce qui réduit la nouvelle ordonnée du milieu FG au tiers de FG'.

On peut mesurer la quantité de matière nécessaire pour construire la poutre, par l'aire comprise entre la droite AB et la courbe des moments. En admettant cette règle approximative, qui sera justifiée plus tard, le mérite relatif de l'encastrement est mesuré par le rapport des surfaces ADI + IGK + KBE et AG'B.

Soit EGD (fig. 87) une parabole ayant pour sommet le point G, pour axe la droite GX; menons les ordonnées FK, FE, et soit $GF' = GF \times 3$. Dans la parabole les ordonnées sont proportion-

nelles aux racines carrées des abscisses ; on aura donc $EF' = FK \times \sqrt{3}$. L'aire GFK est les deux tiers du rectangle GFKL ; l'aire GEM est le tiers du rectangle GFEM.

Fig. 87.

Faisons $GF = p$, $FK = q$; on aura

$$\text{Surf. GFK} = \frac{2}{3} pq,$$

$$\text{Surf. GLK} = \frac{1}{3} pq,$$

$$\text{Surf. GME} = \frac{1}{3} (p \times 3) \times (q\sqrt{3}) = pq\sqrt{3},$$

$$\text{Surf. MLKB} = p \times (q\sqrt{3} - q) = pq\sqrt{3} - pq.$$

Or

$$\text{Surf. GME} = \text{GLK} + \text{surf. MLKB} + \text{BKE}.$$

Il en résulte

$$\text{Surf. BKE} = pq\sqrt{3} - \frac{1}{3} pq - pq\sqrt{3} + pq = \frac{2}{3} pq = \text{Surf. GFK}.$$

Revenons à la question principale. La somme des surfaces ADI+IGK+KBE sera égale au double de la surface IGK, c'est-à-dire à $\frac{4}{3} \times IK \times FG$, et le rapport cherché sera égal à

$$\frac{\frac{4}{3} IK \times FG}{\frac{2}{3} AB \times F'G} = \frac{2}{3} \times \frac{IK}{AB}.$$

Or $\frac{IK}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Le rapport cherché est donc égal à $\frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,39$, ou environ à $\frac{16}{41}$.

L'économie due à l'encastrement serait environ des $\frac{2}{5}$.

93. 4ᵉ Cas. — *Pièce posée à l'extrémité* B, *encastrée à l'extrémité* A, *et chargée uniformément d'un poids* p *par unité de longueur.*

Appelons encore μ la valeur absolue du moment d'encastrement.

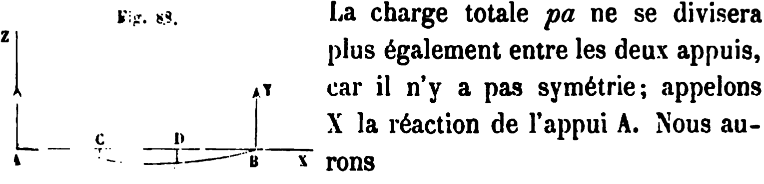


Fig. 83.

La charge totale pa ne se divisera plus également entre les deux appuis, car il n'y a pas symétrie; appelons X la réaction de l'appui A. Nous aurons

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{X}x - \frac{1}{2}px^2 - \mu.$$

Intégrons, et observons que pour $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$ est nul:

$$\mathrm{EI}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\mathrm{X}x^2 - \frac{1}{6}px^3 - \mu x.$$

Intégrons une seconde fois, en observant que $y = 0$ pour $x = 0$:

$$\mathrm{EI}y = \frac{1}{6}\mathrm{X}x^3 - \frac{1}{24}px^4 - \frac{1}{2}\mu x^2.$$

Pour déterminer μ et X, nous remarquerons que la pièce étant simplement posée en B, le moment fléchissant est nul en ce point; que de plus on doit avoir

$$y = 0 \quad \text{pour} \quad x = a.$$

De là les deux équations

$$\mathrm{X}a - \frac{1}{2}pa^2 - \mu = 0.$$

$$\frac{1}{6}\mathrm{X}a^3 - \frac{1}{24}pa^4 - \frac{1}{2}\mu a^2 = 0.$$

Divisons la seconde par $\frac{1}{2}a^2$; il vient

$$\frac{1}{3}\mathrm{X}a - \frac{1}{12}pa^2 - \mu = 0.$$

On tire de celle-ci et de la première

$$\frac{2}{3}\mathrm{X}a = \frac{5}{12}pa^2, \quad \text{donc} \quad \mathrm{X} = \frac{5}{8}pa.$$

Par conséquent, la réaction Y de l'appui B est égale à $\frac{3}{8}pa$.

On a enfin pour le moment d'encastrement, pris positivement,

$$\mu = Xa - \frac{1}{2}pa^2 = \frac{1}{8}pa^2.$$

Les points d'inflexion de la fibre neutre sont donnés par l'équation

$$0 = Xx - \frac{1}{2}px^2 - \mu,$$

ou bien

$$x^2 - \frac{5}{4}ax + \frac{a^2}{4} = 0.$$

Les racines de ces équations sont $x = a$, ce qui correspond au point B, où la flexion est en effet nulle, bien qu'il n'y ait pas là, à proprement parler, d'inflexion géométrique, et $x = \frac{1}{4}a$, pour le point où la courbure de la fibre neutre change de signe.

L'encastrement a pour effet, dans ce cas, de modifier la répartition des pressions de la poutre sur ses appuis; au lieu d'une répartition égale, l'appui sur lequel a lieu l'encastrement est chargé des $\frac{5}{8}$ de la pression totale.

Pour avoir la plus grande flèche prise par la poutre, on cherchera le point où la tangente est horizontale; l'abscisse en sera donnée par l'équation

$$\frac{1}{2}Xx^2 - \frac{1}{6}px^3 - \mu x = 0.$$

On trouve d'abord $x = o$, ce qui correspond au point A; cette solution écartée, on a à résoudre l'équation du second degré

$$\frac{1}{2}Xx - \frac{1}{6}px^2 - \mu = 0,$$

ou bien

$$\frac{5}{16}pax - \frac{1}{6}px^2 - \frac{1}{8}pa^2 = 0,$$

ou enfin

$$x^2 - \frac{15}{8}ax + \frac{3}{4}a^2 = 0,$$

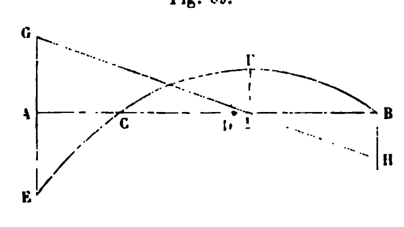
ce qui donne

$$x = a \times \frac{15 \pm \sqrt{33}}{16}.$$

De ces deux valeurs, l'une, celle qui correspond au signe $+$, donne un point situé au delà du point B, qui ne peut convenir au problème. L'autre donne un point D situé entre le point C et le point B, et qui est la vraie solution cherchée : $AD = a \times 0{,}5785$.

Ce point n'est pas au milieu I de l'intervalle CB ; il ne coïncide donc pas avec le maximum de la valeur du moment fléchissant. AI étant égal à $0{,}625a$, le point D est à gauche du point I.

Fig. 89.



La courbe des moments a dans ce cas la position ECFB. Les efforts tranchants sont représentés par les ordonnées de la droite GH, passant au point I, milieu de l'intervalle CB.

94. *Poutre continue posée sur trois appuis de niveau, et portant dans chaque travée une charge également répartie.*

Fig. 90.

Soient A, B, C, les trois appuis, qu'on suppose de niveau ; $AB = a$, $BC = b$, les deux portées ; p, la charge par unité de longueur dans la première, et q la charge par unité de longueur dans la seconde.

Appelons X la réaction verticale du premier appui, que la statique ne suffit pas à déterminer, puisqu'il y a trois appuis en ligne droite, et cherchons la valeur du moment fléchissant sur l'appui B intermédiaire.

Occupons-nous d'abord de la première travée AB. Prenons la droite AC pour axe des x, et le point A pour origine; en un point M de la première travée, défini par son abscisse $AM = x$, nous aurons l'équation des moments

$$(1) \qquad EI\frac{d^2y}{dx^2} = Xx - \frac{1}{2}px^2,$$

et par suite, en intégrant,

$$(2) \qquad EI\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg}\varphi\right) = \frac{1}{2}Xx^2 - \frac{1}{6}px^3,$$

$$(3) \qquad EI(y - x\operatorname{tg}\varphi) = \frac{1}{6}Xx^3 - \frac{1}{24}px^4;$$

φ est l'angle de la fibre neutre avec l'axe AB, au point A, après la déformation. On n'ajoute pas de constante à l'équation (3) parce que $x = 0$ doit donner $y = 0$.

Dans l'équation (1) faisons $x = a$, et appelons μ le moment fléchissant sur l'appui B; nous aurons

$$(4) \qquad \mu = Xa - \frac{1}{2}pa^2.$$

Faisons de même $x = a$ dans l'équation (3); elle donnera $y = 0$. D'où résulte, en supprimant le facteur a, l'équation

$$(5) \qquad EI\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{6}Xa^2 - \frac{1}{24}pa^3 = 0.$$

Entre ces deux dernières équations, nous pouvons éliminer X; pour cela, multiplions la première par $\frac{1}{6}a$, et ajoutons: il viendra, en

supprimant le terme $\frac{1}{6}Xa^2$, commun aux deux membres,

$$(6)\qquad \frac{1}{6}\mu a + \mathrm{EI}\ \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{1}{24}pa^3 = -\frac{1}{12}pa^3,$$

ou bien

$$\frac{1}{6}\mu a + \mathrm{EI}\ \mathrm{tg}\,\varphi + \frac{1}{24}pa^3 = 0.$$

Faisons ensuite $x = a$ dans l'équation (2); et appelons ψ l'angle que fait la fibre moyenne, après la déformation, avec l'axe des x au point B; nous aurons

$$(7)\qquad \mathrm{EI}\,(\mathrm{tg}\,\psi - \mathrm{tg}\,\varphi) = \frac{1}{2}Xa^2 - \frac{1}{6}pa^3.$$

Entre les équations (7) et (4), nous pouvons encore éliminer X, et il viendra

$$(8)\qquad \mathrm{EI}\,(\mathrm{tg}\,\psi - \mathrm{tg}\,\varphi) - \frac{1}{2}\mu a = \frac{1}{12}pa^3.$$

Enfin, entre les équations (6) et (8), éliminons tg φ en les ajoutant ensemble; nous aurons pour résultat final une relation linéaire entre μ et tg ψ :

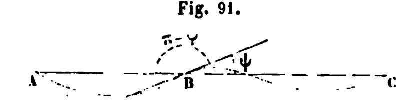
$$(9)\qquad \mathrm{EI}\ \mathrm{tg}\,\psi - \frac{1}{6}\mu a - \frac{1}{2}\mu a + \frac{1}{24}pa^3 = \frac{1}{12}pa^3,$$

ou bien

$$\mathrm{EI}\ \mathrm{tg}\,\psi = \frac{1}{3}\mu a + \frac{1}{24}pa^3.$$

Passons à la seconde travée BC; elle nous donnera un résultat analogue. Il faudra seulement faire commencer la travée au point C,

Fig. 91.



et compter de C en B les x positifs. Nous trouverons sur l'appui B un moment égal à μ. De plus les deux travées se raccordent tangentiellement en ce point; mais l'angle de la fibre neutre avec le nou

vel axe des x, CB, (fig. 91) sera le supplément de l'angle ψ considéré tout à l'heure ; ce qui fait changer tg ψ de signe, de sorte qu'on obtient pour l'équation relative à la travée CB,

$$(10) \qquad -\mathrm{EI}\,\mathrm{tg}\,\psi = \frac{1}{3}\mu b + \frac{1}{24}qb^3.$$

Ajoutons les équations (9) et (10) ; l'angle ψ sera éliminé, et on aura pour déterminer μ l'équation

$$(11) \qquad \frac{1}{3}\mu(a+b) + \frac{1}{24}(pa^3+qb^3) = 0,$$

d'où l'on tire

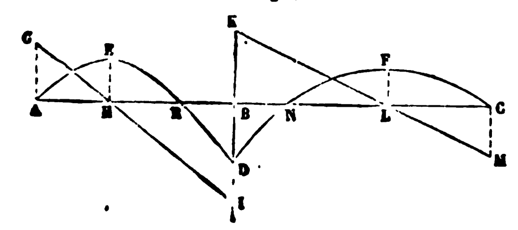
$$(12) \qquad \mu = -\frac{1}{8}\frac{pa^3+qb^3}{a+b}.$$

Cette équation n'est qu'un cas particulier d'un théorème que nous démontrerons plus tard, le *théorème des trois moments.*

L'équation (12) fait connaître tout ce qui est nécessaire pour tracer les paraboles des moments et les droites représentatives des efforts tranchants.

Les moments fléchissants seront représentés dans la travée AB par les ordonnées d'une parabole AED, passant par le point A, et venant couper en D, au-dessous de l'axe des abscisses, la verticale menée par l'appui B; la distance BD est donnée par l'équation

Fig. 92.



$$\mathrm{BD} = -\mu = \frac{1}{8}\frac{pa^3+qb^3}{a+b}.$$

L'équation de la courbe AED est

$$\mathrm{M} = \mathrm{X}x - \frac{1}{2}px^2.$$

Mais X n'est pas encore déterminé; nous l'obtiendrons en remarquant que pour $x = a$, on a $M = \mu$. Donc

$$X = \frac{\mu + \frac{1}{2} pa^2}{a} = \frac{1}{2} pa + \frac{\mu}{a} = \frac{1}{2} pa - \frac{1}{8} \frac{pa^3 + qb^3}{(a+b)a}.$$

Substituant cette valeur, on aura l'équation de la courbe AEB. On a de plus la valeur X de l'effort tranchant au point A.

La droite GI, qui représente l'effort tranchant dans la travée AB, a pour équation

$$A = X - px.$$

L'effort tranchant au point B, dans la travée AB, est donc égal à

$$B = X - pa = -\frac{1}{2} pa + \frac{\mu}{a}.$$

Cette valeur est négative, et est représentée sur l'épure par la longueur BI.

Dans la travée BC, les moments fléchissants sont représentés par une parabole qui passe par les points D et C; elle a un axe vertical, et son paramètre est $\frac{2}{q}$.

L'équation de cette parabole est donc de la forme

$$M = B'x - \frac{1}{2} qx^2 + \mu,$$

en comptant cette fois les abscisses x à partir du point B dans le sens BC; B' est une constante à déterminer. Si on fait $x = 0$, on a $M = \mu$, ce qui indique que la courbe passe en D; si on fait $x = b$, on doit avoir $M = 0$. Donc

$$B'b - \frac{1}{2} qb^2 + \mu = 0,$$

et par suite

$$B' = \frac{1}{2} qb - \frac{\mu}{b}.$$

On pourra tracer la courbe DFC. Les deux paraboles coupent l'axe des abscisses aux points B et N, qui sont les points d'inflexion de l'axe neutre. Les maxima E et F correspondent aux points H et L, où l'effort tranchant est nul.

Cette quantité B' est la valeur de l'effort tranchant sur l'appui B dans la travée BC. On trouve ainsi deux efforts tranchants sur cet appui ; l'un négatif, et représenté sur l'épure par l'ordonnée BI ; l'autre positif et égal à $\frac{1}{2}qb - \frac{\mu}{b}$, représenté sur la figure par l'ordonnée BK. Le premier est l'effort tranchant en B dans la travée AB ; le second, l'effort tranchant en B dans la travée BC ; et leur différence B' — B est la réaction totale Y de l'appui commun ; c'est cette force Y, finie, isolée, qui produit une différence finie entre les deux efforts tranchants consécutifs. Le polygone des efforts tranchants est la ligne discontinue GIKM.

Au point C l'effort tranchant est donné par l'équation

$$C = B' - qb = -\frac{1}{2}qb - \frac{\mu}{b},$$

quantité représentée par l'ordonnée négative CM. Réunissant les valeurs trouvées pour les efforts tranchants, le moment fléchissant en B, et les réactions des appuis X, Y, Z, on forme le tableau suivant :

$$\mu = -\frac{1}{8}\frac{pa^3 + qb^3}{a+b}.$$

	Efforts tranchants.	Réaction des appuis.
Au point A	$A = \frac{1}{2}pa + \frac{\mu}{a}$	$X = A = \frac{1}{2}pa + \frac{\mu}{a}$
Au point B	$B = -\frac{1}{2}pa + \frac{\mu}{a}$ $B' = \frac{1}{2}qb - \frac{\mu}{b}$	$Y = B' - B = \frac{1}{2}(pa + qb) - \mu\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$
Au point C	$C = -\frac{1}{2}qb - \frac{\mu}{b}$	$Z = -C = \frac{1}{2}qb + \frac{\mu}{b}$

Si l'on coupait la poutre sur l'appui B, les efforts tranchants deviendraient :

En A . . . . $\frac{1}{2}pa$,

En B { dans la travée AB $-\frac{1}{2}pa$, dans la travée BC $\frac{1}{2}qb$,

En C . . . . $-\frac{1}{2}qb$,

et les réactions totales des appuis seraient

En A $\frac{1}{2}pa$,

En B $\frac{1}{2}pa+\frac{1}{2}qb$,

En C $\frac{1}{2}qb$,

La continuité de la poutre au-dessus de l'appui moyen a donc pour effet de soulager les appuis extrêmes, en reportant un excès de pression sur l'appui moyen.

Faisons $a=b$, et $p=q$, nous trouverons les formules suivantes, qui sont très-employées :

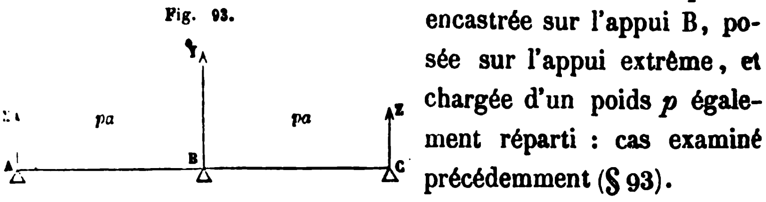
$$\mu=-\frac{1}{8}pa^2,$$

$$X=Z=\frac{3}{8}pa,$$

$$Y=\frac{10}{8}pa.$$

On remarquera que, dans ce cas particulier, chaque travée peut être considérée, à cause de la symétrie, comme formant une poutre encastrée sur l'appui B, posée sur l'appui extrême, et chargée d'un poids p également réparti : cas examiné précédemment (§ 93).

Fig. 93.



Il serait facile, dans le cas général, de trouver la forme de la fibre neutre. Les constantes à employer, tgφ, tgψ, sont déterminées par

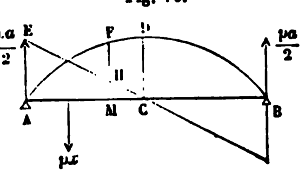


TABLEAU RÉSUM PREMIER.

INDICATION DES CAS EXAMINÉS. | NUMÉRIQUES ET OBSERVATIONS.

1. Poutre posée sur deux appuis et port charge également répartie.(§ 82.)

Fig. 70.



$AB = a$.
p, charge, par unité de longueur.
C, milieu de AB.

puis, $\frac{1}{2}pa$.

ant maximum au point C, $\frac{1}{8}pa^2$.

la poutre au milieu, $f = \frac{pa^4}{EI} \times \frac{5}{384}$.

2. Poutre encastrée, chargée d'un poids isolé

Fig. 80.

pui, P.

ADB reste touj
spondante à

it par le som
H:

$p'a^2 - p'ax$ ·

$AB = a$,
$AC = b$.

7. Poutre posée sur trois appuis de niveau.

Fig. 92.

pui B :

$\mu = -\frac{1}{8}\frac{pa^3+}{a+}$

ts

(réaction de l'a

on AB,

. . . .

on BC,

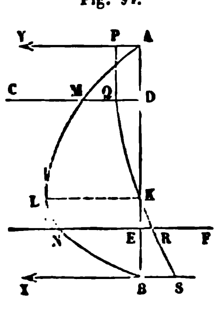
. . . .

. . . .

l'analyse même du problème, telle que nous venons de l'exposer (1).

95. — *Exemple de charges continues non également réparties. Problème de l'aiguille soutenant une charge d'eau.*

Fig. 91.



Soit AB l'aiguille verticale d'un barrage qui soutient l'eau à un niveau CD, sur une de ses faces, tandis que, sur l'autre face, le niveau de l'eau atteint seulement la hauteur EF. L'aiguille est appuyée en deux points A et B.

On donne la hauteur $AB = a$, la distance $AD = b$, enfin la distance $AE = c$.

L'aiguille a une section rectangulaire : ses dimensions sont m parallèlement au plan de la figure, et n perpendiculairement à ce plan.

On demande les charges supportées par la matière de l'aiguille, et la forme prise par la fibre neutre.

Appelons Π le poids de l'unité de volume d'eau. Prenons pour axe des x la droite AB, le point A pour origine, et comptons les y positifs vers la gauche de l'axe des abscisses.

Soit Y la réaction du point A sur l'aiguille, et X la réaction du point B; ces deux forces sont horizontales. La statique suffit pour les déterminer.

La poussée de l'eau sur la face d'amont de l'aiguille est mesurée par le produit $\frac{1}{2}\Pi \times \overline{DB}^2 \times n$; elle est appliquée en un point situé à une hauteur égale à $\frac{1}{3}$ DB au-dessus du point B.

La poussée de l'eau sur la face d'aval est dirigée en sens contraire; elle est égale à $\frac{1}{2}\Pi \times \overline{EB}^2 \times n$, et son point d'application est situé à la distance $\frac{1}{3}$ EB du point B.

On a d'ailleurs

$$DB = a - b,$$
$$EB = a - c.$$

(1) Les principaux cas examinés jusqu'ici dans ce chapitre sont résumés dans le tableau A.

Prenant les moments par rapport au point B, il vient

$$Ya = \frac{1}{6}\,\Pi n(a-b)^3 - \frac{1}{6}\,\Pi n(a-c)^3.$$

équation qui fait connaître Y.

On déduit ensuite X de l'équation

$$X + Y = \frac{1}{2}\,\Pi n(a-b)^2 - \frac{1}{2}\,\Pi n(a-c)^2.$$

Les moments fléchissants seront déterminés de A en D par l'équation $M = Yx$, qui représente une droite AM (limites d'application, $x = 0$ et $x = b$) ;

De D en E, par l'équation $M = Yx - \frac{1}{6}\Pi n\,(x-b)^3$, qui représente une certaine courbe MN (limites, $x = b$, $x = c$);

Enfin de E en B, par l'équation

$$M = Yx - \frac{1}{6}\,\Pi \times n\,(x-b)^3 + \frac{1}{6}\,\Pi n\,(x-c)^3,$$

qui représente un arc de courbe NB (limites, $x = c$, $x = a$).

Les efforts tranchants seront donnés par les équations suivantes :

De A en D, ou de $x=0$ à $x=b$, $\quad A = Y,$

De D en E, ou de $x=b$ à $x=c$, $\quad A = Y - \frac{1}{2}\,\Pi n(x-b)^2,$

De E en B, ou de $x=c$ à $x=0$, $\quad A = Y - \frac{1}{2}\,\Pi n(x-b)^2 + \frac{1}{2}\,\Pi n(x-c)^2.$

La première représente une droite PQ parallèle à AB ; les deux autres représentent deux arcs de parabole QR, RS ; l'ordonnée PA est égale à Y ; l'ordonnée BS est égale en valeur absolue à X.

Ces déterminations permettent de trouver en chaque point la charge de la matière ; appelons R la pression par unité de surface, dans une section définie par son abscisse x, en un point situé à la distance v de la fibre moyenne ; nous appliquerons l'équation

$$\frac{RI}{v} = M.$$

Mais m étant la dimension de l'aiguille dans le sens de la poussée de l'eau, on a

$$I = \frac{1}{12} m^3 n$$

et la plus grande valeur de v est égale en valeur absolue à $\frac{1}{2} m$; donc le minimum absolu de $\frac{I}{v}$ est $\frac{1}{6} m^2 n$, et par suite le maximum absolu de R est

$$R = \frac{6M}{m^2 n},$$

formule dans laquelle on fera entrer le maximum de M, ou le moment correspondant à la section K de l'aiguille.

La résistance moyenne à l'effort tranchant, R', sera de même égale à $\frac{A}{mn}$; on la déterminera pour la plus grande valeur absolue de A, laquelle correspond au point B.

Pour résoudre la seconde partie du problème, on intégrera deux fois les trois équations des moments, ce qui introduira deux constantes pour chacune, en tout six constantes, et l'on aura six équations pour les déterminer, savoir : deux équations pour exprimer que la courbe passe aux points A et B, et quatre, pour exprimer que les tronçons AD, DE, EB, se raccordent tangentiellement aux points D et E. Voici comment on peut diriger les opérations.

On a à intégrer les trois équations différentielles :

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = Yx, \quad \text{entre les limites} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = b;$$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = Yx - \frac{1}{6} \Pi n (x - b)^3, \quad \text{entre} \quad x = b \quad \text{et} \quad x = c;$$

enfin

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = Yx - \frac{1}{6} \Pi n (x - b)^3 + \frac{1}{6} \Pi n (x - c)^3, \quad \text{entre} \quad x = c \quad \text{et} \quad x = a;$$

ce qui fournit les six équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{EI}\left(\frac{dy}{dx}+\mathrm{C}_1\right)=\mathrm{Y}\frac{x^2}{2} \\ &\mathrm{EI}\,(y+\mathrm{C}_1x+\mathrm{C}_2)=\mathrm{Y}\frac{x^3}{6} \end{aligned}\right\}\ \text{tronçon AD,}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{EI}\left(\frac{dy}{dx}+\mathrm{C}'_1\right)=\mathrm{Y}\frac{x^2}{2}-\frac{1}{24}\Pi n(x-b)^4 \\ &\mathrm{EI}\,(y+\mathrm{C}'_1x+\mathrm{C}'_2)=\mathrm{Y}\frac{x^3}{6}-\frac{1}{120}\Pi n(x-b)^5 \end{aligned}\right\}\ \text{DE,}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{EI}\left(\frac{dy}{dx}-\mathrm{C}''_1\right)=\mathrm{Y}\frac{x^2}{2}-\frac{1}{24}\Pi n(x-b)^4+\frac{1}{24}\Pi n(x-c)^4 \\ &\mathrm{EI}\,(y+\mathrm{C}''_1x+\mathrm{C}''_2)=\mathrm{Y}\frac{x^3}{6}-\frac{1}{120}\Pi n(x-b)^5+\frac{1}{120}\Pi n(x-c)^5 \end{aligned}\right\}\ \text{EB.}$$

La courbe passant au point A, on a d'abord

$$\mathrm{C}_2=0.$$

Quand on fait $x=b$, les deux tronçons AD et DE ont le même y et le même $\frac{dy}{dx}$; donc

$$\mathrm{C}_1=\mathrm{C}'_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{C}'_2=\mathrm{C}_2=0.$$

Quand on fait $x=c$, on doit avoir de même pour les deux tronçons DE, EB, le même y et le même $\frac{dy}{dx}$; ce qui donne encore

$$\mathrm{C}'_1=\mathrm{C}''_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{C}''_2=\mathrm{C}'_2=0.$$

Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de C_1; faisant $x=a$ dans la dernière équation, on doit avoir $y=0$; donc

$$\mathrm{C}_1\times\mathrm{EI}a=\mathrm{Y}\frac{a^3}{6}-\frac{\Pi n}{120}[(a-b)^5-(a-c)^5],$$

et le problème est entièrement résolu.

96. — *Recherche des moments d'inertie des sections usuelles de poutre.*

Rectangle plein. — Le rectangle ABCD étant donné, le centre de gravité de la figure est le point G de rencontre des deux diagonales; par ce point menons une droite XX, parallèle aux côtés AB, CD, et proposons-nous de trouver le moment d'inertie I de la section par rapport à cette droite. Soit AB $= a$, AD $= b$.

Fig. 95.

Considérons un rectangle infiniment petit $mnpq$, et appelons x la distance Gr du côté mn de ce rectangle au centre de gravité G; la hauteur mq du rectangle élémentaire sera représentée par dx, et son moment d'inertie par rapport à XX sera égal à $adx \times x^2$. Le moment d'inertie total I est la somme des éléments ax^2dx étendue à toute la section ABCD, c'est-à-dire prise entre les limites $x = -\frac{b}{2}$ et $x = +\frac{b}{2}$, ce qui donne en définitive $\frac{ab^3}{12}$; on a donc

$$I = \frac{1}{12}ab^3.$$

Le maximum de la distance v dans la section rectangulaire ABCD est égal à $\frac{b}{2}$, de sorte que la valeur minimum de $\frac{I}{v}$ est égale à $\frac{1}{6}ab^2$.

La formule $I = \frac{1}{12}ab^3$ peut se mettre sous la forme

$$I = ab \times \frac{1}{12}b^2.$$

Or ab est l'aire Ω du rectangle ABCD; $\frac{1}{12}b^2$ est le carré d'une longueur $\frac{1}{2\sqrt{3}}b$, qui est le rayon de giration de la surface considérée.

Nous avions déjà trouvé ce résultat par une autre méthode, § 59.

Losange. — Cherchons de même le moment d'inertie de la surface ABCD par rapport à la diagonale BD, qui contient le centre de gravité G. Soit

Fig. 96.

$$DB = a, \quad AC = b.$$

En suivant une méthode analogue, on trouvera

$$I = \frac{1}{48} ab^3.$$

La section Ω est ici égale à $\frac{1}{2} ab$; le carré du rayon de giration est donc

$$\frac{\frac{1}{48} ab^3}{\frac{1}{2} ab} = \frac{1}{24} b^2,$$

et le rayon de giration

$$\frac{1}{2\sqrt{6}} b.$$

Le maximum de v est $\frac{b}{2}$, et le minimum de $\frac{I}{v}$ est par conséquent égal à $\frac{1}{24} ab^2$.

Rectangle évidé ou double T. — Le moment I de la section comprise entre les deux rectangles ABCD, A'B'C'D', dont les côtés sont parallèles et dont les centres de gravité coïncident au point G, s'obtient en retranchant du moment d'inertie relatif au premier rectangle le moment d'inertie relatif au second.

Fig. 97.

Soit donc

$$AB = a, \quad BC = b, \quad A'B' = a', \quad B'C' = b';$$

nous aurons

$$I = \frac{1}{12} (ab^3 - a'b'^3).$$

Le maximum de v est égal à $\frac{1}{2} b$.

La même formule donne le moment d'inertie de la section *double* T, qui se rencontre si souvent dans les constructions en tôle; on voit en effet que si l'on coupe la figure MNPQRSTLKIHO par la droite YY, qui la partage en deux portions égales, on peut transporter la portion située à droite de cette ligne YY de manière qu'elle se joigne en MO et KL, par les côtés NP et ST, avec la portion de gauche. On forme ainsi un rectangle évidé, sans altérer, ni les éléments de la section, ni leurs distances à l'axe XX des moments d'inertie; le moment cherché I n'est donc pas changé.

Fig. 98.

La formule $I = \frac{1}{12}(ab^3 - db'^3)$ donne le moment de la section double T, si l'on pose $a = MN$, $b = ML$, $d = PQ + OH$ et $b' = HI$.

Moment d'inertie du rectangle ABCD, *par rapport à une droite* ZZ *parallèle au côté* AB, *mais ne passant pas par le centre de gravité* G *du rectangle.* — Soit $AB = a$, $BC = b$, enfin $GO = h$.

Fig. 99.

Nous aurons à prendre la somme des éléments ax^2dx entre les limites $h - \frac{b}{2}$ et $h + \frac{b}{2}$, ce qui donnera :

$$I = \frac{1}{3}a\left[\left(h+\frac{b}{2}\right)^3 - \left(h-\frac{b}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{3}a\left(3bh^2 + \frac{b^3}{4}\right) = ab \times h^2 + \frac{1}{12}ab^3.$$

Le moment d'inertie I par rapport à ZZ, se compose donc de deux parties : l'une $ab \times h^2$, est le produit de l'aire de la figure ABCD par le carré h^2 de la distance du centre de gravité G de cette figure à la droite ZZ; l'autre, $\frac{1}{12}ab^3$, n'est autre chose que le moment d'inertie de la figure par rapport à une droite XX menée parallèlement à ZZ par le centre de gravité G. On sait que cette loi est générale pour une figure quelconque (§ 49).

Il arrive fréquemment que, dans les sections des poutres en tôle, l'épaisseur b d'une feuille soit très-petite par rapport à la distance h du centre de gravité de la feuille à l'axe neutre. Alors on peut sup-

primer le terme $\frac{1}{12} ab^2$ dans la valeur de I, et poser par approximation

$$I = ab \times h^2.$$

Cela revient à prendre pour rayon de giration de la section par rapport à ZZ la quantité h, au lieu de

$$\sqrt{h^2 + \frac{1}{12} b^2}.$$

97. — *Détermination du moment d'inertie* I *d'une section de poutre en tôle.*

1° *Méthode exacte applicable aux petites poutres.*

Les poutres en tôle sont en général composées comme il suit :

Les deux *tables* ou *semelles* AB, CD sont réunies à une *âme* EF au moyen des quatre *cornières* P, Q, R, S, et la section est symétrique à la fois par rapport aux deux droites rectangulaires XX, YY, passant par son centre de gravité G.

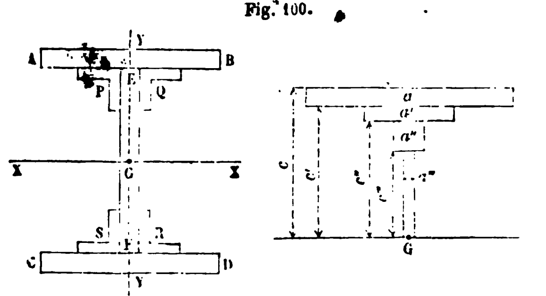


Fig. 100.

On n'a alors à s'occuper que d'une moitié de la section, celle qui est située au-dessous de XX, par exemple, sauf à doubler ensuite le résultat.

On trouvera la formule :

$$I = \frac{2}{3}\left[a(c^3 - c'^3) + a'(c'^3 - c''^3) + a''(c''^3 - c'''^3) + a'''c'''^3\right],$$

ou bien

$$I = \frac{2}{3}\left[ac^3 - (a - a')c'^3 - (a' - a'')c''^3 - (a'' - a''')c'''^3\right].$$

Cette formule s'emploie pour le calcul des moments d'inertie des

poutres de faible hauteur. L'usage d'une table de cubes en simplifie l'application.

2° *Méthode approximative pour les sections des grandes poutres.*

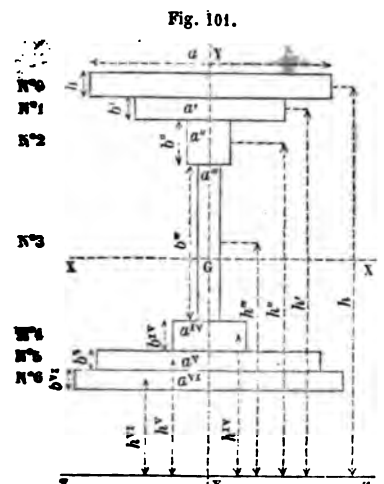


Fig. 101.

Nous supposerons, pour plus de généralité, la section non symétrique par rapport à la droite XX menée par son centre de gravité, de sorte que la position du centre de gravité ne soit pas connue d'avance.

On prendra pour axe provisoire des moments une droite ZZ, perpendiculaire au plan de symétrie YY. On mesurera sur l'épure de la section toutes les dimensions a, b, a', b'..... des rectangles élémentaires dans lesquels la section se décompose, et les distances h, h'..... des centres de gravité de ces rectangles à la droite ZZ.

Au moyen de ces données, on formera le tableau suivant :

DÉSIGNATION des rectangles.	AIRES des rectangles.	MOMENTS DES AIRES par rapport à ZZ.	VALEUR APPROXIMATIVE du moment d'inertie des aires partielles.
N°s 0	$a \times b$	$ab \times h$	$abh \times h$
1	$a' \times b'$	$a'b' \times h'$	$a'b'h' \times h'$
2	$a'' \times b''$	$a''b'' \times h''$	$a''b''h'' \times h''$
3	$a''' \times b'''$	$a'''b''' \times h'''$	$a'''b'''h''' \times h'''$
4	$a^{IV} \times b^{IV}$	$a^{IV}b^{IV} \times h^{IV}$	$a^{IV}b^{IV}h^{IV} \times h^{IV}$
5	$a^{V} \times b^{V}$	$a^{V}b^{V} \times h^{V}$	$a^{V}b^{V}h^{V} \times h^{V}$
6	$a^{VI} \times b^{VI}$	$a^{VI}b^{VI} \times h^{VI}$	$a^{VI}b^{VI}h^{VI} \times h^{VI}$
TOTAUX.	Ω	S	T

On divisera la somme S des moments des aires par la somme Ω qui représente l'aire totale de la section ; le quotient H sera la dis-

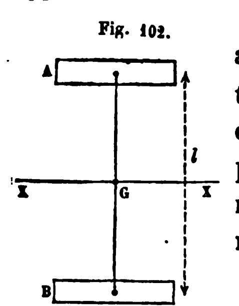
tance du centre de gravité G de la section à la droite ZZ. La somme T est, approximativement, le moment d'inertie de la section par rapport à ZZ ; pour en déduire le moment d'inertie I par rapport à la droite XX menée parallèlement à ZZ par le point G, il faudra retrancher de T le produit de l'aire totale Ω par le carré de la distance H, ce qui revient à retrancher de T le produit SH. On a donc à faire la série d'opérations :

$$H = \frac{S}{\Omega}, \quad I = T - \Omega H^2 = T - SH.$$

Cette méthode donne pour I une valeur un peu au-dessous de la valeur exacte.

3° *Méthode simplifiée pour les grandes sections symétriques par rapport à la droite XX.*

Fig. 102.



On néglige le moment d'inertie de l'âme ; on ajoute la section des cornières à la section de la table voisine ; soit Ω la section résultante, et l la distance du centre de gravité de la table supérieure A au centre de gravité de la table inférieure B. On a, avec une approximation généralement suffisante,

$$I = \frac{1}{2}\Omega l^2.$$

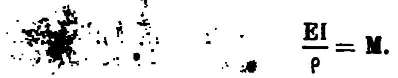
Dans ce cas, on peut prendre aussi pour valeur maximum de v la quantité $\frac{l}{2}$, de sorte que $\frac{I}{v}$ a pour valeur minimum Ωl. Le moment d'élasticité a pour expression $R\Omega l$, ce qui est évident, puisque $R\Omega$ représente la somme des forces moléculaires développées en sens différents dans chacune des sections A et B, et l le bras de levier du couple formé par ces deux groupes de forces.

OBSERVATIONS SUR LES ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE INTÉRIEUR DES POUTRES DROITES SOLLICITÉES PAR DES FORCES NORMALES.

Homogénéité des formules.

98. Il n'est pas inutile de faire ressortir l'homogénéité des équations obtenues dans le courant de ce chapitre.

Prenons pour exemple l'équation des moments fléchissants



$$\frac{EI}{\rho} = M.$$

Pour faire voir qu'elle est homogène, il suffit d'observer que le moment M est le produit d'une force par une longueur ; que le coefficient d'élasticité est une force rapportée à l'unité de surface, c'est-à-dire le quotient de la division d'une force par le carré d'une ligne ; enfin que ρ est une longueur et que I est un produit de quatre dimensions linéaires. On peut donc poser

$$M = Fl, \quad E = \frac{F'}{l'^2}, \quad I = l''^4, \quad \rho = l'''$$

F et F' représentant des forces, l, l', l'', l''', des longueurs.

L'équation se réduit à la formule suivante :

$$\frac{\frac{F'}{l'^2} \times l''^4}{l'''} = Fl$$

ou bien

$$\frac{F'}{F} = \frac{l\, l'''\, l'^2}{l''^4},$$

équation où n'entrent plus que des rapports numériques entre quantités de même nature.

Prenons encore les équations qui nous donnent les flèches prises par une poutre sous l'action de certaines forces.

Nous avons trouvé la formule $f = \frac{Pa^3}{EI} \times \theta$, où P est un poids ou une force, θ un coefficient numérique, a une longueur ; E et I ont les mêmes significations que dans l'exemple précédent. Faisons les substitutions comme tout à l'heure, et nous aurons

$$f = \frac{P \times a^3}{\frac{F'}{l'^2} \times l''^4} \times \theta = \frac{P}{F'} \times \frac{a^3 \times l'^2}{l''^4} \times \theta,$$

$\frac{P}{F}$ et θ sont deux nombres ; la fraction $\frac{a^3 \times l'^2}{l''^4}$ ayant au numéra-

teur cinq dimensions, et seulement quatre au dénominateur, se réduit à une simple longueur, de même nature que la flèche f.

Si la charge était uniformément répartie, la formule qui donne la flèche deviendrait

$$f = \frac{pa^4}{EI} \times \theta$$

et le résultat serait le même; car alors p serait *une force rapportée à une longueur*, en sorte que le produit pa serait une force, et entrerait dans le calcul au même titre que le poids P.

On n'éprouvera donc jamais d'embarras quand on voudra faire les applications numériques des formules.

Dans ces sortes de questions on n'a à considérer, en dernière analyse, que des forces et des dimensions linéaires. Les formules de la dynamique contiennent en outre le temps et les masses; elles sont un peu plus compliquées, mais elles peuvent s'interpréter d'une manière analogue.

SIMILITUDE DES POUTRES AU POINT DE VUE DE LA RÉSISTANCE.

99. Soit a la portée d'une poutre;

P, P', P'', ... les forces normales qui y sont appliquées, en des points dont les abscisses, mesurées sur la poutre, sont p, p', p'',..;

Ω, la section transversale de la poutre;

I, le moment d'inertie de cette section par rapport à la droite menée par son centre de gravité perpendiculairement au plan de symétrie.

Considérons une seconde poutre dont la section ait la même forme que la première, et supposons qu'on puisse passer de l'une à l'autre en multipliant

Toutes les longueurs a, p, p', p'', ... par un même coefficient α;
Les dimensions en largeur de la section par un coefficient β;
Les dimensions en hauteur de la section, par un coefficient γ;
Les forces par un coefficient ε.

Supposons enfin que le coefficient d'élasticité soit E pour la première poutre et E' pour la seconde.

La seconde poutre aura une portée αx; elle sera soumise à des forces normales $P\varepsilon$, $P'\varepsilon$, $P''\varepsilon$,... appliquées en des points dont les abscisses seront $p\alpha$, $p'\alpha$, $p''\alpha$,... la section sera égale à $\Omega \times \beta\gamma$; le moment d'inertie de cette section, somme de produits dans lesquels entrent trois dimensions en hauteur et une dimension en largeur, sera égal à $I \times \beta\gamma^3$.

Les moments fléchissants M de la première poutre deviendront $M \times \alpha\varepsilon$ pour la seconde. Or on a $\rho = \frac{EI}{M}$; les rayons de courbure seront donc multipliés, quand on passe de la première poutre à la seconde, par

$$\frac{E'}{E} \times \frac{\beta\gamma^3}{\alpha\varepsilon}.$$

La résistance par unité de surface, $R = \frac{Mv}{I}$, sera multipliée par le produit

$$\frac{\alpha\varepsilon \times \gamma}{\beta\gamma^3}, \text{ ou par } \frac{\alpha\varepsilon}{\beta\gamma^2}.$$

La résistance moyenne à l'effort tranchant est donnée pour chaque section par une expression de la forme $\frac{\Sigma P}{\Omega}$; elle sera donc multipliée par

$$\frac{\varepsilon}{\beta\gamma}.$$

L'angle très-petit, $\frac{dy}{dx}$, qui mesure la déviation de la fibre neutre est donné par l'équation

$$EI\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg}\varphi\right) = \int M dx.$$

Cet angle est donc homogène à

$$\frac{\int M dx}{EI},$$

et par suite il est multiplié dans la seconde poutre par le nombre

$$\frac{\alpha\varepsilon\times\alpha}{\left(\frac{E'}{E}\right)\times\beta\gamma^3}, \text{ ou par } \frac{E}{E'}\times\frac{\alpha^2\varepsilon}{\beta\gamma^3}.$$

Enfin, les flèches y sont données par l'équation

$$EI(y - x \operatorname{tg}\varphi) = \iint M dx^2;$$

elles sont donc multipliées par

$$\frac{\alpha\varepsilon\times\alpha^2}{\left(\frac{E'}{E}\right)\times\beta\gamma^3} = \frac{E\alpha^3\varepsilon}{E'\beta\gamma^3}.$$

Quand on a étudié la déformation et la répartition des pressions dans la première poutre, on peut en déduire par de simples multiplications les résultats relatifs à la seconde.

Nous donnerons deux exemples de l'emploi de cette méthode.

1° Cherchons à quelles conditions les coefficients α, β, γ, ε, doivent satisfaire pour que les deux poutres, supposées formées de la même matière, subissent les mêmes pressions aux points homologues.

Il faut et il suffit pour cela que R et R′ soient respectivement les mêmes, et par conséquent que les multiplicateurs $\frac{\alpha\varepsilon}{\beta\gamma^2}$ et $\frac{\varepsilon}{\beta\gamma}$ soient égaux à l'unité. On aura donc

$$\varepsilon = \beta\gamma, \quad \text{et} \quad \alpha = \gamma.$$

Si ces conditions sont remplies, les flèches prises par les deux poutres seront entre elles dans le rapport exprimé par le nombre α. On a, en effet, pour le rapport des flèches le nombre $\frac{\alpha^3\varepsilon}{\beta\gamma^3}$, puisque E est supposé égal à E′; or

$$\alpha^3 = \gamma^3, \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon}{\beta} = \gamma;$$

donc

$$\frac{\alpha^3 \varepsilon}{\beta \gamma^3} = \gamma = \alpha.$$

2° Une poutre de section rectangulaire, ABCD, chargée de poids, repose sur le côté CD; *on lui donne quartier* sans rien changer aux charges qu'elle supporte, c'est-à-dire on la couche sur le côté AD; on demande les modifications qui en résultent dans la distribution des pressions et dans les flèches prises par la poutre.

Fig. 103.

Les longueurs sont les mêmes dans les deux poutres, ainsi que les forces et que les coefficients d'élasticité. Donc

$$\alpha = 1, \quad \varepsilon = 1 \quad \text{et} \quad E = E'.$$

La dimension horizontale CD de la première poutre devient égale à AD dans la seconde; le rapport β est donc égal au rapport $\frac{AD}{CD}$ des côtés du rectangle. Le rapport γ est au contraire $\frac{CD}{AD}$; donc $\gamma = \frac{1}{\beta}$. Il en résulte que les charges R, qui correspondent à la flexion, sont multipliées par le rapport $\frac{1}{\beta\gamma^2}$, ou par le facteur β;

Que les charges R', qui correspondent à l'effort tranchant sont multipliées par $\frac{1}{\beta\gamma}$, c'est-à-dire par l'unité;

Que les flèches sont multipliées par $\frac{1}{\beta\gamma^3}$, ou par $\frac{1}{\gamma^2}$, ou enfin par β^2.

DÉFINITION DE LA RAIDEUR D'UNE POUTRE.

100. La flèche f, prise par une poutre sous l'action d'une force unique P ou d'une charge également répartie pa, est donnée par les formules

$$f = \frac{pa \times a^3}{EI} \times \frac{5}{384} \quad \text{ou} \quad \frac{pa \times a^3}{EI} \times \frac{1}{384},$$

suivant qu'elle est simplement posée où encastrée à ses deux bouts, ou bien

$$f = \frac{Pa^3}{EI} \times \frac{1}{3},$$

$$f = \frac{pa \times a^3}{EI} \times \frac{1}{8}$$

si elle est encastrée par un bout.

La raideur est mesurée par le rapport, $\frac{P}{f}$ ou $\frac{pa}{f}$, de la force à la flèche qu'elle produit.

On voit que, toutes choses égales d'ailleurs, la raideur est proportionnelle au produit $\frac{EI}{a^3}$. Or I est proportionnel au produit b^3c, b désignant la dimension verticale de la section et c la dimension horizontale; I s'exprime par ce produit multiplié par un facteur numérique qui dépend de la forme de la section. La raideur d'une poutre est donc proportionnelle au rapport

$$\frac{Eb^3c}{a^3}, \quad \text{ou à} \quad Ec \times \left(\frac{b}{a}\right)^3.$$

Si E et c restent les mêmes, elle est proportionnelle au cube du rapport de $\frac{b}{a}$, qui mesure pour ainsi dire le *surbaissement* de la poutre en élévation.

De là, l'utilité qu'il y a à augmenter la hauteur de la poutre proportionnellement à sa portée. Le rapport $\frac{b}{a}$ ne descend guère au-dessous de $\frac{1}{12}$, et il atteint quelquefois $\frac{1}{8}$.

PIÈCES LÉGÈREMENT COURBÉES.

101. Tous les problèmes que nous avons traités supposent que la pièce considérée est droite dans son état naturel. Mais cette hypo-

thèse n'est pas indispensable. On sait que le principe général de la superposition des effets des forces consiste en ce qu'un nouveau groupe de forces appliqué à une pièce déjà fléchie, y produit un effet partiel qui s'ajoute algébriquement aux effets déjà produits. Si la pièce a naturellement une légère courbure, les forces qu'on y appliquera feront subir de même aux ordonnées de la pièce des variations égales à celles qu'elles produiraient sur la poutre supposée rectiligne, et les mêmes équations subsisteront pour ces deux pièces, pourvu que l'on compte les abscisses sur la fibre neutre dans son état naturel, ou sur un axe rectiligne parallèle à sa direction générale, et les ordonnées parallèlement aux forces à partir de la fibre neutre non fléchie.

REMARQUE GÉNÉRALE.

102. Dans les problèmes relatifs à la flexion des poutres droites, on suppose en général que la déformation reste assez petite pour n'altérer sensiblement ni les forces, ni les coordonnées de leurs points d'application.

C'est pour cela qu'on prend les moments des forces comme si la pièce était dans son état naturel, tandis qu'en toute rigueur, il faudrait les prendre dans l'état de flexion, puisque l'équilibre élastique suppose cet état réalisé. Comme on ne peut prétendre à une solution tout à fait rigoureuse, on suit cette méthode approximative, qui a l'avantage de rendre les calculs beaucoup plus faciles.

Nous verrons un peu plus loin (§ 104) un exemple dans lequel on ne peut se contenter de cette approximation.

THÉORÈMES SUR LA FLEXION DES POUTRES DROITES.

103. — *Quand une poutre droite est sollicitée par des forces normales, l'effort tranchant en un point donné est égal à la dérivée du moment fléchissant en ce point par rapport à l'abscisse.*

Nous allons démontrer d'une manière générale cette proposition, que jusqu'à présent nous avons seulement vérifiée dans divers cas particuliers.

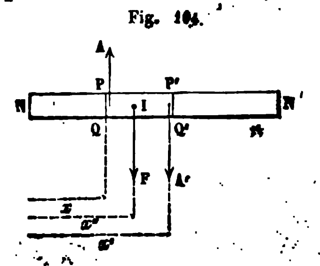


Fig. 104.

Considérons une poutre NN'; coupons-la par deux plans transversaux PQ, P'Q', définis par leurs abscisses, x, x', et supposons la distance PP', ou $x'-x$, infiniment petite.

Soit M le moment des forces élastiques développées sur la section PQ dans le tronçon PP'; il est égal, en grandeur et en signe, au moment fléchissant des forces extérieures appliquées au tronçon NPQ.

Soit de même M' le moment des forces élastiques développées dans la section P'Q', et dans ce même tronçon PP'; il est égal en valeur absolue, mais de signe contraire, au moment fléchissant des forces extérieures appliquées au tronçon P'Q'N.

Soit A la résistance à l'effort tranchant dans la section PQ prise sur l'élément de poutre PP'; elle est égale en grandeur et en signe à l'effort tranchant dû aux forces appliquées au tronçon PQN.

Soit A' la résistance à l'effort tranchant dans la section P'Q', et sur l'élément PP'; elle est égale en valeur absolue, mais de signe contraire, à l'effort tranchant dû aux forces appliquées à la partie P'Q'N.

Appelons enfin F la résultante des forces extérieures qui agissent sur la poutre dans l'intervalle PP'; cette force pourra être considérée comme appliquée en un point I de cet intervalle, si l'intervalle PP' est suffisamment petit. Soit x'' l'abscisse du point I.

L'élément de poutre PQQ'P' est en équilibre sous l'action de la force extérieure F, des forces moléculaires A, A', et des deux couples de forces élastiques M et M'. Les conditions d'équilibre se réduisent à deux, celles des forces et celles des moments.

L'équation des forces montre que

$$A = F' + A', \quad \text{ou que} \quad A' - A = -F,$$

et l'équation des moments, pris par rapport à un point de la section P'Q', nous donne :

$$M - M' + A(x' - x) - F(x' - x'') = 0.$$

Ces équations ont lieu quelle que soit la longueur PP' de l'élément considéré. Supposons-la infiniment petite. Il peut arriver deux cas, suivant qu'en faisant décroître indéfiniment la distance $x' - x$, la force F reste finie, ou devient infiniment petite.

Si, lorsque PP' est infiniment petit, la force F est aussi infiniment petite, de telle sorte que le rapport $\frac{F}{PP'}$ soit un nombre fini, on peut assimiler la force F à un poids également réparti de P en P', à raison de p unités de poids par unité de longueur. On aura donc dans ce cas, $F = p \times PP'$.

Remplaçons donc $x' - x$ par dx, $M' - M$ par dM, $A' - A$ par dA, et F par pdx. Observons de plus que $x' - x''$ est moindre que $x' - x$ ou que dx, de sorte que le produit $F(x' - x'')$ se réduit à un infiniment petit du second ordre, plus petit que pdx^2. Supprimant ce terme dans notre seconde équation, nous aurons en définitive

$$dA = -pdx,$$
$$dM = Adx.$$

De cette dernière équation, on tire $\frac{dM}{dx} = A$, ce qui démontre le théorème.

On a de plus

$$\frac{dA}{dx} = -p,$$

et enfin

$$\frac{d^2M}{dx^2} + p = 0.$$

Si p est une constante, l'intégration de ces équations donnera pour A une équation linéaire, $A = -px + C$, et pour M l'équation d'une parabole,

$$M = -\frac{1}{2}px^2 + Cx + C',$$

résultats déjà obtenus dans les exemples que nous avons examinés.

Si p, au lieu d'être constant, est une fonction de x, l'intégration donnera les expressions analytiques de A et de M.

2° Supposons qu'au point P, la poutre ait à subir l'action d'une force finie et isolée. Alors F n'est plus infiniment petite, et la différence A' — A est finie et égale à — F. La fonction A n'est donc plus continue pour la valeur de x correspondante à la section P. Pour cette section, il y a, en réalité, deux efforts tranchants, l'un situé un peu avant, l'autre un peu après la force F. Mais on a toujours

$$A' - A = -F$$

et

$$dM = (A - F)dx.$$

La première équation nous apprend que A — F est égal à A' ; substituant dans la seconde, il vient

$$\frac{dM}{dx} = A'.$$

Cette expression montre encore que l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse ; seulement, pour les valeurs positives de dx, il faut introduire dans la formule celui des deux efforts tranchants qui correspond aux points situés un peu à droite de la force F. La relation

$$\frac{dM}{dx} = A$$

est donc générale, à la condition de tenir compte de la discontinuité de la fonction A, due à l'action des forces isolées.

Lorsqu'une poutre portant des charges réparties également ou inégalement, est sollicitée en outre par des forces isolées, si l'on appelle p le poids, constant ou variable, qui s'y applique par unité de longueur en un point défini par son abscisse x, on devra, pour le tracé des efforts tranchants, se servir de l'équation

$$\frac{dA}{dx} = -p$$

dans tous les intervalles compris entre deux forces isolées consécutives ; puis, au passage de l'un de ces intervalles au suivant, on emploiera la formule

$$A' - A = -F,$$

qui donnera la variation brusque subie par la fonction A, au moment où la variable x atteint et dépasse l'abscisse du point d'application de la force isolée F. Le contour représentatif des valeurs de A sera donc entièrement défini par ces équations, à une constante près, qu'il faudra déterminer dans chaque cas particulier.

Pour en déduire les valeurs des moments fléchissants, on se servira de l'équation

$$dM = A dx,$$

laquelle est vraie en mettant pour A ses valeurs successives, continues ou discontinues. La courbe des valeurs de M a donc pour ordonnées des longueurs proportionnelles aux aires, $\int A dx$, du contour représentatif des efforts tranchants ; aux points où A change brusquement de valeur, la courbe des M a un point anguleux, mais ses ordonnées varient toujours d'une manière continue.

Nous avons constaté un tracé de cette nature en étudiant le problème de la poutre droite posée sur trois appuis de niveau (§ 94).

L'équation $\frac{dM}{dx} = A$ définit le signe de A, puisque nous avons fait une convention sur le signe de M. On voit que l'effort tranchant doit être considéré comme positif quand il tend à faire glisser de bas en haut le tronçon situé à gauche du plan sécant sur le tronçon de droite. Si l'on faisait une convention contraire, il faudrait changer de signe de A dans la formule $\frac{dM}{dx} = A$.

104. Ce théorème permet de résoudre la question suivante : *Étant*

donnée une pièce droite, de section constante et de longueur l, posée sur deux appuis de niveau, trouver les charges à lui appliquer pour faire prendre à la fibre moyenne une forme déterminée.

On suppose donnée l'équation $y = f(x)$ de la courbe que doit reproduire la fibre moyenne par suite de la déformation ; l'ordonnée y est supposée très-petite pour toute valeur de l'abscissse comprise entre $x = 0$ et $x = l$; il faut en outre que les tangentes à la courbe donnée, menées entre ces deux limites, fassent un angle très-petit avec l'axe des x, de telle sorte que la longueur de la courbe soit sensiblement égale à l ; qu'enfin pour $x = 0$, et pour $x = l$, la courbe donnée ait une courbure nulle, et passe par les points d'appuis.

Appelons p la charge par unité de longueur à répartir en un point x ; nous aurons en multipliant y par EI, produit connu puisque la matière et la section de la poutre sont supposées données :

$$EIy = EIf(x) = F(x), \qquad \text{fonction connue;}$$

Donc

$$EI\frac{dy}{dx} = F'(x)$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = F''(x) = M$$

$$\frac{dM}{dx} = F'''(x) = A$$

$$\frac{dA}{dx} = F^{IV}(x) = -p.$$

Cette dernière équation donne la loi de la répartition cherchée. Pour que le problème soit possible dans les conditions de l'énoncé, il faut que p soit partout positif.

Le poids par unité de longueur étant ainsi déterminé en chaque point, on en déduit l'effort tranchant A, en observant que

$$A = X - \int_{x=0}^{x} p\,dx,$$

X étant la réaction de l'appui correspondant à $X = 0$.

Or cette réaction est déterminée en fonction des poids par l'équation des moments par rapport à l'autre appui,

$$Xl = \int_0^l p(l - x)dx = l\int_0^l p\,dx - \int_0^l px\,dx.$$

Substituant cette valeur de X, il vient

$$A = \int_o^l pdx - \frac{1}{l}\int_o^l pxdx - \int_o^x pdx,$$

équation où il ne reste plus rien d'arbitraire.

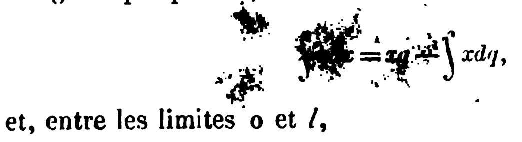
Mais $M = \int_o^x Adx$; le choix des limites annule M pour $x = o$. Il faut de plus que M soit nul pour $x = l$. On doit donc avoir, pour satisfaire à toutes les conditions,

$$\int_o^l Xdx - \int_o^l dx \int_o^x pdx = o.$$

Or cette équation est satisfaite. Posons en effet

$$\int_o^x pdx = q.$$

L'intégrale double $\int_o^l dx \int_o^x pdx$ revient à l'intégrale simple $\int_o^l qdx$. Intégrons par parties, nous aurons



$$= xq - \int xdq,$$

et, entre les limites o et l,

$$\int_o^l qdx = lQ - \int_o^l xdq,$$

en appelant Q la charge totale $\int_o^l pdx$. Mais $dq = pdx$, de sorte que l'équation précédente se change en

$$\int_o^l qdx = lQ - \int_o^l pxdx = l\int_o^l pdx - \int_o^l pxdx.$$

Enfin $\int_o^l Xdx = Xl$, puisque X est constant. L'équation de condition revient donc à la suivante,

$$Xl - l\int_o^l pdx + \int_o^l pxdx = o,$$

ou à l'équation des moments, qui détermine X.

TRAVAIL DE LA FLEXION.

105. Nous avons vu (§ 14) que, lorsqu'une tige de longueur L et de section ω subit un allongement ou un raccourcissement égal à λ, le travail des actions moléculaires a pour valeur $\dfrac{\frac{1}{2}E\omega\lambda^2}{L}$.

Considérons (fig. 63, p. 195) la fibre mm', dont la longueur, primitivement égale à $IG = dx$, est devenue égale à mm'' par suite de la flexion du prisme; le travail correspondant subi par la fibre est donc

$$\frac{1}{2}E\omega \times \frac{(m'm'')^2}{IG}.$$

Remplaçons $m'm''$ par sa valeur $IG \times \dfrac{Gm'}{OI}$, et faisons la somme des expressions semblables pour tous les éléments de la section AB; il viendra pour le travail total de la déformation de l'élément prismatique ABA'B',

$$\sum \frac{1}{2}E\omega \times \frac{\overline{IG}^2 \times \dfrac{\overline{Gm'}^2}{(OI)^2}}{IG} = \frac{1}{2}E \times \frac{IG}{OI^2}\sum \omega \times Gm'^2 = \frac{1}{2}EI\frac{dx}{\rho^2}.$$

Tel est le travail moléculaire dû à la déformation pour une longueur infiniment petite dx de prisme.

L'intégrale de cette expression, prise entre deux limites, donnera le travail moléculaire accompli entre les deux sections correspondantes. Ce travail diffère de la somme des travaux des forces extérieures appliquées dans le même intervalle; la différence est la demi-force vive acquise par la masse de la poutre quand elle passe de sa position naturelle à sa position d'équilibre après la déformation.

Cherchons à calculer ce travail total.

Soit M le moment fléchissant des forces appliquées sur la poutre

entre le point $x = 0$ et le point dont l'abscisse est x. Nous aurons l'équation

$$\frac{EI}{\rho} = M,$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

et par suite

$$\frac{EI}{\rho^2} = \frac{M^2}{EI}.$$

Donc

$$\frac{1}{2} EI \int_0^x \frac{dx}{\rho^2} = \frac{1}{2EI} \int_0^x M^2 dx.$$

Intégrons par partie la différentielle $M^2 dx$. Il vient

$$\int M^2 dx = M \int M dx - \int dM \int M dx.$$

Or $\int_0^x M dx$ est égal au produit de EI par la variation de l'inclinaison $\frac{dy}{dx}$ de la fibre neutre déformée, entre les deux extrémités du tronçon que l'on considère ; nous pouvons donc poser

$$\int_0^x M dx = EI \left[\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \right].$$

Par suite

$$\int dM \int M dx = EI \int dM \left[\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \right] = EI \int \frac{dM}{dx} dy - EI \int \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 dM$$
$$= EI \int A dy - EI \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 M.$$

Donc enfin

$$\int_0^x M^2 dx = EIM \left[\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 \right] - EI \int_0^x A dy + EIM \left(\frac{dy}{dx} \right)_0$$
$$= EIM \frac{dy}{dx} - EI \int_0^x A dy.$$

Si l'on prend la poutre entière, posée ou encastrée sur ses appuis

extrêmes, on aura pour la limite $x = l$, soit $M = o$, soit $\frac{dy}{dx} = o$, et alors

$$\int_o^l M^2 dx = -EI \int_o^l A dy.$$

Le travail de la déformation est donc égal à

$$-\frac{1}{2}\int_o^l A dy.$$

Les limites de l'intégrale sont relatives à l'abscisse x.

106. *Exemple.* Prenons une poutre droite de longueur l, posée sur deux appuis de niveau, et chargée d'un poids Q en son milieu.

On aura $A = \frac{Q}{2}$ depuis $x = o$ jusqu'à $x = \frac{l}{2}$, et $A = -\frac{Q}{2}$ depuis $x = \frac{l}{2}$ jusqu'à $x = l$. A est donc constant dans toute l'étendue de chaque demi-poutre.

Or soit f la flèche. L'intégrale indiquée devient

$$\int_{x=o}^{x=l} A dy = \int_{x=o}^{x=\frac{l}{2}} \frac{Q}{2} dy + \int_{x=\frac{l}{2}}^{x=l} -\frac{Q}{2} dy$$
$$= \frac{Q}{2} \times f - \frac{Q}{2} \times (-f) = Qf,$$

et le travail des forces élastiques est par conséquent négatif et égal à $-\frac{1}{2} Qf$, moitié du travail du poids Q s'abaissant de la quantité f; résultat analogue à celui que l'on constate dans l'allongement d'un prisme élastique sous l'action d'un poids Q.

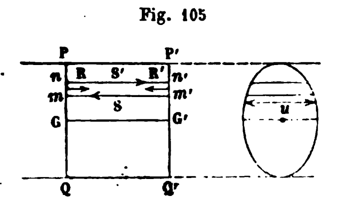
RÉPARTITION DE L'EFFORT TRANCHANT ET GLISSEMENT LONGITUDINAL DES FIBRES.

107. La théorie de la résistance au glissement longitudinal des fibres n'a été introduite dans l'enseignement élémentaire qu'à la suite d'une série d'expériences faites en Russie, par M. le colonel Jourafski, sur

la flexion de pièces formées de planches superposées (1). Voici comment on peut se rendre compte de ce nouvel effet.

Coupons la poutre par deux plans normaux infiniment voisins, PQ, P'Q', définis par leurs abscisses x et $x+dx$; soit GG' le plan de la fibre neutre. Menons, parallèlement à ce plan, deux plans infiniment voisins mm', nn', définis par leurs ordonnées $Gm = v$, et $Gn = v + dv$. Ces deux plans intercepteront dans l'élément de la poutre PQQ'P' une tranche ou fibre particulière, projetée en $mm'n'n$.

Fig. 105



La pression R développée par la flexion sur l'unité de surface au point m est donnée par l'équation

$$\frac{RI}{v} = M, \quad \text{d'où l'on tire} \quad R = \frac{Mv}{I}.$$

Appelons u la largeur de la section de la poutre au point m. La section transversale de la fibre $mm'n'n$ est égale à udv; et, par suite, la fibre reçoit sur sa face mn une pression totale égale à $Rudv$.

Sur sa face $m'n'$, la fibre reçoit en sens contraire une pression totale égale à $R'udv$, en appelant R' la valeur que prend R dans la section $m'n'$; en somme, la fibre mm' est sollicitée par une pression totale égale à la différence $(R'-R)udv$. Mais $R'-R$ est la différentielle partielle de R relativement à x, et nous pouvons remplacer, suivant la notation consacrée, $R'-R$ par $\frac{dR}{dx}dx$; la poussée subie par la fibre est donc mesurée par l'expression analytique

$$u\frac{dR}{dx}dxdv.$$

Cette force horizontale est équilibrée par les actions moléculaires développées par la cohésion de la matière dans les plans mm', nn'.

(1) *Annales des ponts et chaussées*, 1856.

Désignons par S la mesure de cette force de cohésion, rapportée à l'unité de surface, dans le plan mm'. S sera, dans l'intervalle des plans PQ, P'Q', une fonction de v, et nous retrouverons cette force dans le plan nn', augmentée de sa différentielle partielle relative à v, et dirigée en sens contraire.

La surface d'application de la première force est égale à udx; la surface d'application de la seconde est $\left(u+\frac{du}{dv}dv\right)dx$, et prenant la différence de ces actions contraires, il vient, en effaçant les infiniment petits du second ordre,

$$\left(S+\frac{dS}{dv}dv\right)\left(u+\frac{du}{dv}dv\right)dx - Sudx$$
$$=\frac{dS}{dv}udvdx + S\frac{du}{dv}dvdx$$
$$=\frac{d(Su)}{dv}dvdx.$$

L'équation des forces projetées sur un axe parallèle à la poutre est donc simplement

$$u\frac{dR}{dx}dxdv=\frac{d(Su)}{dv}dvdx,$$

ou bien

$$u\frac{dR}{dx}=\frac{d(Su)}{dv}.$$

Supposons que la section de la pièce soit la même en tous les points de la portée. De l'équation $R=\frac{Mv}{I}$, dans laquelle I sera constant, on déduira, en prenant la dérivée par rapport à x,

$$\frac{dR}{dx}=\frac{v}{I}\frac{dM}{dx}=\frac{Av}{I},$$

et

$$\frac{d(Su)}{dv}=\frac{Auv}{I}.$$

L'effort tranchant total, A, est une fonction de x seul; on aura donc, en intégrant sans faire varier x,

$$Su=\int_0^v\frac{Auvdv}{I}+H,$$

H étant une constante arbitraire par rapport à v, c'est-à-dire une fonction de x seul.

A et I peuvent sortir du signe $\int$, puisqu'ils sont indépendants de v; posons

$$\int_0^v uvdv = \varphi(v);$$

la fonction φ est déterminée par la forme même de la section ; c'est une fonction continue quelle que soit cette forme, et elle s'annule pour $v = o$, c'est-à-dire pour la fibre moyenne ; elle exprime la somme des moments des éléments de sections par rapport à la ligne neutre. On a en définitive :

$$uS = \frac{A\varphi(v)}{I} + H.$$

Si l'on fait $v = o$, et qu'on appelle u_0 la valeur correspondante de u, ou la largeur de la pièce dans le plan de la fibre moyenne, il vient $H = u_0 S_0$. Le produit uS est la mesure de la résistance totale au glissement des fibres, rapportée à l'unité de longueur de la poutre, pour une fibre définie par la quantité v ; H est cette même mesure pour le plan de la fibre neutre.

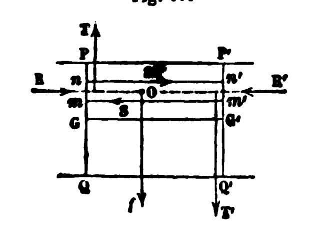
Pour trouver la valeur de H, faisons $v = v'$, valeur extrême de v ; nous devrons trouver $S = o$, puisqu'il n'y a plus de cohésion sur la fibre extrême de la pièce. Donc

$$H = \frac{A}{I}\varphi(v'), \quad \text{et par conséquent} \quad uS = \frac{A}{I}[\varphi(v) - \varphi(v')].$$

108. La considération du glissement longitudinal conduit à la répartition de l'effort tranchant total A, entre les différents points de la section PQ.

Appelons T la résistance à l'effort tranchant rapportée à l'unité de surface, telle qu'elle existe dans la fibre mn. La résistance totale développée en mn sera $Tudv$. Dans la section $m'n'$, nous aurons de même une résistance $T'udv$, et T' ne différera de T que d'une quantité infiniment petite, égale à la différentielle partielle de T par rapport à x

Fig. 106.



De même les résistances au glissement étant S et S′ par unité de surface, les résistances totales sont $Sudx$, et $S'u'dx$, S′ et u' différant respectivement de S et de u, de quantités infiniment petites, égales à leurs différentielles partielles par rapport à v.

La fibre est encore sollicitée par des forces, $Rudv$, $R'udv$, qui s'exercent dans le sens de la longueur et suivant la ligne moyenne de la fibre, et par une force f, qu'on peut supposer appliquée en un point O de cette ligne moyenne, et qui représente la part des forces extérieures appliquée directement à cette fibre.

Prenons par rapport au point O, le moment de toutes ces forces qui se font équilibre. Les moments des forces R, R′ et f seront nuls, puisque ces forces passent par le centre des moments. Restent donc les moments des forces S, S′, T, T′, qui sur la figure tendent toutes à faire tourner dans le même sens leurs points d'application. Ces forces, différant infiniment peu deux à deux, se réduisent à la limite à deux couples, et la somme des moments de ces couples doit être égale à zéro : on a donc

$$Sudx \times dv + Tudv \times dx = 0,$$

et par suite

$$S + T = 0, \quad \text{ou} \quad T = -S,$$

d'où résulte le théorème suivant : *En un point quelconque, la résistance au glissement longitudinal des fibres est égale, en valeur absolue, à la résistance locale à l'effort tranchant, rapportée à l'unité de surface* (1).

109. *Application au rectangle* a × b.

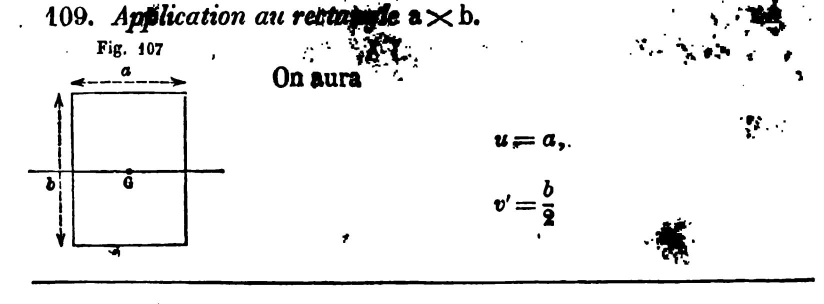


Fig. 107

On aura

$$u = a,$$

$$v' = \frac{b}{2}$$

(1) Cette égalité n'est qu'un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale de la théorie de l'élasticité. En un point donné d'un corps solide, menons trois plans rectangulaires; évaluons les forces élastiques rapportées à l'unité de surface qui s'exer-

$$\varphi(v) = \int_0^v u dv = \int_0^v a dv = \frac{1}{2} a v^2$$

$$I = \frac{1}{12} a b^3.$$

L'équation

$$Su = \frac{A}{I}\left(\varphi(v) - \varphi(v')\right)$$

deviendra

$$Sa = \frac{A}{\frac{1}{12} a b^3}\left(\frac{1}{2} a v^2 - \frac{1}{2} a \frac{b^2}{4}\right), \quad \text{ou} \quad S = \frac{A}{ab}\left(\frac{6v^2}{b^2} - \frac{3}{2}\right).$$

Pour $v = 0$, on a $S = -\frac{3}{2}\left(\frac{A}{ab}\right)$; la résistance au glissement longitudinal est donc égale, en valeur absolue, à une fois et demie l'effort tranchant moyen $\frac{A}{ab}$.

Pour $v = \pm \frac{b}{2}$, on a $S = 0$, pour les faces horizontales de la pièce.

110. *Application à la poutre double* T. — Soit b la hauteur de la poutre; b' la hauteur de l'âme; a la largeur des tables; k, celle de l'âme; et soit c l'épaisseur des tables en sorte que $b = b' + 2c$.

Fig. 108.

Nous aurons de plus $u = k$, pour les valeurs de v comprises entre $-\frac{b'}{2}$ et $+\frac{b'}{2}$, et $u = a$ pour les valeurs de v comprises entre $-\frac{b}{2}$ et $-\frac{b'}{2}$, d'une part, et entre $+\frac{b'}{2}$ et $+\frac{b}{2}$, de l'autre.

---

cent en ce point sur chacun d'eux; décomposons-les ensuite parallèlement aux trois axes formés par les intersections mutuelles de ces plans; nous aurons ainsi pour chaque plan trois composantes, l'une normale au plan, et les deux autres situées dans le plan. Nous appellerons celles-ci *composantes tangentielles*. Cela posé, deux composantes tangentielles normales à l'intersection des deux plans où elles sont contenues chacune, sont égales entre elles, et par suite les six composantes tangentielles sont égales deux à deux. Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante : « Si, en un même point d'un milieu solide, E et E' sont les forces élastiques qui s'exercent sur deux éléments plans ω et ω', ayant respectivement pour normales les droites L et L', la projection de E sur L' est égale à la projection de E' sur L. » V. Lamé, *Leçons sur l'élasticité*, 2me leçon.

Donc

$$\int_o^v uvdv = \int_o^v kvdv = k\frac{v^2}{2},$$

si $v < \frac{b'}{2}$ est en valeur absolue; et

$$\int_{\frac{b'}{2}}^v uvdv = a\frac{v^2}{2} - a\frac{b'^2}{8},$$

si v est, en valeur absolue, supérieur à cette limite.

On a donc

$$\varphi(v) = k\frac{v^2}{2} \quad \text{de} \quad v = 0 \quad \text{à} \quad v = \frac{b'}{2}$$

et

$$\varphi(v) = \int_o^{\frac{b'}{2}} uvdv + \int_{\frac{b'}{2}}^v uvdv = a\frac{v^2}{2} - (a-k)\frac{b'^2}{8} \quad \text{de} \quad v = \frac{b'}{2} \quad \text{à} \quad v = \frac{b}{2}.$$

Mais

$$v' = \frac{b}{2},$$

Donc

$$\varphi(v') = \frac{ab^2}{8} - (a-k)\frac{b'^2}{8},$$

et enfin, substituant dans l'équation

$$u\mathrm{S} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}}\Big(\varphi(v) - \varphi(v')\Big),$$

on aura

$$\mathrm{S}k = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}}\left(k\frac{v^2}{2} - \frac{ab^2}{8} + (a-k)\frac{b'^2}{8}\right)$$

si v est compris entre

$$-\frac{b'}{2} \quad \text{et} \quad +\frac{b'}{2},$$

et

$$\mathrm{S}a = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{I}}\left(a\frac{v^2}{2} - (a-k)\frac{b'^2}{8} - \frac{ab^2}{8} + (a-k)\frac{b'^2}{8}\right) = \frac{\mathrm{A}a}{2\mathrm{I}}\left(v^2 - \frac{b^2}{4}\right)$$

si v est en dehors de ces limites. Mais *ces résultats sont en défaut pour les fibres* $\pm\frac{b'}{2}$, *où la largeur* u *de la section varie d'une ma-*

nière brusque; car notre analyse suppose expressément que u est une fonction continue de v.

111. L'effort tranchant et le moment fléchissant se répartissent dans l'étendue d'une section transversale suivant des lois inverses, pour ainsi dire. La résistance à l'effort tranchant est nulle sur les fibres les plus écartées de l'axe neutre, et elle est la plus grande dans le plan de cet axe. La résistance au moment fléchissant est la plus grande aux points les plus éloignés de la fibre neutre, et elle est nulle dans le plan de cette fibre. Ces circonstances justifient l'usage adopté par les constructeurs, d'attribuer exclusivement la résistance au moment fléchissant aux tables hautes et basses d'une poutre, et la résistance à l'effort tranchant à la paroi verticale qui les réunit l'une à l'autre.

112. Reportons-nous à la question traitée au § 81; nous avions laissé de côté la détermination des efforts de glissement T_u, T_v, parallèles aux axes GU, GV (*fig.* 68). Connaissant la loi de répartition de l'effort tranchant, nous pouvons en fixer les valeurs.

Observons d'abord que dans l'analyse du § 81, la variable u n'a pas la même signification que dans le calcul du § 107. Dans ce dernier paragraphe, u représente la largeur totale de la section à la distance v de la fibre neutre; dans le § 81, u est une ordonnée comptée à partir de l'axe de symétrie GV, perpendiculairement à cet axe. Revenons à cette notation; nous aurons à satisfaire aux trois équations

$$\iint T_u du dv = 0,$$

$$\iint T_v du dv = A,$$

$$\iint (T_v u - T_u v)\, du dv = 0.$$

Les doubles sommes sont étendues à tous les éléments de la section. On voit sur-le-champ qu'on satisfait à ces équations en posant $T_u = 0$, et en prenant pour T_v une fonction de v seul. Les équations se réduisent alors à deux, savoir

$$\iint T_v du dv = A$$

et

$$\iint T_v u du dv = 0,$$

et pour la simplicité de l'écriture nous supprimerons l'indice de T_v, la confusion avec T_u n'étant plus possible, puisque ce dernier effort est supposé nul et disparaît des équations.

La dernière équation est satisfaite d'elle-même, à cause de la symétrie de la section par rapport à son plan moyen VGX (*fig.* 68). L'intégrale $\int Tududv$ prise par rapport à u est nulle pour une bande entière de la section à la hauteur définie par la quantité v, puisque T, fonction de v seul, est constant pour tous les points de cette bande, et que le centre de gravité est sur l'axe GV.

Reste à vérifier l'équation

$$\iint Tdudv = A,$$

lorsqu'on y fait $T = -S$, en continuant d'appeler S la résistance par unité de surface au glissement longitudinal. La largeur totale de la section à la distance v de la fibre neutre n'est plus exprimée par u, mais bien par $2u$, u étant l'ordonnée positive du contour de la section. Intégrons d'abord la différentielle du entre les limites $-u$ et $+u$, nous aurons

$$\int_{v'}^{v''} 2Tudv = A;$$

nous prenons l'intégrale entre les limites v' et v'', qui correspondent aux points de la section les plus éloignés de la fibre neutre.

Mais (§ 107)

$$S \times 2u = \int_{v'}^{v} \frac{A}{I} \times 2uvdv = \frac{A}{I}\int_{v'}^{v} 2uvdv.$$

Soit donc

$$\int_{v'}^{v} 2uvdv = F(v),$$

fonction qui s'annule pour $v = v'$ et pour $v = v''$.

Nous aurons

$$2Tudv = -2Sudv = -\frac{Adv}{I}F(v),$$

et par suite

$$\int_{v'}^{v''} 2Tudv = -\frac{A}{I}\int_{v'}^{v''} F(v)\,dv.$$

Intégrons par parties, il viendra

$$\int F(v)dv = vF(v) - \int vF'(v)\,dv = vF(v) - \int 2uv^2dv.$$

Aux limites, $F(v)$ est nulle; donc

$$\int_{v'}^{v''} F(v)\,dv = -\int_{v'}^{v''} 2uv^2dv = -\,I.$$

Donc enfin

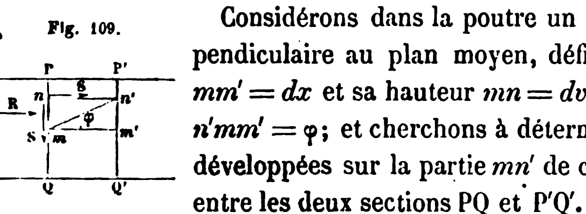
$$\int_{v'}^{v''} 2Tudv = \frac{A}{I} \times I = A,$$

et la vérification est opérée.

DISTRIBUTION DES EFFORTS SUIVANT UN PLAN DONNÉ DANS UNE POUTRE RECTANGULAIRE.

113. Soient PQ, P'Q' deux sections transversales infiniment voisines, faites dans une poutre droite de section rectangulaire; appelons dx leur distance PP'.

Fig. 109.



Considérons dans la poutre un plan mn', perpendiculaire au plan moyen, défini par sa base $mm' = dx$ et sa hauteur $mn = dv$, ou par l'angle $n'mm' = \varphi$; et cherchons à déterminer les actions développées sur la partie mn' de ce plan comprise entre les deux sections PQ et P'Q'.

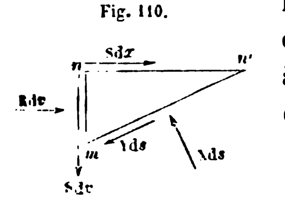
Pour cela, exprimons l'équilibre du volume mnn', compris sous les plans mn, nn' et mn'. Appelons R la compression positive ou négative qui s'exerce sur le plan mn;

S la résistance au glissement longitudinal le long de la face nn', résistance égale à l'effort tangentiel qui s'exerce sur la face rectangulaire nm;

Ces forces étant toutes rapportées à l'unité de surface, abstraction faite de la portion de force extérieure spécialement appliquée au morceau mnn'. Il y aura équilibre entre les forces Rdv (on suppose, pour simplifier, que la dimension de la poutre perpendiculairement au plan de la figure est égale à l'unité), Sdx, Sdv, et la résultante des forces développées dans le plan mn'.

Décomposons la résultante en deux forces : l'une normale X, l'autre Y, dirigée dans le plan mn'. On aura, en projetant toutes les forces sur une normale à mn', puis sur la droite mn' elle-même, et en appelant ds la longueur mn',

Fig. 110.



$$Xds = Sdx \sin\varphi + Sdv \cos\varphi + Rdv \sin\varphi,$$
$$Yds = Sdx \cos\varphi - Sdv \sin\varphi + Rdv \cos\varphi,$$

ou, en observant que

$$dx = ds \cos \varphi$$

et

$$dv = ds \sin \varphi,$$

et en divisant par ds,

$$X = S \cos \varphi \sin \varphi + S \sin \varphi \cos \varphi + R \sin^2 \varphi = S \sin 2\varphi + \frac{1}{2} R(1 - \cos 2\varphi),$$

$$Y = S \cos^2 \varphi - S' \sin^2 \varphi + R \sin \varphi \cos \varphi = S \cos 2\varphi + \frac{1}{2} R \sin 2\varphi.$$

Ces équations font connaître la compression X et la tendance au glissement Y qui existent dans un élément plan mn' quelconque. Elles permettent de résoudre certains problèmes. Proposons-nous, par exemple, de trouver les directions sur lesquelles la compression X est maximum. On fera $\frac{dX}{d\varphi} = 0$, ce qui conduit à l'équation

$$\text{tang } 2\varphi = -\frac{2S}{R},$$

et ce qui donne pour X

$$X = \frac{1}{2}(R \mp \sqrt{4S^2 + R^2}).$$

Les directions de glissement maximum sont celles pour lesquelles

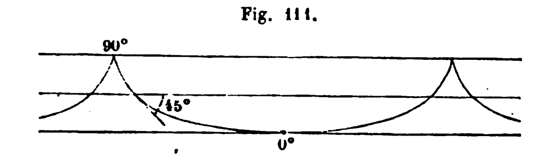
$$\text{tang } 2\varphi' = \frac{R}{2S},$$

de sorte que les angles 2φ et $2\varphi'$ diffèrent de 90°, et que les directions définies par φ et φ' se coupent sous des angles de 45°. Le maximum du glissement Y est donné par l'équation

$$Y = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + 4S^2}.$$

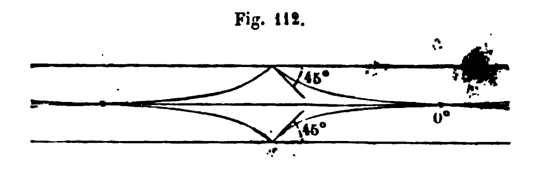
Dans une poutre à section rectangulaire, les *lignes de plus grande pression normale* coupent à 45° la fibre neutre; elles touchent et coupent à angle droit alternativement les fibres extrêmes.

Fig. 111.



Les lignes de plus grand glissement coupent à 45° les fibres extrêmes et touchent la fibre moyenne.

Fig. 112.



CHAPITRE II.

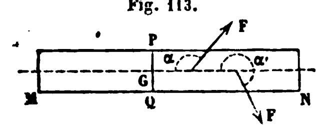
FLEXION PLANE DES POUTRES DROITES SOLLICITÉES PAR DES FORCES OBLIQUES A LEUR DIRECTION, MAIS DIRIGÉES DANS LE PLAN DE SYMÉTRIE.

---

114. Les lois de l'équilibre intérieur des pièces droites sollicitées par des forces quelconques contenues dans le plan de symétrie se déduisent, en appliquant le principe général de la superposition des effets des forces, des lois trouvées dans les cas particuliers où les forces agissent dans la direction même de la pièce, ou perpendiculairement à cette direction.

Soit MN une poutre droite, et soient F, F'..... les forces qui sollicitent cette pièce et qui sont toutes situées, par hypothèse, dans son plan de symétrie. Menons un plan PQ, perpendiculaire à sa direction, et considérons spécialement le tronçon PQN, sollicité par les forces F, F'.... Il y aura équilibre entre ces forces extérieures, et les forces moléculaires développées dans la section PQ.

Fig. 113.



Appelons α, α'..... les angles des forces F, F',..... avec la direction de la poutre; nous pouvons décomposer chacune de ces forces en deux composantes, l'une, $F \cos \alpha$, parallèle à la pièce; l'autre, $F \sin \alpha$, perpendiculaire.

La somme $F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + \ldots\ldots$ sera l'effort d'extension ou de compression exercé par les forces sur la section PQ ;

La somme $F \sin \alpha + F' \sin \alpha' + \ldots\ldots$ sera l'effort tranchant de la poutre dans cette section;

Et la somme des moments, $F \sin \alpha \times f + F' \sin \alpha \times f' + \ldots\ldots$, des composantes normales par rapport à un point de la section PQ, est le moment fléchissant de la poutre.

Chacun de ces trois efforts produit sur la pièce la même déformation que s'il agissait seul, et le problème de la flexion est ramené à la composition de ces effets.

On peut admettre que les composantes parallèles $F \cos \alpha$, $F' \cos \alpha'$,... sont toutes appliquées en un point de la fibre moyenne; dans ces conditions, l'effort d'extension ou de compression se trouve uniformément réparti dans chaque section.

Convenons de prendre positivement les compressions, et négativement les extensions, ce que nous avions déjà fait dans les exemples précédents; cela revient à prendre pour α l'angle formé par la direction d'une force F, avec la partie de la fibre neutre qui se dirige vers la section PQ, en tournant toujours dans un même sens.

La force $F \cos \alpha + F' \cos \alpha' + \ldots\ldots = P$, se répartissant également dans toute section Ω, y donne une compression par unité de surface égale à $\frac{P}{\Omega}$.

L'effort tranchant $F \sin \alpha + F' \sin \alpha' + \ldots\ldots = A$, ne se répartit pas également, ainsi qu'on l'a vu, dans la section Ω, mais il y développe un effort moyen, $\frac{A}{\Omega}$, tangentiel au plan PQ. L'effort tranchant ne produit d'ailleurs qu'une déformation négligeable.

Le moment fléchissant $Ff \sin \alpha + F'f' \sin \alpha' + \ldots\ldots = M$, considéré seul, donnera dans la section PQ une distribution d'efforts normaux à ce plan PQ, définie par la formule $R = \frac{Mv}{I}$.

Réunissant ensemble le premier effort et le troisième, qui sont tous deux normaux au plan PQ, on aura la distribution définitive des compressions dans cette section par la formule

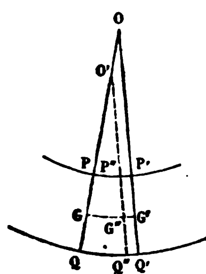
$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mv}{I}.$$

Les moments M sont toujours pris par rapport à la perpendiculaire au plan de symétrie, menée par le centre de gravité G de la section PQ. On remarquera que le moment M des forces normales, $F \sin \alpha$, est égal au moment des forces F elles-mêmes ; car les composantes $F \cos \alpha$, passant par le point G, ont un moment nul.

115. Il reste à chercher la forme prise par la fibre moyenne.

Si les composantes normales agissaient seules, la fibre moyenne GG′ prendrait une courbure dont le rayon ρ satisferait à l'équation

Fig. 114.



$$\frac{EI}{\rho} = M.$$

Soit O le centre de courbure de l'arc GG′ dans cette hypothèse.

L'effet des forces P, qu'on doit ajouter à celui des forces normales, produira une déformation égale sur toutes les fibres perpendiculaires au plan PQ.

Appelons dx la longueur de l'arc GG′ dans son état naturel. L'effet de la force P sera de raccourcir cet arc d'une quantité donnée par la formule $l = \frac{Pdx}{E\Omega}$, de sorte que l'arc dx deviendra, après cette déformation, égal à $dx\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)$.

Le résultat de l'application de la force P est donc de transporter le plan P′Q′ parallèlement à lui-même en P″Q″, d'une quantité $G'G'' = \frac{Pdx}{E\Omega}$.

Le rayon de courbure $\rho = OG$, pris par la fibre moyenne sous l'action des forces normales, est réduit, par l'effet des forces longitudinales, à $O'G = \rho_1$, et l'on a la proportion

$$\frac{O'G}{OG} = \frac{GG''}{GG'} = \frac{\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)dx}{dx} = 1 - \frac{P}{E\Omega},$$

donc

$$\rho' = \rho \times \left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right);$$

mais

$$\rho = \frac{EI}{M},$$

et enfin

$$\rho' = \frac{EI}{M}\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right) = \frac{EI}{M} - \frac{P}{\Omega} \times \frac{I}{M} = \left(E - \frac{P}{\Omega}\right)\frac{I}{M}.$$

Or le nombre E est toujours beaucoup plus grand que le rapport $\frac{P}{\Omega}$, et comme il n'est pas exactement connu, il serait tout à fait illusoire de conserver le terme $\frac{P}{\Omega}$ dans la parenthèse; pour le fer par exemple E atteint la valeur de 20 milliards, tandis que la pression moyenne, $\frac{P}{\Omega}$, est limitée à 6 ou 7 millions au maximum; or on est loin d'avoir déterminé la valeur numérique de E avec une approximation près d'un millième. Supprimant donc le terme $\frac{P}{\Omega}$, il vient la formule réduite

$$\rho' = \frac{EI}{M},$$

ou, en effaçant l'accent,

$$\frac{EI}{\rho} = M;$$

la suppression de $\frac{P}{\Omega}$ devant le nombre E revient à confondre le point O avec le point O', et la déformation se retrouve la même que si les composantes parallèles à la pièce n'existaient pas.

En résumé, on calculera pour les diverses sections les efforts normaux par unité de surface au moyen de la formule

$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mv}{I},$$

et on trouvera la forme prise par la fibre moyenne à l'aide de la formule

$$\frac{EI}{\rho} = M,$$

formule identique à celle que l'on a établie pour le cas des forces normales.

L'effort tranchant A est toujours égal à la somme algébrique des composantes normales, et la résistance moyenne par unité de surface dans la section PQ est égale à $\frac{A}{\Omega}$. Les forces P n'influent ni sur la distribution de l'effort tranchant, ni sur le glissement longitudinal des fibres.

Les composantes longitudinales n'entrant ni dans le moment M, ni dans l'effort tranchant A, on peut dire encore que l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'abscisse.

La fibre qui conserve sa longueur n'est plus la fibre moyenne; c'est la fibre pour laquelle R = o, ou celle qui est donnée par l'équation

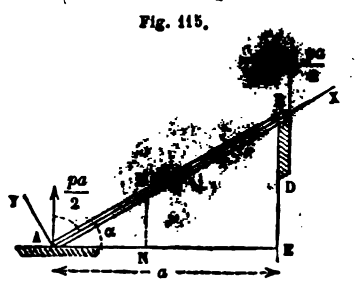
$$v = -\frac{PI}{M\Omega} = -\frac{PK^2}{M},$$

K étant le rayon de giration de la section.

APPLICATIONS

116. Soit AB une pièce droite inclinée, comme par exemple l'arbalétrier d'une toiture. Nous supposons qu'aux points A et B, la poutre soit coupée de telle sorte qu'elle pose par une surface horizontale sur les murs C et D qui lui servent d'appui. On pourra donc admettre qu'il n'y a aucune tendance au glissement, et que les réactions des appuis sont verticales. Appelons a la projection horizontale AE de la poutre, α l'angle BAE qu'elle fait avec l'horizon, et l la longueur AB.

Fig. 115.



Soit p le poids réparti uniformément sur la pièce par chaque unité de longueur prise sur la projection horizontale AE. Le poids

total de la pièce sera pa ; il se partagera également entre les deux appuis, qui supporteront chacun $\frac{pa}{2}$.

Prenons la fibre moyenne AB pour axe des x, et le point A pour origine. Considérons un point quelconque M, à une distance $AM = x$. Les poids répartis de A en M donnent une charge totale égale à $p \times AN = p \times x \cos\alpha$; d'où résultent les équations :

$$P = \frac{pa}{2} \sin\alpha - px \cos\alpha \times \sin\alpha \quad \text{(compression)},$$

$$A = \frac{pa}{2} \cos\alpha - px \cos\alpha \times \cos\alpha \quad \text{(effort tranchant)},$$

$$M = \frac{pa}{2} \times x \cos\alpha - px \cos\alpha \times \frac{x \cos\alpha}{2} \quad \text{(moment fléchissant)}.$$

Cherchons la forme de la fibre moyenne, en intégrant l'équation

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pa \cos\alpha}{2} x - \frac{1}{2} p \cos^2\alpha x^2 ;$$

ce qui conduit aux équations

$$EI \left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg}\varphi\right) = \frac{pa \cos\alpha}{4} x^2 - \frac{1}{6} p \cos^2\alpha x^3,$$

$$EI (y - x \operatorname{tg}\varphi) = \frac{pa \cos\alpha}{12} x^3 - \frac{1}{24} p \cos^2\alpha x^4.$$

Faisons $x = l$ dans la dernière équation, et nous devrons avoir

$$y = 0.$$

Donc

$$EI\, l \operatorname{tg}\varphi + \frac{pa \cos\alpha}{12} l^3 - \frac{1}{24} pl^4 \cos^2\alpha = 0,$$

et

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{pa \cos\alpha\, l^2}{12\, EI} + \frac{pl^3 \cos^2\alpha}{24\, EI}.$$

On peut remplacer $l \cos\alpha$ par a, et l par $\frac{a}{\cos\alpha}$; il viendra

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{pa^3}{12\, EI \cos\alpha} + \frac{pa^3}{24\, EI \cos\alpha} = -\frac{1}{24} \frac{pa^3}{EI \cos\alpha}.$$

Tout est alors déterminé dans l'équation de la fibre neutre.

La flèche f de la poutre, prise positivement, et rapportée à l'axe AX, sera donnée par la formule

$$f = \frac{pa^4}{\mathrm{EI}\cos^2\alpha} \times \frac{5}{384}.$$

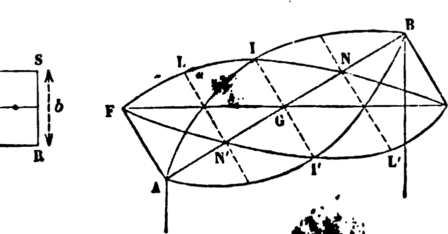
On calculera enfin les efforts auxquels la matière est soumise par la formule

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}}{\Omega} + \frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}.$$

117. Pour la discussion de cette formule, on pourra construire (fig. 116) des lignes dont les ordonnées représentent les valeurs de $\frac{\mathrm{P}}{\Omega}$ et $\frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}$. La section étant supposée partout la même, Ω et I sont des constantes; on prendra pour v les valeurs qui correspondent aux points les plus fatigués de la section, c'est-à-dire aux points les plus éloignés de la fibre neutre; ce qui donnera pour v deux valeurs constantes, l'une positive, l'autre négative. Il y aura donc deux courbes à construire pour représenter les valeurs qu'on doit attribuer à $\frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}$, l'une pour la face supérieure, l'autre pour la face inférieure de l'arbalétrier; chacune de ces courbes sera une parabole, comme on le voit par l'expression analytique de M. On ajoutera ensuite algébriquement les ordonnées de la droite $\frac{\mathrm{P}}{\Omega}$ aux ordonnées des deux courbes $\frac{\mathrm{M}v}{\mathrm{I}}$; ce qui conduira au tracé de deux nouveaux arcs paraboliques, dont on cherchera les plus grandes ordonnées prises en valeur absolue; les abscisses correspondantes indiqueront les sections où la matière supporte les plus grandes charges.

Épure des valeurs limites de R pour une section rectangulaire RST.

Fig. 116.



FGH, ligne droite, passant au milieu G de la portée AB. Les ordonnées de cette ligne représentent les valeurs de $\frac{P}{\Omega}$.

AIB, parabole des valeurs de $\frac{Mv}{I}$, pour v égal à sa limite positive, $+\frac{b}{2}$.

AI'B, la même parabole repliée au-dessous de la droite AB, et représentant par les ordonnées négatives les valeurs de $\frac{Mv}{I}$, pour v égal à sa limite négative, $-\frac{b}{2}$.

FLINH, parabole des valeurs de $\frac{P}{\Omega}+\frac{Mv}{I}$ pour $v=+\frac{b}{2}$ (face supérieure de l'arbalétrier).

HL'I'N'F, parabole des valeurs de $\frac{P}{\Omega}+\frac{Mv}{I}$ pour $v=-\frac{b}{2}$ (face inférieure de l'arbalétrier).

Ces deux paraboles sont symétriques l'une de l'autre par rapport au point G.

Les abscisses des points où la fonction $\frac{P}{\Omega}+\frac{Mv}{I}$ atteint son maximum, peuvent se déterminer sur l'épure; mais on peut aussi les chercher directement en observant qu'elles sont données par la relation

$$\frac{dP}{\Omega dx}+\frac{v}{I}\frac{dM}{dx}=\frac{dP}{\Omega dx}+\frac{v}{I}A=0,$$

ou bien

$$\frac{-p\cos\alpha\sin\alpha}{\Omega}+\frac{v}{I}\left(\frac{pa}{2}\cos\alpha-px\cos^2\alpha\right)=0.$$

Supprimant le facteur $p\cos\alpha$, et remplaçant v par $\pm\frac{b}{2}$, il vient en définitive

$$\frac{a}{2}-x\cos\alpha=\pm\frac{2I}{\Omega b}\sin\alpha.$$

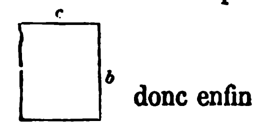


Fig. 117.

Mais pour le rectangle de dimensions $c \times b$, on a

$$I = \frac{1}{12} cb^3, \qquad \Omega = cb;$$

donc enfin

$$\frac{a}{2} - x \cos\alpha = \pm \frac{b \sin\alpha}{6}.$$

Le signe supérieur correspond à la face supérieure de l'arbalétrier, le signe inférieur à la face opposée.

Pour construire les points cherchés, prenons sur AB une longueur $A\alpha = \frac{b}{6}$; du point α, abaissons la verticale $\alpha\beta$, jusqu'à la rencontre de l'horizontale AE; projetons de même le point G, milieu de AB, en K sur la droite AE, et prenons de part et d'autre du point K, deux longueurs $K'K = K''K = \alpha\beta$; puis menons K'H, K''H', parallèles à GK. Les points H et H' seront les points cherchés. En effet, on a

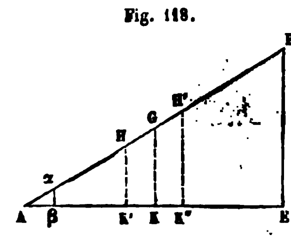


Fig. 118.

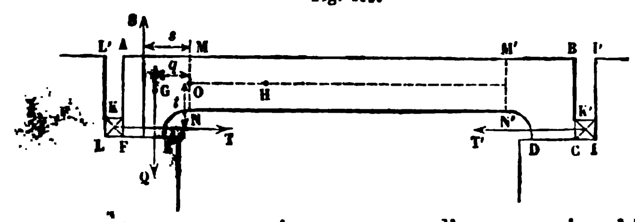
$$AK' = AH\cos\alpha \quad \text{et} \quad KK' = AK - AK' = \frac{1}{2}a - AH\cos\alpha = \alpha\beta = A\alpha\sin\alpha = \frac{1}{6} b \sin\alpha.$$

Donc AH est l'abscisse qui correspond à la détermination positive du second membre de la formule.

118. *Ponts encastrés de Clapeyron.*

Clapeyron a imaginé de donner à une poutre droite une sorte

Fig. 119.



d'encastrement sur ses appuis, au moyen d'une pression horizontale qui s'exerce sur un retour d'équerre adapté à la poutre. Soit ABCDEF la poutre; elle est droite entre les sections MN, M'N', et uniformément chargée de poids; elle est ensuite prolongée par les parties MAFEN, MB'CDN', dont le talon vient poser sur les assises horizontales CD, EF

des culées; des coins K et K′, enfoncés entre les extrémités AF, BC de la poutre et les faces verticales voisines LL′, II′ des culées, développent des poussées égales T, T′, qui s'exercent horizontalement sur les retours d'équerre. On peut régler à volonté cette poussée en donnant aux coins une épaisseur convenable.

Coupons la poutre suivant les plans MN, M′N′; appelons A l'effort tranchant dans l'une de ces sections et μ le moment fléchissant; en tout point H de la fibre moyenne défini par son abscisse $OH = x$, on aura par conséquent

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = Ax - \frac{1}{2} px^2 - \mu,$$

p étant le poids réparti uniformément par unité de longueur; la pièce sera dans les mêmes conditions qu'une pièce encastrée dans les sections MN, M′N′, si l'on a (§ 91)

$$\mu = \frac{1}{12} pl^2,$$

en désignant par l la distance des deux sections MN, M′N′. Or, exprimons l'équilibre du retour d'équerre AMNEF; cette pièce est soumise aux forces suivantes :

Son poids Q, appliqué au centre de gravité G (la surcharge répandue de A en M étant comprise dans le poids Q);

La réaction verticale S de l'appui;

La poussée horizontale T du coin K;

L'effort tranchant — A dans la section MN;

Le couple μ des forces élastiques dans la même section;

Enfin, une force égale à T, appliquée au point O, et égale et contraire à la compression développée dans la poutre.

On aura donc pour équations d'équilibre, d'abord

$$Q = S - A,$$

et comme

$$A = \frac{1}{2} pl,$$

$$Q = S - \frac{1}{2} pl.$$

On en déduit

$$S = \frac{1}{2} pl + Q,$$

ce qui fait connaître la réaction S; ensuite

$$\mu = Tt + Qq - Ss,$$

équation des moments des forces par rapport au point O. On suppose les bras de levier t et s connus, au moins par approximation. On a déterminé S; l'équation des moments fait connaître T :

$$T = \frac{\mu + Ss - Qq}{t} = \frac{\frac{1}{12} pl^2 + Ss - Qq}{t}.$$

On saura donc quelle force doit développer le coin K pour que la poutre soit dans les mêmes conditions qu'une poutre encastrée entre les sections MN et M'N'. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'alors la compression T règne dans toute la pièce, et qu'à la charge $\frac{Mv}{I}$ par unité de surface en un point d'une section quelconque, il faut ajouter la charge $\frac{T}{\Omega}$, correspondante à cet effort de compression.

PIÈCE PRESSÉE PAR SES ABOUTS.

119. *Pièce droite comprimée dans le sens de sa longueur par une force constante F.*

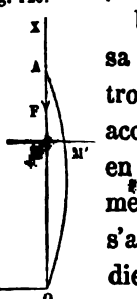


Fig. 120.

Une poutre droite OA, comprimée dans le sens de sa longueur par une force constante F, peut se trouver dans un état d'équilibre instable; si un accident quelconque vient la déranger de cet état, en y produisant une légère courbure, la flexion commence, et en général, une fois commencée, elle ne s'arrête à aucune limite. Nous nous proposons d'étudier en détail ce cas particulier.

Prenons pour axe des x la droite OA elle-même;

pour axe des y, une perpendiculaire à OA menée dans le plan où la flexion s'est produite, et supposons que les deux extrémités O et A de la tige soient assujetties à rester sur l'axe OX; l'une est fixée au point O, l'autre est mobile le long de la droite AO.

Considérons une section transversale M. Cette section supporte une compression $\frac{F}{\Omega}$ par unité de surface. Quant au moment fléchissant, il est nul dans l'état naturel de la pièce, et il ne commence à avoir une valeur différente de zéro que quand la pièce est déjà fléchie. On ne peut donc pas ici faire entrer dans l'équation les moments des forces prises dans l'état naturel, comme nous l'avons fait dans tous les problèmes précédemment traités.

Admettons donc que la poutre ait pris une certaine courbure AM'O, assez faible pour que la corde $AO = a$ soit sensiblement égale à l'arc AM'O. Le moment fléchissant au point M' sera le produit de la force F par le bras de levier MM' de la force, lequel bras de levier est égal à l'ordonnée de la courbe AM'O prise positivement, c'est-à-dire à $-y$. L'équation de la fibre neutre sera donc

$$M = -Fy,$$

ou bien

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Fy.$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre. A un coefficient constant près, la seconde dérivée de y par rapport à x doit être égale à y changé de signe; on voit immédiatement que y peut être exprimé par une fonction linéaire du sinus et du cosinus d'un arc proportionnel à x, et comme l'intégrale générale que nous cherchons doit renfermer deux constantes arbitraires, nous poserons

$$y = A\cos mx + B\sin mx,$$

en appelant A et B ces deux constantes, et m un facteur complètement déterminé.

Prenant en effet la seconde dérivée de y par rapport à x, il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -Am^2\cos mx - Bm^2\sin mx = -m^2y,$$

et comparant à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F}{EI}y,$$

on voit que l'on doit prendre

$$m = \pm\sqrt{\frac{F}{EI}}.$$

Adoptons le signe supérieur, et substituons dans l'intégrale générale ; elle deviendra

$$y = A\cos\sqrt{\frac{F}{EI}}\,x + B\sin\sqrt{\frac{F}{EI}}\,x.$$

Dans cette équation, il y a deux arbitraires A et B qu'on doit chercher à déterminer d'après les conditions particulières du problème.

Si l'on fait $x = o$, on doit avoir $y = o$. Or l'intégrale générale donne alors $y = A$. Donc $A = o$, et l'équation de la courbe se réduit à

$$y = B\sin\sqrt{\frac{F}{EI}}\,x.$$

Faisant ensuite $x = a$, on devra avoir aussi $y = o$. Donc, ou bien $B = o$, auquel cas la pièce reste complètement rectiligne, ou bien

$$\sin\sqrt{\frac{F}{EI}}\,a = o,$$

ce qui exige que l'arc $a \times \sqrt{\frac{F}{EI}}$ soit un multiple quelconque de la demi-circonférence π; K étant donc un entier quelconque, on doit avoir

$$a \times \sqrt{\frac{F}{EI}} = K\pi,$$

d'où l'on tire

$$F = EI \times \frac{K^2\pi^2}{a^2}.$$

L'analyse nous conduit donc à trouver une infinité de valeurs pour F, toutes comprises dans la formule

$$F = K^2 \times \frac{EI\pi^2}{a^2},$$

et dont la moindre correspond à la moindre valeur admissible pour l'entier K, c'est-à-dire à $K = 1$. On trouve, pour cette valeur de K,

$$F = \frac{EI\pi^2}{a^2}.$$

Telle est la moindre valeur qui puisse faire fléchir latéralement la poutre. Si F est au-dessous de cette limite, l'équilibre exige que B soit nul, et la flexion latérale est impossible; dans ce cas, la compression ne compromet pas la stabilité de l'équilibre.

120. Si la pièce était assujettie à passer par un point fixe C au milieu de sa longueur, l'ordonnée y devrait s'annuler pour $x = \frac{a}{2}$ et pour $x = a$. Il faudrait donc que l'on eût

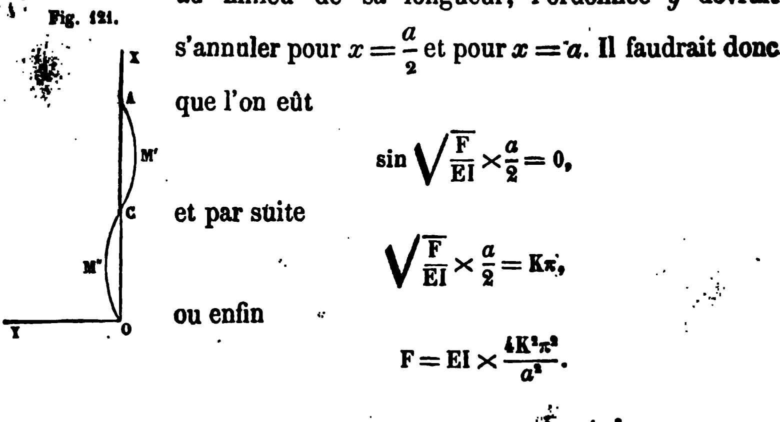


Fig. 121.

$$\sin \sqrt{\frac{F}{EI}} \times \frac{a}{2} = 0,$$

et par suite

$$\sqrt{\frac{F}{EI}} \times \frac{a}{2} = K\pi,$$

ou enfin

$$F = EI \times \frac{4K^2\pi^2}{a^2}.$$

La moindre valeur de F serait donc alors $EI \times \frac{4\pi^2}{a^2}$, c'est-à-dire qu'elle serait quadruple de celle qui suffirait pour produire la flexion si le point C n'était pas fixé; résultat facile à prévoir, car en réalité, chacune des moitiés AM'C, CM''O de la pièce peut être considérée comme une pièce isolée, ce qui revient à remplacer a par $\frac{a}{2}$ dans la

formule $F = \frac{EI\pi^2}{a^2}$, relative au cas où il n'y a aucun point fixe entre les extrémités de la poutre.

Fig. 122.

On reconnaîtrait de la même manière que, si la pièce avait deux points fixes, l'un au tiers, D, et l'autre aux deux tiers, E, de sa longueur, la moindre force F qui pût la faire fléchir serait égale à neuf fois la limite qui déterminerait la flexion si la poutre n'avait aucun point fixe entre A et O.

L'équilibre d'une pièce comprimée est donc stable lorsque la compression est moindre qu'une force égale à $\frac{EI\pi^2}{a^2} \times (n+1)^2$, n étant le nombre de points équidistants, ou de *nœuds*, qui, d'après les liaisons auxquelles la pièce est assujettie, doivent rester fixes entre ses deux extrémités.

121. Dans cette formule, figure le moment d'inertie I de la section par rapport à une droite menée dans son plan par son centre de gravité, perpendiculairement au plan suivant lequel la flexion tend à se produire. Pour appliquer la formule à la recherche de la limite inférieure de F, il faudra prendre celui de tous les moments d'inertie qui a la moindre valeur. Par exemple, si la section est rectangulaire, et si ses dimensions sont c et b, on devra prendre pour I le moment d'inertie $I = \frac{1}{12} cb^3$, par rapport à la droite II', la dimension b étant supposée plus petite que la dimension c.

Fig. 123.

Soit $I = \Omega \times \rho^2$, ρ étant le moindre rayon de giration de la surface ; on aura pour la plus basse limite de F

$$F = E\Omega\rho^2 \times \frac{\pi^2}{a^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{Fa}{E\Omega} = \frac{\rho^2\pi^2}{a}.$$

Or $\frac{Fa}{E\Omega}$ est le raccourcissement total de la tige OA sous l'action de la force F (§ 12). Il faut donc que le raccourcissement de la tige soit

moindre que la quantité $\frac{\pi^2 \rho^2}{a}$ pour que la flexion ne soit pas à craindre.

Si la force F est égale à sa limite, l'équation $y = B \sin \sqrt{\frac{F}{EI}}$ donne pour forme d'équilibre une sinusoïde indéterminée ; car le coefficient B reste arbitraire. Dans ce cas, l'équilibre est indifférent, et, chose remarquable, les points fixes A et O, et les points intermédiaires, s'il y en a, ne subissent, malgré la flexion, aucune tendance latérale.

Si F est supérieure à sa limite, l'équilibre a lieu lorsque B = o, mais il est instable, et si la flexion commence, non-seulement l'analyse ne détermine pas le coefficient B, mais elle montre que l'équilibre est impossible, quelque courbure que la pièce prenne. A mesure que la pièce fléchit, les ordonnées y augmentent en valeur absolue, et par conséquent les moments fléchissants Fy croissent aussi en valeur absolue, de sorte que la tendance à la déformation s'accroît en vertu de la déformation même. Lorsqu'une poutre droite fléchit sous l'action de forces normales, la déformation ne fait pas varier sensiblement les moments des forces ; la poutre quitte donc son état naturel pour marcher vers un nouvel état d'équilibre, qu'elle atteint, parce qu'il est à peu près fixe, et qu'il ne se modifie pas à mesure que la déformation s'accuse davantage. Ici, au contraire, la déformation a pour conséquence l'augmentation des moments fléchissants, et les moments d'élasticité ne s'accroissent pas assez vite pour les rejoindre.

Fig. 124.

En résumé, les pièces chargées par leurs abouts sont dans des conditions de résistance très-défectueuses, dès qu'elles sont exposées à une flexion latérale par suite d'une compression trop grande : elles sont en danger de rupture. Nous ajouterons que *cette conclusion suppose que la force* F *soit une force donnée, constante ;* car si la force F était variable avec la corde OA, de manière à diminuer quand OA diminue, l'analyse pourrait assigner rigoureusement la forme OMA prise par la lame flexible, les produits Fy ne s'accroissant plus alors indéfiniment avec y.

L'étude expérimentale des conditions d'équilibre des pièces chargées par leurs abouts a conduit à des formules empiriques très-fréquemment employées par les constructeurs. Nous citerons plus loin les principales.

122. L'équation de la pièce fléchie est $y = \mathrm{B} \sin mx$, en faisant $m = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}}$.

Si la force F n'est pas constante, et si elle varie avec la corde OA de la pièce fléchie, on peut déterminer le coefficient B, qui autrement reste inconnu.

La moindre valeur de la force F qui fasse fléchir la pièce est donnée par l'équation

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{EI}\pi^2}{a^2},$$

où a est la distance OA de deux points fixes consécutifs.

Si F est exprimée en fonction de a, on aura $\mathrm{F} = \varphi(a)$, et la distance a s'obtiendra en résolvant l'équation

$$a^2\varphi(a) = \mathrm{EI}\pi^2;$$

une fois a connu, on en déduit $m = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{EI}}} = \frac{\pi}{a}$, et il ne reste plus qu'à déterminer la constante B.

Nous y parviendrons en cherchant la longueur de la pièce déformée.

Chaque élément $ds = mm'$ de la fibre moyenne subit un raccourcissement dû à la compression produite par la force F. Menons la tangente mT, et soit θ l'angle qu'elle fait avec l'axe OX. La force de compression due à F est égale à $\mathrm{F}\cos\theta$; elle produit sur l'arc mm' un raccourcissement δds donné par l'équation

Fig. 125.

$$\mathrm{F}\cos\theta = \frac{\mathrm{E}\omega\delta ds}{ds},$$

ω désignant la section.

Donc

$$\delta ds = \frac{\mathrm{F}\cos\theta ds}{\mathrm{E}\omega} = \frac{\mathrm{F}dx}{\mathrm{E}\omega}.$$

Faisant la somme de tous ces raccourcissements, on aura la variation totale, δs, de la longueur de la pièce :

$$\delta s = \int_{x=0}^{x=a} \frac{F}{E\omega} dx = \frac{F}{E\omega} \times a = \frac{EI\pi^2 a}{E\omega a^2} = \frac{I}{\omega} \times \frac{\pi^2}{a}.$$

La longueur S de l'arc OA de la sinusoïde dessinée par la fibre moyenne est donnée par l'intégrale

$$S = \int_0^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_0^a dx \sqrt{1 + B^2 m^2 \cos^2 mx}$$
$$= \int_0^a dx \sqrt{1 + \frac{B^2\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a}}.$$

L'arc S est une fonction elliptique de seconde espèce, qu'on ne peut exprimer en termes finis; mais ici, le coefficient cherché B étant très-petit, on peut se contenter d'une approximation; on développera le radical par la formule du binôme, et l'on en prendra les deux premiers termes :

$$S = \int_0^a dx \left(1 + \frac{B^2\pi^2}{2a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a}\right) = a + \frac{B^2\pi^2}{2a^2} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx$$
$$= a + \frac{B^2\pi}{2a} \int_0^a \cos^2 \frac{\pi x}{a} d \frac{\pi x}{a}.$$

Faisant $\frac{\pi x}{a} = v$, on transforme l'intégrale indiquée en

$$\int_0^\pi \cos^2 v dv = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$S = a + \frac{B^2\pi^2}{4a}.$$

Soit L la longueur primitive de la pièce. Nous avons calculé son raccourcissement $\frac{I}{\omega} \frac{\pi^2}{a}$; la différence donne la longueur nouvelle

$$L - \frac{\pi^2 I}{\omega a} = a + \frac{B^2\pi^2}{4a};$$

d'où l'on tire

$$B = \frac{1}{\pi} \sqrt{4a\left(L - \frac{\pi^2 I}{\omega a} - a\right)}.$$

On peut observer que $\frac{I}{\omega}$ est le rayon de giration de la section par rapport à l'axe mené par le centre de gravité dans son plan, perpendiculairement au plan de flexion.

Les mêmes formules permettent de déterminer la force F qui correspond à une corde a donnée.

123. Si l'on voulait traiter la question avec plus d'exactitude, il faudrait intégrer l'équation rigoureuse

$$\mathrm{EI}\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=-\mathrm{F}y.$$

Faisons d'abord $\frac{dy}{dx}=p$; il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{pdp}{dy},$$

et substituant, nous aurons

$$\mathrm{EI}\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=-\mathrm{F}ydy,$$

équation dont l'intégrale est, en appelant C une constante,

$$\mathrm{EI}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{F}y^2.$$

On résoudrait par rapport à p, puis, remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$, on aurait à intégrer une nouvelle équation où les variables se séparent. On obtiendrait ainsi l'équation de la courbe par une intégrale elliptique, qu'on pourrait calculer par les méthodes de quadrature. Le reste du problème s'achèverait comme nous l'avons indiqué.

RÈGLE DE RONDELET POUR LES BOIS.

124. Rondelet a donné la règle suivante, qu'il n'a pas cherché à réduire en formule.

Le rapport de la longueur à la moindre dimension transversale étant l'un des nombres

1, 12, 24, 36, 48, 60, 72,

la limite extrême de la charge que peut supporter sans fléchir latéralement ou sans s'écraser une pièce de chêne ou de sapin est, en kilogrammes par centimètre carré,

420, 350, 210, 140, 70, 35, $17\frac{1}{2}$;

la limite pratique à adopter dans les constructions doit être réduite au septième de la limite extrême, ce qui donne par centimètre carré

60, 50, 30, 20, 10, 5, $2\frac{1}{2}$ kilogrammes.

On emploiera un procédé quelconque d'interpolation pour trouver la résistance limite, si le rapport de la longueur à la moindre dimension transversale est compris entre deux nombres du tableau.

FORMULE DE HODGKINSON.

125. La théorie donne en général, comme limite de la force F, $F = \frac{EI\pi^2}{a^2}$; pour un carré de côté égal à c, $I = \frac{1}{12}c^4$, de sorte que la limite correspondante de F est

$$\frac{E\pi^2}{12} \times \frac{c^4}{a^2} = \frac{E\pi^2}{12}\left(\frac{c^2}{a}\right)^2.$$

Les facteurs constants $\frac{E\pi^2}{12}$ forment un produit A, qu'on peut mettre à part, et qui dépend de la matière dont la pièce est composée. Ce coefficient peut être déterminé par expérience.

Hodgkinson, en étudiant la flexion et la rupture par écrasement de pièces de chêne comprimées par leurs abouts, a déterminé pour chaque cas particulier les valeurs du coefficient A ; il a reconnu que ce coefficient n'est pas constant d'une manière absolue, mais qu'il varie entre des limites peu écartées.

L'équation qui donne le maximum de la force F est donc

$$F = A\,\frac{c^4}{a^2},$$



$$\frac{F}{c^2} = A \times \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

$\frac{F}{c^2}$ est la compression de la matière par unité de surface ; $\frac{c}{a}$ est l'inverse du rapport de dimensions qui entre dans le tableau de Rondelet.

Si l'on prend le mètre pour unité des dimensions linéaires, et le kilogramme pour unité des forces, on devrait avoir d'après la règle de Rondelet :

$\frac{F}{c^2} = 4\,200\,000$	pour $\frac{a}{c} = 1$,	ce qui correspondrait	$A = 4\,200\,000$
$\frac{F}{c^2} = 1\,400\,000$	$\frac{a}{c} = 36$,		$A = 1\,814\,400\,000$
$\frac{F}{c^2} = 175\,000$	$\frac{a}{c} = 72$,		$A = 907\,200\,000$

La règle de Rondelet ne s'accorde donc pas avec les résultats de la théorie.

Les expériences de Hodgkinson ont donné pour le nombre A relatif au bois de chêne des valeurs variables de 2,300,000,000 à 2,600,000,000. Dans la pratique, il convient de réduire au dixième les limites fournies par ces formules.

On remarquera d'ailleurs que pour les très-courtes pièces, $\frac{c}{a}$ de-

venant très-grand, la limite $\frac{F}{c^2}$ s'accroît indéfiniment d'après la formule, tandis que la charge par unité de surface ne peut dépasser la charge de rupture; la formule n'est donc pas applicable aux grandes valeurs du rapport $\frac{c}{a}$. La règle de Rondelet tient compte du double mode de destruction possible pour la pièce, en substituant pour les petites valeurs de $\frac{a}{c}$ la charge de rupture par écrasement à la charge qui produit une flexion latérale.

SECTIONS ÉVIDÉES.

126. Supposons que la section de la pièce comprimée soit une couronne circulaire; soit r le rayon extérieur, r' le rayon intérieur; nous aurons:

$$I = \frac{\pi(r^4 - r'^4)}{4} = \frac{\pi(r^2 - r'^2)}{4} \times (r^2 + r'^2),$$

et par suite, la limite de F sera

$$F = \frac{E\pi^3(r^2 - r'^2)(r^2 + r'^2)}{4a^2}.$$

Divisons par $\pi(r^2 - r'^2)$, surface de l'anneau :

$$\frac{F}{\pi(r^2 - r'^2)} = \pi^2 E \frac{r^2 + r'^2}{4a^2}.$$

Comparons ce résultat à celui qu'on obtiendrait pour une pièce cylindrique pleine, de longueur a et de section égale à celle de la pièce creuse; r'' étant le rayon de cette section pleine, nous aurons pour la limite correspondante de la force

$$\frac{F'}{\pi r''^2} = \frac{\pi^2 E}{4}\left(\frac{r''}{a}\right)^2,$$

et par suite

$$\frac{F'}{F}=\frac{r'^2}{r^2+r'^2}=\frac{r^2-r'^2}{r^2+r'^2}.$$

On voit donc qu'à égalité de section, la limite F peut être notablement augmentée en remplaçant la pièce pleine par une pièce creuse renfermant la même quantité de matière.

On sait que les os des animaux sont ainsi formés : ce sont des tubes creux où la matière résistante forme une couronne autour de la moelle.

EXPÉRIENCES DE HODGKINSON SUR LES COLONNES MÉTALLIQUEES.

127. D'après la théorie, la limite de la force F pour une colonne creuse est donnée par la formule

$$F=E\pi^2\frac{r^4-r'^4}{4a^2},$$

ou, en appelant d et d' les diamètres $2r$ et $2r'$,

$$F=\frac{E\pi^2}{64}\frac{d^4-d'^4}{a^2},$$

expression de la forme

$$B\frac{d^4-d'^4}{a^2}.$$

Le coefficient B peut être déterminé par expérience. Mais Hodgkinson, en opérant sur des colonnes de fonte, a reconnu que ce coefficient n'est pas constant ; pour trouver un coefficient B sensiblement constant, il faut modifier les exposants de la formule, et déterminer par une série d'expériences, non-seulement le coefficient B, mais encore les exposants m et n de la formule

$$F=B\frac{d^m-d'^m}{a^n}.$$

Si l'on exprime la longueur a en décimètres,
les diamètres d en centimètres,
la force F en kilogrammes,

on trouve pour les quantités B, m et n, les valeurs numériques suivantes, qui sont relatives à la fonte :

$$B = 10200$$
$$m = 3{,}6 \qquad \text{(au lieu de 4)}$$
$$n = 1{,}7 \qquad \text{(au lieu de 2).}$$

La formule donne alors la limite extrême de F, et pour assurer la résistance, on réduit cette limite au septième de sa valeur.

Les deux tables suivantes renferment les valeurs des puissances $d^{3,6}$ et $a^{1,7}$, entre les limites $d=1$ et $d=12$, et $a=1$ et $a=24$.

TABLE I. — *Puissances des diamètres.*

d	$d^{3,6}$	d	$d^{3,6}$	[illegible]	d	d	$d^{3,6}$	d	$d^{3,6}$
1.00	1.0000	3.25	69.628	4.8	283.44	6.4	798.45	8.0	1782.[illegible]
1.25	2.2329	3.30	73.561	4.9	305.28	6.5	844.28	8.25	1991.7
1.50	4.3045	3.40	81.908	5.0	328.32	6.6	891.99	8.5	2217.7
1.75	7.4978	3.50	90.917	5.1	352.58	6.7	941.61	8.75	2461.[illegible]
2.00	12.125	3.60	100.62	5.2	378.10	6.75	967.15	9.0	2724.[illegible]
2.10	14.454	3.70	111.05	5.25	391.36	6.8	993.19	9.25	3006.8
2.20	17.089	3.75	116.55	5.3	404.94	6.9	1046.8	9.50	3309.8
2.25	18.529	3.80	122.24	5.4	433.13	7.0	1102.4	9.75	3634.3
2.30	20.055	3.90	134.23	5.5	462.71	7.1	1160.2	10.00	3981.1
2.40	23.3755	4.00	147.03	5.6	493.72	7.2	1220.1	10.25	4351.2
2.50	27.076	4.10	160.70	5.7	526.20	7.25	1250.9	10.50	4745.5
2.60	31.182	4.20	175.26	5.75	543.01	7.3	1282.2	10.75	5165.0
2.70	35.720	4.25	182.89	5.8	560.20	7.4	1346.0	11.00	5610.7
2.75	38.159	4.30	190.76	5.9	595.75	7.5	1413.3	11.25	6083.4
2.80	40.716	4.40	207.22	6.0	632.91	7.6	1482.3	11.50	6584.3
2.90	46.199	4.50	224.68	6.1	671.72	7.7	1553.7	11.75	7114.4
3.00	52.196	4.60	243.18	6.2	712.22	7.75	1590.3	12.00	7674.5
3.10	58.736	4.70	262.76	6.25	733.11	7.8	1627.6	»	»
3.20	65.848	4.75	272.96	6.3	754.44	7.9	1704.0	»	»

TABLE II. — *Puissances des longueurs.*

a	$a^{1.7}$	a	$a^{1.7}$	a	$a^{1.7}$
1	1.0000	9	41.900	17	123.53
2	3.2490	10	50.119	18	136.13
3	6.4730	11	58.934	19	149.24
4	10.556	12	68.329	20	162.84
5	15.426	13	78.289	21	176.92
6	21.031	14	88.801	22	191.48
7	27.332	15	99.851	23	206.51
8	34.297	16	111.430	24	222.00

(Extrait du mémoire de M. Ed. Pirel, *Annales des ponts et chaussées*, 1855.)

128. Les expériences de Hodgkinson ont montré l'influence de la fixité des extrémités des colonnes sur leur résistance ; ainsi une colonne dont les bases extrêmes sont plates, est beaucoup plus résistante qu'une colonne de mêmes dimensions dont les extrémités seraient arrondies,et seraient libres de faire un angle quelconque avec leur axe primitif. Les expériences ont aussi montré l'influence du renflement des colonnes vers le milieu de leur longueur. Cette dernière observation justifie le tracé adopté pour le galbe des colonnes dans l'architecture ancienne.

129. M. Love, ingénieur civil, a substitué aux formules de Hodgkinson des formules plus faciles à manier ; elles sont relatives aux colonnes pleines en fonte ou en fer.

Soient a la longueur de la colonne, et d son diamètre, exprimés tous deux en centimètres ;

F, la charge qui détermine la rupture, en kilogrammes ; on a sensiblement

pour la fonte $$F = \frac{1250\, d^4}{1{,}85\, d^2 + 0{,}00043\, a^2},$$

pour le fer $$F = \frac{600\, d^4}{1{,}97\, d^2 + 0{,}00064\, a^2}$$

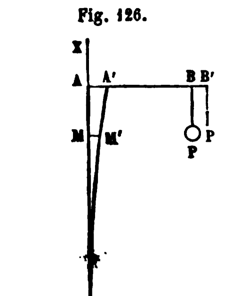
La discussion de ces formules fait voir qu'au delà d'une hauteur

a égale à trente fois le diamètre d, une colonne pleine en fer peut supporter une charge supérieure à celle que supporterait une colonne en fonte de même hauteur et de même diamètre.

PIÈCE VERTICALE OA PORTANT UN POIDS P APPLIQUÉ A UNE CERTAINE DISTANCE AB DE CETTE PIÈCE.

130. On suppose que la pièce OA est enfoncée dans le sol, au point O, de manière qu'il y ait encastrement parfait en ce point ; la déformation de la pièce n'entraîne donc aucune déviation de la fibre moyenne dans les éléments voisins de l'origine.

Fig. 126.



Soit OA $= a$ la longueur de la pièce ; AB $= b$, la distance à laquelle agit la force P, par l'intermédiaire d'un bras rigide AB, qu'on suppose fixé à angle droit sur OA.

On peut traiter le problème soit en prenant les moments dans l'état naturel de la pièce, soit en prenant les moments dans l'état déformé : cette dernière méthode est la plus exacte, et nous l'emploierons ici.

Prenons pour axe des x la direction même de la pièce dans son état naturel, et pour axe des y, une perpendiculaire à OX, menée du côté vers lequel la flexion s'opère.

Nous appellerons f la déviation latérale AA′ de l'extrémité A de la pièce, par suite de la flexion ; cette quantité f est la valeur de l'ordonnée y du bout de la pièce quand elle est déformée. Le poids P est déplacé par la flexion d'une quantité BB′, sensiblement égale à f ou à AA′.

Le moment de la force P par rapport à un point M de la fibre moyenne déformée sera donné par le produit

$$P \times (B'A - MM')$$

ou

$$P \times (AB + AA' - MM'),$$

ou enfin

$$P\,(b + f - y).$$

Il faut prendre ce moment avec le signe $+$, car il tend à donner à la pièce une courbure positive.

L'équation différentielle de la courbe OA' sera

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}(b+f-y).$$

C'est une équation linéaire du second ordre. On peut l'intégrer au moyen de la méthode de la variation des arbitres, en supprimant d'abord le terme constant $\mathrm{P}(b+f)$. Mais il est plus simple de changer de variable.

Posons

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

on en déduit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{pdp}{dy}.$$

Donc

$$\mathrm{EI}pdp = \mathrm{P}(b+f-y)dy.$$

Cette équation est intégrable et donne

$$\frac{1}{2}\mathrm{EI}p^2 = \mathrm{P}(b+f)y - \frac{1}{2}\mathrm{P}y^2;$$

[illegible] $= o$ fait $p = o$, ce qui a lieu au point O, puisque la courbe OA' [illegible]e tangente à l'axe OX. Il n'y a donc pas de constante à ajouter. On tire de cette équation

$$p = \sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}}\sqrt{2(b+f)y-y^2} = \frac{dy}{dx},$$

et par suite

$$\sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}}dx = \frac{dy}{\sqrt{2(b+f)y-y^2}} = \frac{dy}{\sqrt{(b+f)^2-(b+f-y)^2}}.$$

Intégrant de nouveau, il vient

$$x\sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}} = \text{arc cos}\left(\frac{b+f-y}{b+f}\right);$$

$y = o$ donne $x = o$, et par suite il n'y a aucune constante à ajouter.

L'équation de la fibre moyenne est ainsi

$$\frac{b+f-y}{b+f}=\cos\left(x\sqrt{\frac{P}{EI}}\right).$$

Dans cette équation la flèche f est encore inconnue ; pour la déterminer, faisons $x = a$; nous devons avoir $y = f$. Donc

$$\frac{b}{b+f}=\cos a\sqrt{\frac{P}{EI}},$$

et par suite

$$f=b\left(\frac{1}{\cos a\sqrt{\frac{P}{EI}}}-1\right).$$

La flèche f est donc proportionnelle au bras de levier b du poids P.

La répartition des pressions dans les sections sera donnée par la formule

$$R=\frac{P}{\Omega}+\frac{Mv}{I},$$

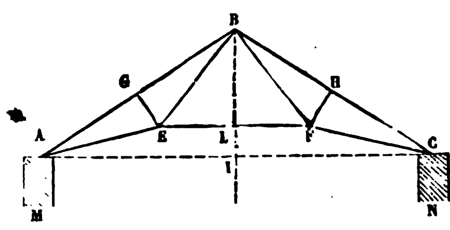
qui, dans ce cas particulier, prend la forme

$$R=\frac{P}{\Omega}\left(1+\frac{(b+f-y)v}{\rho^2}\right).$$

RÉPARTITION DES PRESSIONS ET DES TENSIONS DANS UNE CHARPENTE MÉTALLIQUE A LA POLONCEAU.

131. Soit ABC le profil du comble. On suppose que les arbalétriers AB, BC, sont égaux en longueur et également inclinés sur l'horizon; ils sont soutenus, en leurs milieux H et G, par deux contre-fiches EG, FH, rattachées aux extrémités des arbalétriers par les tirants BE, EA, BF, FC. Un cinquième tirant, EF, complète la liaison en-

Fig. 127.



tre les points A et C, et a pour objet d'équilibrer la poussée latérale de la ferme, en empêchant cette poussée de s'exercer sur les murs M et N, qui portent les pieds des arbalétriers. Les réactions des murs sur la ferme sont donc verticales.

Les charges de la charpente sont réparties uniformément sur l'étendue du profil, à raison de p unités de poids par unité de longueur mesurée sur l'horizontale AC.

Du point B abaissons la verticale BI, qui divise AC en deux parties égales au point I ; soit AI $= a$, la demi-portée de la ferme,

IB $= b$, la flèche.

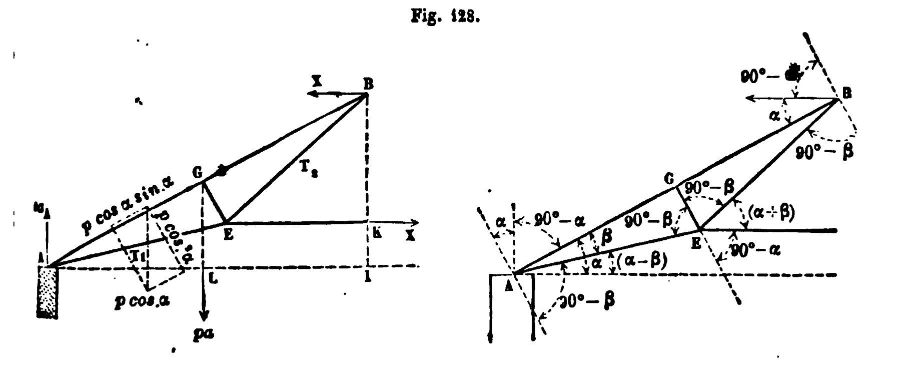
Appelons α l'angle BAI, et l la longueur de l'arbalétrier, qui est égale à $\frac{a}{\cos\alpha}$ ou à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Coupons la ferme par le plan BI, perpendiculaire au plan de la figure, et considérons l'équilibre d'une moitié seulement du comble, ce qui suffit, à cause de la symétrie du comble et des charges.

En supprimant la partie située à droite du plan BI, nous devons introduire la réaction de cette partie contre la partie conservée; cette réaction est horizontale à cause de la symétrie. Nous la représenterons par X. Nous devrons aussi introduire la tension du tirant EF que nous coupons au point K; et comme toutes les forces extérieures appliquées à la demi-ferme, sauf la réaction X et la tension du tirant EF, sont verticales, l'équilibre des composantes horizontales exige que cette tension soit égale à X.

La réaction du mur M est verticale et égale à pa.

Fig. 128.



Nous avons donc à chercher les conditions de l'équilibre du système ABE, sous l'action des forces X, —X, pa, et enfin des poids uniformément répartis de A en B.

Ces poids se composent en un seul égal à pa, et appliqué au milieu G de l'arbalétrier; l'équilibre des forces extérieures est exprimé par l'égalité des couples:

$$pa \times AL = X \times BK.$$

AL est égal à $\frac{1}{2}a$; BK est une donnée de la construction du comble; nous la représenterons par la différence $b - b'$, en appelant b' la quantité IK dont le tirant EF est relevé au-dessus de l'horizontale AC.

Donc

$$\frac{1}{2}pa^2 = X(b - b'),$$

et

$$X = \frac{1}{2}\frac{pa^2}{b-b'}.$$

Les forces extérieures sont toutes connues; cherchons les conditions de l'équilibre élastique. Pour traiter cette question, il est nécessaire de faire une hypothèse sur le règlement des tensions des pièces AE, EB. Nous supposerons qu'elles sont déterminées par la condition que le point G soit maintenu par la jambe de force EG sur la ligne droite qui joint les points A et B. L'arbalétrier pourra alors être considéré, eu égard aux forces qui le pressent normalement, comme une pièce droite posée sur trois appuis de niveau; l'équilibre élastique d'une telle pièce est un problème que nous savons résoudre (§ 94).

Le poids par unité de longueur réparti sur l'arbalétrier n'est pas égal à p; c'est un poids p' tel, que produit $p'l$ soit égal au produit pa; donc

$$p' = p\frac{a}{l} = p\cos\alpha.$$

Ce poids se décompose en deux forces; l'une normale à l'arbalétrier et égale à $p\cos^2\alpha$; l'autre longitudinale et égale à $p\cos\alpha\sin\alpha$.

Considérons d'abord l'arbalétrier pris isolément. Appelons T_1, T_2 les tensions des tirants AE, EB, et soit C la compression de la contre-fiche GE, qui s'exerce normalement à l'arbalétrier au point G. L'arbalétrier est soumis aux forces suivantes :

la force X et la force T_2, appliquées au point B;

la force normale C, appliquée au point G;

les forces pa et T_1, appliquées au point A;

la composante normale $p\cos^2\alpha$, du poids également réparti par unité de longueur, qui produit en tout une charge normale égale à $pl\cos^2\alpha$,

et la composante parallèle à l'arbalétrier, $p\cos\alpha\sin\alpha$.

Faisons abstraction des composantes parallèles à la pièce; nous sommes ramenés au cas d'une pièce chargée uniformément d'un poids $p\cos^2\alpha$, et posée sur trois appuis; les réactions normales des appuis, Y_1, Y_2, Y_3, sont donc

$$\text{au point A,} \quad Y_1 = \frac{3}{16}pl\cos^2\alpha,$$

$$\text{au point G,} \quad Y_2 = \frac{10}{16}pl\cos^2\alpha,$$

$$\text{au point B,} \quad Y_3 = \frac{3}{16}pl\cos^2\alpha.$$

Mais au point A la force normale Y_1 qui agit sur l'arbalétrier est égale à la composante normale de la résultante des forces pa et et T_1; de même en B, la force normale Y_3 appliquée à l'arbalétrier est égale à la composante normale de la résultante des forces X et T_2. Enfin en G, la force normale Y_2 est égale à la compression C développée dans la contre-fiche. Appelons β l'angle EAG, qui est donné par l'épure de l'élévation du comble. Nous retrouvons cet angle en EBG, et par suite nous avons les trois équations :

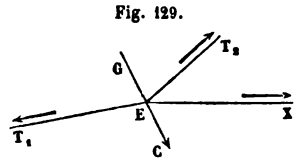
$$Y_1 = \frac{3}{16} pl \cos^2 \alpha = pa \cos \alpha - T_1 \sin \beta = \frac{3}{16} pa \cos \alpha,$$
$$Y_2 = \frac{10}{16} pl \cos^2 \alpha = C = \frac{10}{16} pa \cos \alpha,$$
$$Y_3 = \frac{3}{16} pl \cos^2 \alpha = X \sin \alpha - T_2 \sin \beta = \frac{3}{16} pa \cos \alpha.$$

Ces équations donnent, la première T_1, la seconde C, la troisième T_2, puisque X a été précédemment déterminé:

$$T_1 = \frac{13}{16} pa \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}, \quad C = \frac{10}{16} pa \cos \alpha, \quad T_2 = \frac{X \sin \alpha - \frac{3}{16} pa \cos \alpha}{\sin \beta}.$$

132. Nous connaissons les efforts développés dans toutes les pièces qui aboutissent au point E. Ces efforts doivent se faire équilibrer autour de ce point. On doit donc avoir deux identités en projetant toutes ces forces sur la direction de EG, et sur une direction perpendiculaire ; ces opérations donnent en effet

Fig. 129.



$$(T_1 + T_2) \sin \beta - X \sin \alpha - C = 0,$$
$$(T_2 - T_1) \cos \beta + X \cos \alpha = 0.$$

Substituons à C, T_1 et T_2 leurs valeurs dans la première équation; il vient

$$pa \cos \alpha - Y_1 + X \sin \alpha - Y_2 - X \sin \alpha - Y_3$$
$$= pa \cos \alpha - (Y_1 + Y_2 + Y_3) = pa \cos \alpha - pa \cos \alpha = 0,$$

ce qui vérifie la première condition.

Puis on déduit des valeurs de T_1 et T_2

$$(T_2 - T_1) \sin \beta = X \sin \alpha - pa \cos \alpha.$$

Donc

$$(T_2 - T_1) \cos \beta = \frac{X \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta} - pa \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \beta} = (X \sin \alpha - pa \cos \alpha) \frac{\cos \beta}{\sin \beta}.$$

L'équation à vérifier se réduit donc à

$$(X \sin \alpha - pa \cos \alpha)\frac{\cos \beta}{\sin \beta} + X \cos \alpha = 0,$$

ou, en remplaçant X par sa valeur $\frac{\frac{1}{2}pa^2}{b - b'}$,

$$\frac{\frac{1}{2}pa^2}{b-b'}\left(\sin \alpha \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \cos \alpha\right) = pa \cos \alpha \frac{\cos \beta}{\sin \beta}.$$

Divisons par pa et multiplions par $\sin \beta$; il viendra

$$\frac{1}{2}\frac{a}{b-b'}\sin(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta,$$

ou enfin

$$b - b' = \frac{a}{2}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{a}{2}(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

Or cette égalité est facile à vérifier sur la figure.

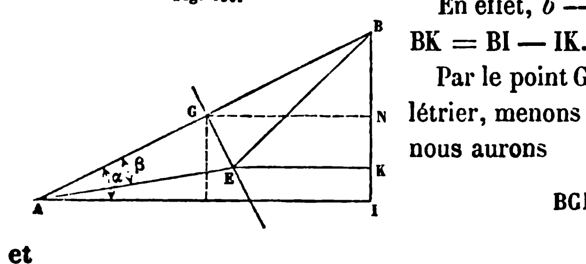


Fig. 130.

En effet, $b - b'$ est la distance BK = BI — IK.

Par le point G, milieu de l'arbalétrier, menons GN parallèle à AI; nous aurons

$$BGN = \alpha,$$

et

$$BN = GN \operatorname{tang} \alpha = \frac{a}{2} \operatorname{tang} \alpha.$$

Il reste donc à montrer que NK est égal à

$$\frac{a}{2} \operatorname{tang} \beta.$$

NK est la projection sur BI de la droite GE, laquelle est égale à

$$AG \operatorname{tang} \beta.$$

Donc

$$NK = AG \operatorname{tang} \beta \times \cos \alpha = AG \cos \alpha \times \operatorname{tang} \beta = \frac{a}{2} \operatorname{tang} \beta,$$

et l'égalité est ainsi entièrement vérifiée.

La compression de l'arbalétrier est due aux composantes longitudinales des forces. Au point A, elle est égale à la force $pa \sin \alpha + T_1 \cos \beta$; au point B elle est égale à la force $X \cos \alpha + T_2 \cos \beta$. La différence entre ces deux forces est égale à la somme $pl \cos \alpha \sin \alpha$, ou $pa \sin \alpha$, des composantes de la charge parallèles à l'arbalétrier. On doit donc avoir

$$pa \sin \alpha + T_1 \cos \beta = pa \sin \alpha + X \cos \alpha + T_2 \cos \beta,$$

ou bien

$$(T_1 - T_2) \cos \beta = X \cos \alpha,$$

équation déjà vérifiée.

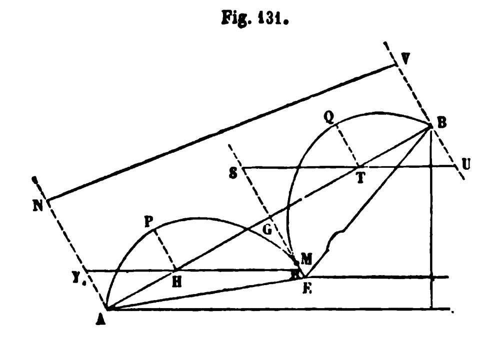
133. Cherchons à construire les courbes qui représentent les valeurs de la compression, des moments fléchissants et des efforts tranchants aux différents points de l'arbalétrier.

Du point A au point G, la valeur du moment fléchissant est donnée par l'équation

$$M = Y_1 x - \frac{1}{2} p \cos^2 \alpha x^2 = \frac{3}{16} pl \cos^2 \alpha x - \frac{1}{2} p \cos^2 \alpha x^2,$$

les abscisses x étant mesurées sur la droite AG à partir du point A dans le sens AB.

Fig. 131.



Si l'on fait

$$x = \frac{l}{2},$$

il vient

$$M = -\frac{1}{32} pl^2 \cos^2 \alpha = -\frac{1}{32} pa^2.$$

Prenons sur GE, au-dessous de AB, une longueur

$$GM = \frac{1}{32} pa^2;$$

la parabole des moments passera par le point M. Elle passe d'ailleurs par le point A; on pourra donc tracer cette courbe APM, puisqu'on en connaît deux points, qu'elle a un paramètre connu et qu'enfin son axe est normal à AG.

Elle se répétera symétriquement en MQB dans la seconde moitié de l'arbalétrier.

L'effort tranchant sera égal à Y_1 au point A, et à $-Y_2$ au point B; il a deux valeurs au point G, et la différence de ces deux valeurs est égale à Y_2; en résumé, il est représenté par les ordonnées de la double droite, Y_1HR, STU, qui coupe l'axe AB aux points H et T, projections des points P et Q où la courbe des moments a sa tangente parallèle à AB.

La compression au point A est $pa \sin \alpha + T_1 \cos \beta$; en un point quelconque, dont la distance au point A est x, elle sera donnée par la formule

$$P = pa \sin \alpha + \frac{13}{16} pa \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \beta} - px \sin \alpha \cos \alpha,$$

équation qui représente une ligne droite NV.

La charge la plus grande de la matière sera ensuite calculée par la formule

$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mv}{I}$$

qu'on peut construire, comme nous l'avons déjà fait (§ 117), au moyen de deux arcs paraboliques, l'un correspondant à la face supérieure, l'autre à la face inférieure de l'arbalétrier.

Il est à remarquer que la plus grande valeur du moment fléchissant a lieu au point G, appui central de l'arbalétrier, et qu'elle est égale en ce point à $\frac{1}{32} pa^2$, quantité qui dépend de la portée horizontale de la ferme et du poids également réparti suivant l'horizontale, mais qui ne dépend pas de l'angle α. Au contraire, la plus grande compression dans l'arbalétrier a lieu au point A, et elle a pour valeur

$$pa \left(\sin \alpha + \frac{13}{16} \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \beta} \right);$$

elle dépend donc de l'angle α, ou de l'inclinaison du comble.

Les dimensions de l'arbalétrier peuvent être calculées d'après le

maximum du moment fléchissant, $\frac{1}{32}pa^2$, ou d'après le maximum de la compression, qui est

$$pa\left(\sin\alpha + \frac{13}{16}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta}\right).$$

Cette dernière expression seule est fonction de l'angle α. Supposons, pour plus de simplicité, que $\beta = \alpha$, ce qui n'est jamais bien loin de la vérité. Pour choisir l'angle α qui convient à l'arbalétrier le plus léger, on observera que la section de cette pièce doit être proportionnelle à $\left(\sin\alpha + \frac{13}{16}\operatorname{cotg}\alpha\cos\alpha\right)$, et que sa longueur est égale à $\frac{a}{\cos\alpha}$; le volume est donc proportionnel au produit

$$\frac{1}{\cos\alpha}\left(\sin\alpha + \frac{13}{16}\operatorname{cotg}\alpha\cos\alpha\right)$$

ou à

$$\operatorname{tg}\alpha + \frac{13}{16}\operatorname{cotg}\alpha.$$

On aura par suite à égaler à zéro la dérivée de cette fonction par rapport à α, ce qui donnera

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{13}{16}\frac{1}{\sin^2\alpha} = 0,$$

équation d'où l'on pourra tirer la valeur de $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

En général, on n'a pas à résoudre ce dernier problème, car les inclinaisons des toits ne sont pas entièrement arbitraires : les habitudes locales et le caractère de l'architecture ne permettent pas de s'écarter notablement de certains angles consacrés.

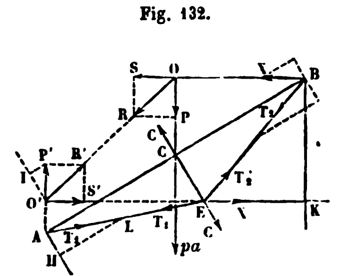
Solution géométrique du même problème.

134. Les forces *extérieures* appliquées à la demi-ferme sont :

La poussée au sommet, BX; la tension du lien EK; le poids pa de la demi-ferme, appliqué dans la verticale du milieu C de l'arba-

létrier, enfin la réaction verticale du mur sur lequel s'appuie la demi-ferme en A. On connaît une de ces forces, le poids pa; les

Fig. 132.



autres ne sont connues qu'en direction. Les forces pa et BX prolongées se coupent en O; la force E et la réaction du mur en A se coupent en O'. L'équilibre exige que les résultantes de ces deux groupes soient égales et directement contraires. Donc elles sont situées toutes deux dans la direction OO'. Connaissant l'une, $OP = pa$, de ces forces, il suffira d'achever les rectangles PRSO, R'P'O'S', en prenant $O'R' = OR$, pour avoir la poussée à la clef $X = OS$, égale à la tension du lien EK, et la réaction du mur en A, $O'P' = OP = pa$.

Il reste à déterminer les tensions T_1 et T_2, puis la compression C. Pour cela, on s'appuiera sur le résultat obtenu au § 94; la charge normale subie par l'arbalétrier est égale à $pa \cos \alpha$; elle se partage de la manière suivante entre les trois appuis A, C, B :

$$\frac{3}{16} \text{ au point A}, \quad \frac{10}{16} \text{ au point C}, \quad \text{et} \quad \frac{3}{16} \text{ au point B}.$$

Si l'on projette sur une normale à l'arbalétrier la force $pa = O'P$ et la force T_1, la différence des projections est égale à $\frac{3}{16} pa \cos \alpha$; donc la projection de T_1 est égale aux $\frac{13}{16}$ de $pa \cos \alpha$. Il suffit donc de prendre sur la normale AH une longueur $AH = \frac{13}{16} O'L = \frac{13}{16} pa \cos \alpha$, et d'élever une perpendiculaire HL jusqu'à la rencontre du ten-

deur AE; AL sera la tension T_1. On trouvera par la même méthode la tension T_2. Quant à la compression C, elle est égale aux $\frac{10}{16}$ de $pa \cos \alpha$. Comme vérification, les quatre forces T_1, T_2, C et X se font équilibre autour du point E.

Enfin la compression de l'arbalétrier au point A est la somme des projections sur sa direction des forces T_1 et $pa = O'P'$; au point B, ce sera la somme des projections de X et de T_2.

La même méthode peut s'appliquer à une ferme à trois contrefiches, pourvu qu'on connaisse d'avance la répartition de la charge normale sur les cinq appuis de l'arbalétrier.

RECHERCHE DU POIDS PROPRE DE LA FERME.

135. Le poids p contient deux parties; l'une p correspond au poids propre de l'ossature de la ferme, et l'autre p'', au poids de la surcharge qu'elle est appelée à supporter. Posons donc $p = p' + p''$, et proposons-nous de déterminer p' en fonction de p'', de telle sorte que le point le plus chargé de l'arbalétrier supporte une charge déterminée R.

Le poids propre de la ferme est à peu de chose près proportionnel au poids de l'arbalétrier; nous admettrons donc, à titre d'approximation, que le poids p' peut être calculé en multipliant le volume de l'arbalétrier par un nombre donné, supérieur au poids spécifique de la matière dont l'arbalétrier est composé; l'excès de ce nombre sur le poids spécifique étant destiné à tenir compte du poids des pièces accessoires que l'on néglige. Désignant par ϖ le poids spécifique ainsi grossi, et par Ω la section droite de l'arbalétrier, on aura $\frac{\varpi l \Omega}{a}$ pour valeur approximative du poids p'; donc

$$\Omega = \frac{ap'}{\varpi l} = \frac{p' \cos \alpha}{\varpi}.$$

La charge par unité de surface au point le plus fatigué de l'arba-

létrier se déterminera en appliquant la formule

$$R=\frac{P}{\Omega}+\frac{Mv}{I}. \qquad (1)$$

Or la plus grande valeur de P est égale à

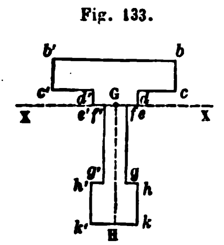
$$pa \times \left(\sin\alpha + \frac{13}{16}\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta}\right)$$

ou à $pa\times\mu$, μ étant un facteur numérique qui dépend des angles α et β, et qu'on peut calculer quand on a fait l'épure de la ferme.

Le maximum de M est $\frac{1}{32}pa^2$.

Pour déterminer $\frac{v}{I}$, imaginons qu'on ait construit, à une échelle arbitraire, une section $bcdefghkk'h'g'f'e'd'c'b'$, semblable à celle que l'on veut donner à l'arbalétrier. Ayant déterminé le centre de gravité G de cette section, sa surface Ω', son moment d'inertie I' par rapport à l'horizontale XX menée par son centre de gravité, et enfin la distance $GH=v'$, de la fibre la plus éloignée à la fibre moyenne, nous savons, par le principe de la similitude, que pour passer de cette section auxiliaire à la section réelle, qui lui est semblable, il suffit de multiplier respectivement

Fig. 133.



$$\Omega', \qquad I', \qquad v'$$

par

$$\frac{\Omega}{\Omega'} \qquad \left(\frac{\Omega}{\Omega'}\right)^2 \qquad \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega'}}.$$

Donc

$$\frac{v}{I}=\frac{v'}{I'}\times\frac{1}{\frac{\Omega}{\Omega'}\sqrt{\frac{\Omega}{\Omega'}}},$$

ou bien

$$\frac{v}{I}=\frac{v'}{I'}\times\frac{\Omega'\sqrt{\Omega'}\times\varpi\sqrt{\varpi}}{\cos\alpha\sqrt{\cos\alpha}\times p'\sqrt{p'}}.$$

Substituons dans l'équation (1) les valeurs de Ω et de $\frac{v}{\mathrm{I}}$; remplaçons-y en même temps la lettre R par la limite donnée de résistance; nous aurons en définitive l'équation

$$R = \frac{pa \times \mu \times \varpi}{p' \cos \alpha} + \frac{pa^2}{32} \times \frac{v'}{\mathrm{I}'} \times \frac{\Omega' \sqrt{\Omega'} \times \varpi \sqrt{\varpi}}{\cos \alpha \sqrt{\cos \alpha} \times p' \sqrt{p'}},$$

ou bien, en mettant pour p sa valeur $p' + p''$,

$$R = \frac{\mu \varpi a}{\cos \alpha}\left(1 + \frac{p''}{p'}\right) + \frac{a^2 v'}{32 \mathrm{I}'} \frac{\Omega' \sqrt{\Omega'} \times \varpi \sqrt{\varpi}}{\cos \alpha \sqrt{\cos \alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{p'}} + \frac{p''}{p' \sqrt{p'}}\right),$$

équation où tout est connu, excepté p'. Elle est du troisième degré en $\frac{1}{\sqrt{p'}}$, et peut être résolue par tâtonnements. Une fois p' déterminé, on en déduit Ω, et, par suite, le rapport de similitude de la section cherchée à la section auxiliaire.

FLEXION D'UNE LAME ÉLASTIQUE.

136. Lorsque la pièce soumise à l'action d'une force a une très-faible raideur, comme cela arrive pour les ressorts et les lames minces, la courbure prise par la pièce est très-grande, et il n'est plus permis de négliger le terme $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant l'unité.

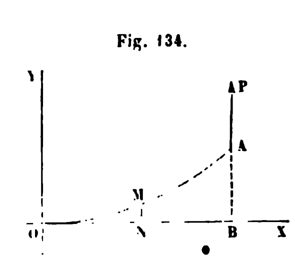


Fig. 134.

Voici alors comment on peut diriger l'intégration.

1° Soit OA une lame élastique, homogène et de section constante, encastrée au point O tangentiellement à la droite OX; nous supposerons d'abord cette lame sollicitée à son extrémité A par une force unique AP, perpendiculaire à la direction OX de l'encastrement.

Soient $OB = x'$, $BA = y'$ les coordonnées du point A après la déformation; $ON = x$, $NM = y$ les coordonnées d'un point quelconque M.

L'équation du problème est

$$\frac{\mathrm{EI}}{\rho} = \frac{\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{P}\times\mathrm{NB} = \mathrm{P}\times(x'-x).$$

Posons $\frac{dy}{dx}=p$, d'où l'on déduit $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$. Il vient, en multipliant par dx,

$$\mathrm{EI}\,\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{P}(x'-x)\,dx,$$

équation où les variables p et x sont séparées.

Intégrons ; nous aurons

$$\mathrm{EI}\,\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \mathrm{P}\left(x'x-\frac{x^2}{2}\right),$$

sans ajouter de constante, car $x = 0$ doit donner $p = 0$, à cause de l'encastrement au point O.

Élevant au carré et résolvant l'équation par rapport à p^2, puis extrayant la racine, il vient

$$p = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}\,\frac{\left(x'x-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{P}^2}{(\mathrm{EI})^2}\left(x'x-\frac{x^2}{2}\right)^2}};$$

et par suite, remplaçant p par $\frac{dy}{dx}$, on a pour la valeur de l'ordonnée y en fonction de l'abscisse x,

$$y = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}}\int_0^x \frac{\left(x'x-\frac{x^2}{2}\right)dx}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{P}^2}{(\mathrm{EI})^2}\left(x'x-\frac{x^2}{2}\right)^2}}.$$

La fonction sous le radical carré étant du quatrième degré, la solution dépend des fonctions elliptiques.

L'abscisse x' n'est pas connue d'avance, et la détermination de

cette constante, qui figure sous le signe $\int$, est la principale difficulté de la question. Si l'on prend x' pour limite supérieure de l'intégration, la valeur correspondante de y est la flèche y' prise par la lame. Pour achever le problème, on pourra exprimer, par exemple, que la longueur de la lame fléchie est égale à la longueur primitive l de cette lame, ce qui est sensiblement vrai si la force P n'est pas trop grande. Alors on a une seconde équation,

$$\int_0^{x'} dx\sqrt{1+p^2} = l,$$

qui permet de trouver x'. Mais la présence de cette inconnue sous le signe $\int$ ne permet guère de traiter la question autrement que par tâtonnements.

2° Supposons en second lieu que la force appliquée au point A ait une direction quelconque; on pourra la décomposer en deux forces parallèles aux axes OX, OY.

Soient P et Q ces deux composantes. L'équation de la lame fléchie sera alors

$$\mathrm{EI}\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{P}(x'-x) - \mathrm{Q}(y'-y),$$

équation plus compliquée que la précédente, à cause de la présence dans le second membre des deux coordonnées x et y.

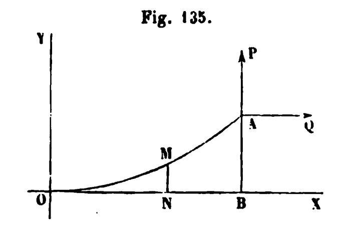


Fig. 135.

Voici comment Poisson procède à l'intégration :

Posons $\mathrm{P}(x'-x) - \mathrm{Q}(y'-y)) = u$, u étant une variable auxiliaire.

On en déduit en différentiant

$$du = -\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy.$$

Donc $dy = \frac{du}{\mathrm{Q}} + \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}dx.$

Nous prendrons toujours x pour variable indépendante, et nous regarderons en conséquence dx comme constant.

Différentiant une seconde fois, il viendra

$$d^2y = \frac{d^2u}{Q},$$

et substituant dans l'équation différentielle, elle deviendra

$$\frac{EI}{Q} \frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{du}{Qdx} + \frac{P}{Q}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = u,$$

équation d'où l'on peut chasser dx en posant $\frac{du}{dx} = q$.

On a alors $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{dq}{dx}$, et l'équation devient

$$\frac{EI}{Q} \frac{\frac{dq}{dx}}{\left[1 - \left(\frac{q + P}{Q}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = u.$$

Multiplions ce premier membre par qdx, le second par du qui lui est égal; il vient

$$\frac{EI}{Q} \frac{qdq}{\left[1 + \left(\frac{q + P}{Q}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = udu,$$

équation intégrable par quadrature, qui fait connaître q en fonction de u. On aura ensuite x en fonction de u par l'équation $x = \int \frac{du}{q}$; enfin y est connu en fonction de u et x, en supposant toutefois que x' et y' soient préalablement déterminés.

3° En troisième lieu, examinons le cas où la lame élastique est fléchie par un couple P, P'.

Dans ce cas, la fibre neutre dessine un arc de cercle commen-

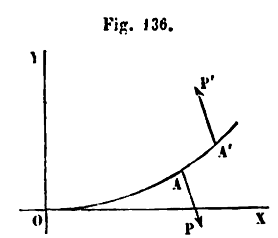


Fig. 136.

çant au point O et finissant au point A, premier point d'application des forces du couple (§ 80, 2°). Le rayon ρ de ce cercle est donné par l'équation

$$\frac{EI}{\rho} = M,$$

M étant le moment constant du couple (P, P'). En faisant varier l'intensité du couple, on fait varier le rayon ρ du cercle; la longueur OA ne change pas, car les deux forces P, P', égales, parallèles et contraires, ont une projection nulle sur tout élément de la fibre neutre.

Cherchons le lieu du point A.

Ce sera le lieu de l'extrémité des arcs de cercle de longueur a constante, tangents au point O à une droite OX donnée.

Du point O comme centre, avec $OB = a$ pour rayon, décrivons un cercle BB'C.

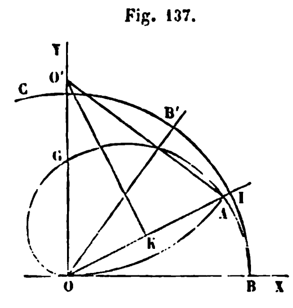


Fig. 137.

Considérons sur ce cercle des arcs BB' commençant au point B; soit A le centre de gravité de l'un de ces arcs. Le lieu BAGO des points A sera la courbe cherchée.

On a en effet $OA = a\frac{\sin\theta}{\theta}$, en appelant θ la moitié IOB de l'angle B'OB correspondant à l'arc BB' considéré. Soit $OA = r$.

Au milieu K de la distance OA élevons une perpendiculaire KO'; le point O', où elle coupe la droite OY perpendiculaire à OB, est le centre d'un cercle passant par les points O et A, et tangent en O à la droite OB.

Je dis que l'arc OA est égal à OB.

En effet, on a

$$OO' = \frac{OK}{\cos O'OK} = \frac{OK}{\sin IOB} = \frac{r}{2\sin\theta}.$$

L'angle OO'A est double de O'OK, c'est-à-dire égal à 2θ.

Donc

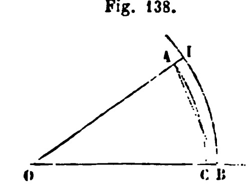
$$\text{arc OA} = \frac{r}{2\sin\theta} \times 2\theta = \frac{r\theta}{\sin\theta} = a = \text{OB}.$$

Le lieu décrit par le point A de la lame élastique OAA′, pliée par un couple (PP′) d'intensité variable, est donc la courbe lieu des centres de gravité des arcs de cercle BB′ décrits du point O comme centre avec la longueur OA rectifiée.

Sur les propriétés de cette courbe, voir le tome II de notre *Traité de Mécanique* (Hachette, 1873), pages 279 et suivantes. Nous ajouterons ici l'énoncé d'un théorème facile à démontrer.

Soit A le centre de gravité d'un arc de cercle commençant au point B, et décrit avec la longueur OB pour rayon. Du point O comme centre avec OA pour rayon, décrivons l'arc AC. Joignons AB. Le triangle OAB sera équivalent au secteur OAC.

Fig. 138.

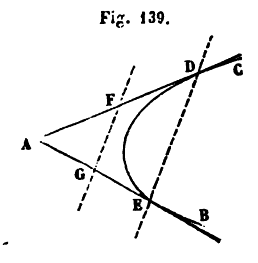


RAPPEL DE QUELQUES PRINCIPES QUI FACILITENT LE TRACÉ DES PARABOLES.

137. Le tracé de l'épure des moments fléchissants exige généralement la construction d'un ou de plusieurs arcs de parabole. On connaît les équations de ces paraboles, mais il est plus simple et plus rapide de les construire par la géométrie. Nous rappellerons quelques propriétés qui sont utiles pour effectuer ces constructions.

Soit BC une courbe du second ordre et A un point extérieur. Du point A, on mène à la courbe deux tangentes AD, AE, et l'on trace la corde de contact ED. Puis on mène la droite FG qui coupe en deux parties égales les droites AD, AE, et qui, par suite, est parallèle à DE. Cela posé :

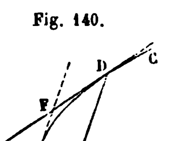
Fig. 139.

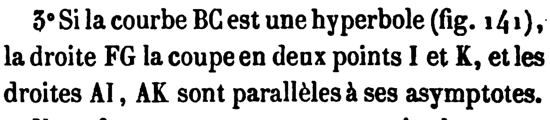


1° Si la courbe BC est une ellipse, la droite FG n'a avec elle aucun point commun (fig. 139);

2° Si la courbe BC est une parabole (fig. 140), la droite FG touche la courbe BC en un point H, et la droite AH est un diamètre de la courbe; elle a donc un parallélisme défini, quel que soit le point A;

Fig. 140.

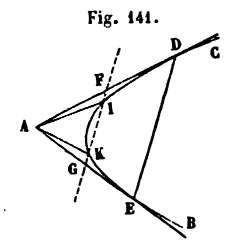




3° Si la courbe BC est une hyperbole (fig. 141), la droite FG la coupe en deux points I et K, et les droites AI, AK sont parallèles à ses asymptotes.

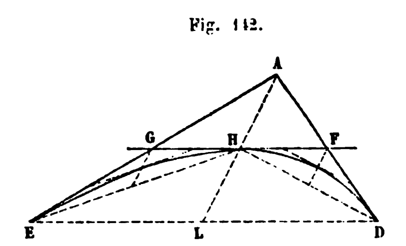
Nous ferons usage, pour construire les paraboles des moments, de la propriété que nous venons de rappeler pour cette courbe.

Fig. 141.



Supposons connus (fig. 142) les deux points E et D de la courbe, et les tangentes EA, AD, qui se coupent au point A. Joignons ED, prenons le milieu L de cette droite et joignons LA. Prenons le milieu H de la droite AL. Ce sera un troisième point de la courbe, et la tangente en ce point sera parallèle à ED. Elle coupera les droites AD, AE, en F et G; on pourra répéter sur les contours HGE, HFD, la construction qu'on a faite pour le contour primitif

Fig. 142.



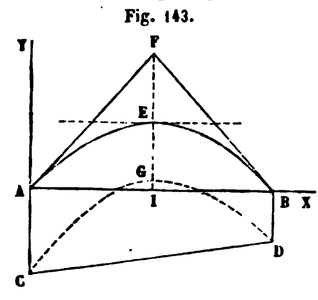
EAD, puis la répéter encore pour les contours qui s'en déduisent, et ainsi de suite; chaque construction nouvelle fournit un point et la tangente en ce point, et donne de plus le moyen de trouver deux points nouveaux et les tangentes en ces points. On aura donc en quelques instants assez de points pour tracer la courbe avec une grande exactitude.

Ce procédé de tracé de la parabole est très-anciennement connu;

il a été appliqué par Archimède à la quadrature de la courbe, par la sommation d'une progression géométrique décroissante à l'infini, la première série dont on ait trouvé la somme.

138. On a quelquefois à construire une parabole dont le paramètre soit donné, dont l'axe soit perpendiculaire à une droite AB, et qui passe par deux points donnés C et D, projetés sur cette droite en A et B.

Fig. 143.



Prenons pour axe des x la droite AB, et pour axe des y la droite CA prolongée.

On pourra commencer par construire une parabole du paramètre donné, mais passant par les points A et B; l'équation de cette parabole sera

$$y = \frac{1}{2} px(a-x),$$

en appelant a la distance AB, et $\frac{2}{p}$ le paramètre de la courbe. Si l'on fait $x = \frac{1}{2} a$, on a $y = \frac{1}{8} pa^2$; on portera donc une ordonnée IE égale à $\frac{1}{8} pa^2$, au milieu de la droite AB. On prendra ensuite $IF = IE \times 2$, et joignant FA, FB, on aura les tangentes à la courbe aux points A et B. On retombe donc sur le problème précédent.

La courbe AEB étant tracée, il suffira d'en composer algébriquement les ordonnées avec celles de la droite CD pour résoudre le problème.

En effet, soit $y = mx + n$ l'équation de la droite CD; l'équation de la courbe obtenue en composant algébriquement les ordonnées des deux courbes sera

$$y = mx + n + \frac{1}{2} px(a-x).$$

Elle représente une parabole dont le paramètre est $\frac{2}{p}$, dont l'axe est parallèle à l'axe des y, et qui passe enfin aux points C et D; car

pour ces points, $x=0$ ou $x=a$, et le terme $\frac{1}{2}px(a-x)$ est nul, et l'ordonnée de la courbe se réduit aux ordonnées de la droite.

On obtiendra par ce procédé un arc CGD, qui appartient à la même parabole que AEB, mais à cette parabole déplacée de manière à passer par les points C et D, sans que son axe cesse d'être perpendiculaire à la direction donnée AB.

Cette méthode contient au fond la solution du problème de *l'interpolation parabolique*, qui consiste à tracer une parabole du second degré, à axe vertical, passant par trois points donnés, C, G, D, équidistants en projection sur l'axe des abscisses.

CHAPITRE III.

SOLIDES D'ÉGALE RÉSISTANCE.

---

139. Dans tous les problèmes des chapitres précédents, nous avons admis que la pièce avait partout la même section transversale, et que le moment d'inertie I était une des données de la question. La théorie générale ne suppose pas nécessairement cette uniformité; il suffit pour qu'on puisse l'appliquer que la section, si elle est variable d'un point à l'autre, soit variable d'une manière continue (1).

(1) On peut aussi appliquer, à titre d'approximation, les formules de la flexion des prismes droits aux pièces dont la section varie brusquement en certains points de leur longueur, à la condition d'effacer ces variations brusques par la substitution d'un profil continu fictif au profil réel, et de n'appliquer les formules de répartition des efforts locaux qu'à des sections suffisamment distantes des points où la continuité est ainsi interrompue (*Cf.* § 110, *in fine*).

Nous allons traiter dans ce chapitre des problèmes dans lesquels la section est l'inconnue à déterminer ; on demande, par exemple, les dimensions à attribuer en chaque point à la section d'une poutre sollicitée par des forces données, pour que la plus grande charge par unité de surface soit partout égale à une limite R fixée d'avance. Un solide satisfaisant à cette condition porte le nom de *solide d'égale résistance*. Cette expression n'est pas parfaitement justifiée pour les poutres droites sollicitées par des forces normales ; car l'égale résistance semble indiquer que la charge de la matière doit être la même en tous les points du solide ; or, l'axe neutre d'un prisme sollicité par des forces normales ne peut être soumis aux mêmes efforts que les fibres qui en sont plus ou moins éloignées. Néanmoins, l'expression de solide d'égale résistance étant consacrée par l'usage, nous n'essayerons pas d'en trouver une plus fidèle. Il suffit d'ailleurs d'être prévenu du sens restreint qu'on y attribue.

Un solide qui serait soumis en tous ses points à la limite supérieure des efforts qu'il peut supporter serait évidemment dans les meilleures conditions d'économie et de résistance ; la résistance veut que cette limite ne soit dépassée nulle part (1) ; l'économie demande qu'elle soit atteinte partout ; car s'il y a insuffisance d'effort en un [illegible] point, on peut affirmer qu'une partie de la matière placée au-[illegible] ce point pourrait être retranchée sans péril pour la solidité du système, et avec avantage au point de vue de l'économie.

C'est cette considération qui a conduit les constructeurs à remplacer pour les profils transversaux les formes quadrangulaires par des formes à double T, où la matière est mieux répartie, puisqu'on l'enlève à la région voisine de la fibre neutre, où elle serait peu utile, pour la reporter vers les extrémités de la section où elle participe aux grandes charges.

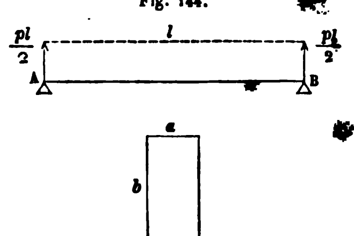
Nous traiterons quelques problèmes sur les formes d'égale résistance, en commençant par supposer les sections rectangulaires.

---

(1) V. *Annales des mines*, 4ᵉ série, t. XX, p. 462. Article de M. Couche, *Analyse des nouvelles expériences faites en Angleterre sur la résistance de la fonte et du fer*; 1851.

140. — I. Une poutre AB est posée sur deux appuis, A et B, et chargée de poids également répartis, à raison de p unités de poids par unité de longueur. La distance AB $= l$ est donnée. La poutre doit avoir une section rectangulaire dont la dimension horizontale est représentée par a, et la dimension verticale par b. On demande de déterminer ces dimensions en tous points de la portée, de telle manière que les points les plus chargés subissent une pression ou une tension constante, égale à R unités de poids par unité de surface.

Fig. 144.



Nous emploierons la formule

$$\frac{\mathrm{RI}}{v} = \mathrm{M};$$

M est ici égal à

$$\frac{pl}{2}x - \frac{1}{2}px^2.$$

Pour avoir la pression aux points les plus chargés, il faut faire $v = \frac{b}{2}$; on a de plus

$$\mathrm{I} = \frac{1}{12}ab^3,$$

d'où résulte l'équation

$$\mathrm{R} \times \frac{1}{6}ab^2 = \frac{pl}{2}x - \frac{1}{2}px^2.$$

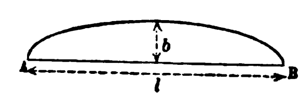
Cette équation lie les deux indéterminées a et b à l'abscisse x. Toute section rectangulaire variable dont les dimensions satisferont à cette équation, assurera au solide l'égale résistance, telle que nous l'entendons ici.

Le problème est indéterminé. Pour en achever la solution, on peut s'imposer une condition nouvelle.

1° Soit d'abord a constant; l'équation nous donnera entre b et x une équation à laquelle le profil longitudinal de la pièce doit satisfaire.

Si, par exemple, on veut que le dessous de la pièce soit une droite horizontale, b sera l'ordonnée de la courbe formant le profil de la face supérieure ; ce profil est une ellipse qui a pour grand axe AB, ou l, et dont le demi petit axe est égal à la valeur de b pour $x = \frac{l}{2}$,

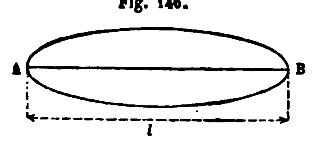
Fig. 145.



$$b = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3p}{a\text{R}}}.$$

Si l'on veut au contraire que la droite AB soit l'axe neutre lui-même, il faudra prendre $\pm\frac{1}{2}b$ pour ordonnées du profil; appelant v la moitié de b, on aura l'équation du profil, en remplaçant b par $2v$ dans l'équation générale, ce qui donne :

Fig. 146.



$$\frac{2}{3}a\text{R} \times v^2 = \frac{plx}{2} - \frac{1}{2}px^2.$$

Cette équation représente une ellipse, dont le grand axe est égal à AB, et dont le demi petit axe est égal à la valeur de v pour $x = \frac{l}{2}$, c'est-à-dire à

$$\frac{l}{4}\sqrt{\frac{3p}{a\text{R}}}.$$

Cette ellipse (fig. 146) a pour ordonnées les moitiés des ordonnées de l'ellipse précédente (fig. 147).

Proposons-nous de chercher la flèche prise par la poutre d'égale résistance sous l'action de la charge qu'elle supporte.

Pour la trouver, nous remarquerons que l'on a

$$\frac{\text{EI}}{\rho} = \frac{\text{EI}d^2y}{dx^2} = \frac{\text{RI}}{v}.$$

Donc

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{R}{Ev},$$

et si l'on attribue à v sa plus grande valeur $\frac{b}{2}$, R sera la limite de charge donnée ; on trouvera donc les valeurs de y en intégrant l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2R}{E}\times\frac{1}{b}$$

dans laquelle b doit être remplacé par une fonction connue de x.

L'équation du profil nous donne

$$b=\sqrt{\frac{3p}{aR}(lx-x^2)},$$

et l'équation différentielle de la fibre neutre déformée est par conséquent

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2R}{E}\times\sqrt{\frac{aR}{3p}}\times\frac{1}{\sqrt{lx-x^2}}.$$

Pour intégrer cette équation, mettons le polynome sur lequel porte le radical sous la forme

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}-x\right)^2;$$

nous aurons à intégrer la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}}=-\frac{d\left(\frac{l}{2}-x\right)}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}}=-\frac{d\left(\frac{\frac{l}{2}-x}{\frac{l}{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\frac{l}{2}-x}{\frac{l}{2}}\right)^2}}$$

$$=d\arccos\frac{\frac{l}{2}-x}{\frac{l}{2}}=d\arccos\left(1-\frac{2x}{l}\right).$$

Donc enfin, en appelant C une constante,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\left[\text{arc cos}\left(1-\frac{2x}{l}\right)+C\right].$$

Pour déterminer la constante, faisons $x=\frac{l}{2}$. Nous devrons avoir

$$\frac{dy}{dx}=0;$$

donc

$$C=-\text{arc cos }0=-\frac{\pi}{2}.$$

Il reste à intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\text{ arc cos}\left(1-\frac{2x}{l}\right)-\frac{2R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\times\frac{\pi}{2},$$

ou bien

$$dy=\frac{2R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\text{ arc cos}\left(1-\frac{2x}{l}\right)dx-\frac{2R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\times\frac{\pi}{2}dx.$$

Posons

$$1-\frac{2x}{l}=u;$$

d'où l'on déduit

$$dx=-\frac{l}{2}du,$$

et

$$\text{arc cos}\left(1-\frac{2x}{l}\right)dx=-\frac{l}{2}\text{ arc cos }u\,du.$$

L'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int\text{arc cos }u\,du&=u\text{ arc cos }u-\int u\times\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}\\&=u\text{ arc cos }u-\int\frac{d(1-u^2)}{2\sqrt{(1-u^2)}}\\&=u\text{ arc cos }u-\sqrt{1-u^2}\ .\end{aligned}$$

Remplaçons u par sa valeur; mais observons que $x = o$ fait $y = o$; or à $x = o$ correspond $u = 1$, ce qui annule l'intégrale que nous venons de former; il n'y a donc pas de nouvelle constante à ajouter, et l'équation de la fibre neutre déformée est

$$y = -\frac{2R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\frac{l}{2}\left[\left(1-\frac{2x}{l}\right)\text{arc cos}\left(1-\frac{2x}{l}\right)-\sqrt{1-\left(1-\frac{2x}{l}\right)^2}\right]-\frac{R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\pi x.$$

Faisons $x = \frac{l}{2}$; la valeur de y, égale à la flèche prise négativement, est

$$y = \frac{2R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\frac{l}{2} - \frac{R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\times\pi\frac{l}{2} = \frac{R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\times\frac{l}{2}(2-\pi).$$

La flèche est donc

$$f = \frac{R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\times\frac{l}{2}\times(\pi-2) = 0{,}57\times\frac{R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\times l.$$

Si on avait donné à la poutre une section constante, égale à la section maximum que nous avons trouvée pour le milieu de la portée, la flèche f' serait (§ 82)

$$f' = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI}.$$

Dans cette formule

$$I = \frac{1}{12}ab^3 = \frac{1}{12}a\times\frac{3p}{aR}\sqrt{\frac{3p}{aR}}\times\frac{l^3}{8},$$

et par suite

$$f' = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{E\times\frac{1}{12}\times\frac{3p}{R}\sqrt{\frac{3p}{aR}}\times\frac{l^3}{8}} = \frac{5\times12\times8}{384\times3}\frac{R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\,l = \frac{5}{12}\frac{R}{E}\sqrt{\frac{aR}{3p}}\,l.$$

La poutre d'égale résistance prend donc une plus grande flèche qu'une poutre dont la section serait constante et égale à la section

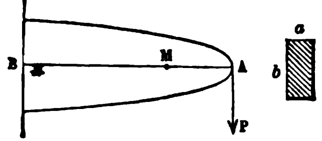
maximum de la première. Le rapport est à peu près égal à $\frac{4}{3}$. La poutre d'égale résistance est, en d'autres termes, beaucoup moins raide que l'autre poutre.

Si l'on veut que b soit constant, l'équation



$$R \times [illegible] = \frac{1}{2} p(lx - x^2)$$

donne la dimension variable a par les ordonnées d'une parabole passant aux points A et B. Les moitiés de ces ordonnées seront les ordonnées du contour latéral de la poutre, en projection horizontale.



3° Enfin, si l'on voulait que la section ab fût partout constante, et égale à Ω, quantité donnée, b serait exprimé par les ordonnées d'une parabole, et une fois b connu, on en déduirait a par l'équation $ab = \Omega$. Cette distribution de la matière serait très-défectueuse, car, sur la culée, on aurait $b = 0$ et a devrait être infini.

141. — II. Cherchons encore la forme d'égale résistance pour un solide encastré par une extrémité B, et portant un poids P à son extrémité A.

Fig. 148.

L'équation sera

$$\frac{RI}{v} = Px,$$

en appelant x la distance d'un point M à l'extrémité A.

Si la section est rectangulaire, on fera

$$\frac{I}{v} = \frac{1}{6} ab^2,$$

et supposant a constant, on devra déterminer b par l'équation

$$\frac{1}{6} aR \times b^2 = Px,$$

qui représente une parabole.

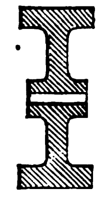
Pour donner à la pièce une forme symétrique par rapport à l'axe

neutre OA, on fera $b = 2v$, et on aura l'équation du contour parabolique de la pièce en élévation :

$$v^2 = \frac{3}{2}\frac{Px}{aR}.$$

C'est à peu près cette forme que l'on donne aux balanciers en fonte des machines à vapeur ; cependant, on substitue en général au rectangle un profil où la matière est reportée du centre au haut et au bas de la section, sauf une nervure qu'on réserve le long de l'axe neutre, pour nourrir la région où s'attachent les tiges articulées du parallélogramme, la bielle, l'arbre tournant du balancier, enfin les tiges des pompes mises en mouvement par la machine.

Fig. 149.



On donne encore une forme parabolique aux manivelles qui transmettent à un arbre tournant l'effort exercé par une bielle à leur extrémité.

La forme légèrement effilée que doivent recevoir les dents d'engrenage pour satisfaire aux conditions géométriques de la transmission du mouvement, est aussi assimilable par approximation à la forme des solides d'égale résistance à sections rectangulaires.

On trouve dans tous les aide-mémoire des formules dues à Navier, à Duleau, à Tredgold, et qui assignent les dimensions à attribuer dans la pratique à ces différents organes de machines.

142. Cherchons la flèche de la poutre encastrée.

L'équation différentielle de la fibre neutre déformée sera

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x),$$

Fig. 150.

l désignant la longueur OA de la poutre, et x la distance OM.

I est égal à $\frac{1}{12}ab^2$, expression dans laquelle b est variable, et égal à

$$\sqrt{\frac{6P \times MA}{Ra}}, \quad \text{ou à} \quad \sqrt{\frac{6P \times (l-x)}{Ra}}.$$

On est donc ramené à intégrer l'équation

$$E\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P(l-x)}{\frac{1}{12}a\left(\sqrt{\frac{6P(l-x)}{Ra}}\right)^3}=\frac{P(l-x)Ra\sqrt{Ra}}{\frac{1}{12}a\times 6P(l-x)\sqrt{6P(l-x)}}=2R\sqrt{\frac{Ra}{6P}}\frac{1}{\sqrt{l-x}}.$$

Intégrant une première fois, il vient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4R}{E}\sqrt{\frac{Ra}{6P}}\left(\sqrt{l}-\sqrt{l-x}\right),$$

et, une seconde fois,

$$y=\frac{4R}{E}\sqrt{\frac{Ra}{6P}}\left(x\sqrt{l}+\frac{2}{3}(l-x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}l\sqrt{l}\right).$$

Les constantes sont déterminées de manière à faire y et $\frac{dy}{dx}$ nuls pour $x=0$; la flèche sera la valeur de y pour $x=l$; il vient donc

$$f=\frac{4}{3}\frac{R}{E}\sqrt{\frac{Ra}{6P}}\times l\sqrt{l}.$$

Si la poutre avait une section constante, égale à celle qu'elle a dans l'encastrement, la flèche f' à l'extrémité (§ 89) serait égale à

$$\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}.$$

Dans cette expression I est la valeur que prend $\frac{1}{12}ab^3$ pour $x=0$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{12}a\times\left(\frac{6Pl}{Ra}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On aurait donc

$$f'=\frac{1}{3}\frac{Pl^3}{E\times\frac{1}{12}a\times\frac{6Pl}{Ra}\times\sqrt{\frac{6Pl}{Ra}}}=\frac{2}{3}\frac{R}{E}\sqrt{\frac{Ra}{6P}}\,l\sqrt{l}.$$

En d'autres termes f est double de f'.

143. — III. Les poutres en bois d'un seul morceau ne reçoivent pas ordinairement une forme d'égale résistance. Les bois sont un produit naturel; leurs fibres ne sont pas des assemblages fictifs de molécules, mais bien des fibres réelles, et c'est suivant leur longueur qu'elles résistent le mieux aux efforts développés dans la matière. Une fibre coupée ne subit plus les actions des autres fibres que par l'intermédiaire de la cohésion qui les réunit en un seul faisceau; elle n'a plus la résistance qu'elle possédait lorsqu'elle était continue. D'ailleurs on ne gagne pour ainsi dire rien, comme économie, à enlever de la matière latéralement à une pièce de bois de charpente, car les déchets n'ont pas de valeur. Aussi emploie-t-on les poutres sans modifier sensiblement leurs formes naturelles, si ce n'est quelquefois pour leur donner de la courbure.

144. — IV. *Poutres en fer laminé.* — Proposons-nous de dresser le projet d'une poutre en tôle, d'égale résistance, destinée à franchir une portée donnée l, et à supporter une charge de p kilogrammes par mètre courant.

Le problème est indéterminé, mais il y en a deux solutions principales; l'une consiste à faire varier la hauteur de la poutre, de manière à dessiner en élévation les formes courbes que nous venons de déterminer pour les poutres à sections rectangulaires; l'autre, à laisser la hauteur constante, en faisant varier en conséquence les épaisseurs des tôles. Nous développerons succcessivement ces deux solutions.

Première solution. — Hauteur variable. — La poutre en tôle, dans les deux solutions, sera supposée avoir pour section une forme de fer à double T. Appelons a la largeur des tables,

c leur épaisseur,

h la distance des centres de gravité des deux tables, égale à peu près à la hauteur totale de la poutre.

Fig. 151.

Négligeons dans le moment d'inertie l'âme verticale et les cornières qui la rattachent aux tables.

Le moment d'inertie I est égal à $ac \times \frac{h^2}{2}$, et la

distance de la fibre la plus fatiguée à l'axe neutre étant sensiblement égale à $\frac{h}{2}$, le rapport $\frac{I}{v}$ est égal à ach.

Appelons x l'abscisse d'un point M de la portée, mesurée à partir de l'appui A; le moment de rupture en M est égal à $\frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2$, et l'équation à laquelle la section devra satisfaire est

Fig. 152.

$$Rach = \frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2.$$

R et a sont des données; c et h peuvent être variables. Dans la première solution, on suppose c constant, et la variation porte seulement sur h. On voit que le dessus de la poutre doit pour cela dessiner une parabole ACB (fig. 152), dont l'ordonnée maximum, pour $x = \frac{l}{2}$, est égale à

$$H = \frac{\frac{1}{8}pl^2}{Rac}.$$

Le volume des bandes est mesuré approximativement par le double du produit de la section constante, ac, par la longueur l de la portée; on a donc sensiblement

$$V = 2acl.$$

Seconde solution. — Supposons qu'on laisse h constant, et égal à la plus grande valeur, H, qu'il ait dans la solution précédente; alors c sera variable, et devra satisfaire à l'équation

$$RHa \times c = \frac{1}{2}plx - px^2.$$

La poutre sera tout aussi bien un solide d'égale résistance. Cherchons quel sera le volume V' des bandes de cette nouvelle poutre, et comparons-le au volume V correspondant à la première solution.

Pour la longueur dx, le volume élémentaire sera :

$$dV' = 2acdx;$$

donc

$$V' = 2a\int_0^l cdx,$$

intégrale où l'on doit remplacer c par sa valeur variable

$$c = \frac{\frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2}{RHa}.$$

Il vient donc :

$$V' = \frac{pl}{RH}\int_0^l xdx - \frac{p}{RH}\int_0^l x^2dx = \frac{pl}{RH}\frac{l^2}{2} - \frac{p}{RH}\frac{l^3}{3} = \frac{1}{6}\frac{pl^3}{RH}.$$

Mais nous avons dans l'autre poutre

$$H = \frac{\frac{1}{8}pl^2}{Rac},$$

c désignant ici l'épaisseur constante des bandes de cette première poutre. Tirons de cctte équation la valeur de c, et substituons dans l'expression du volume V; il viendra

$$V = 2acl = 2al \times \frac{\frac{1}{8}pl^2}{RaH} = \frac{1}{4}\frac{pl^3}{RH}.$$

Donc

$$\frac{V'}{V} = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

La poutre où la hauteur reste constante est donc équivalente, comme volume ou comme poids des bandes, aux $\frac{2}{3}$ de la poutre où la hauteur a été supposée variable.

La seconde solution est donc à ce point de vue préférable à la première.

Elle est également préférable en ce quelle assure plus de raideur à la poutre.

En effet, on a toujours, dans une section quelconque,

$$\frac{EI}{\rho} = \frac{RI}{v};$$

donc

$$\rho = \frac{E}{R} v.$$

ρ est proportionnel à v, et comme dans l'exemple qui nous occupe, v est égal à $\frac{h}{2}$, ρ est proportionnel à h. Les rayons de courbure sont donc d'autant plus grands, et la pièce reste d'autant plus voisine de la ligne droite, que la hauteur h est plus grande; et la diminution graduelle de hauteur vers les culées a l'inconvénient d'augmenter très-notablement la flèche que la poutre tend à prendre.

En d'autres termes, la hauteur d'une poutre est un des grands éléments de sa résistance et de sa raideur; et cela a lieu pour toutes les sections, au milieu comme aux extrémités de la portée. Cela posé, il est rationnel de donner partout à la poutre la plus grande hauteur qu'elle puisse avoir, et si la hauteur H est admissible au milieu, il est utile de la conserver dans toute l'étendue de l'ouvrage.

Des considérations architectoniques peuvent conduire à modifier cette règle, parce qu'alors l'économie n'est pas le seul guide à suivre; mais il importe de bien se rappeler que pour les poutres en fer où l'on peut faire varier les épaisseurs, l'égale résistance ne demande pas des variations de hauteur, comme pour les poutres en fonte coulées d'un seul morceau. Bien des ingénieurs font cette confusion, et ils préfèrent pour l'élévation d'une poutre la forme parabolique à la forme rectiligne, croyant que la première seule satisfait aux conditions d'égale résistance, tandis que la seconde y satisfait aussi, en réalisant de plus une certaine économie de matière, tout en donnant à l'ouvrage une plus grande rigidité (1).

(1) La forme parabolique est préférable, au contraire, à la forme rectiligne, lorsqu'on veut donner à la pièce la plus grande flexibilité possible. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les lames élastiques du dynamomètre de Poncelet.

La considération des parois pleines ne modifie en rien nos conclusions. Les parois pleines doivent être déterminées de manière à résister à l'effort tranchant ; les constructeurs négligent en effet la résistance des tables à cet effort, de même qu'ils négligent la résistance de l'âme d'une poutre au moment de rupture (§ 111). Si donc h est la hauteur et c' l'épaisseur de l'âme, R' la résistance moyenne à l'effort tranchant par unité de surface, on devra avoir en tous points :

$$R' \times hc' = A = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{2}pl - px.$$

La section hc' de l'âme pleine est par conséquent la même dans les deux solutions ; une réduction du facteur h entraîne une augmentation du facteur c', et la poutre à élévation parabolique a besoin d'une âme aussi volumineuse et aussi lourde que la poutre à élévation rectiligne.

Toutefois, si les nécessités de la construction demandaient une épaisseur c' beaucoup plus grande que celle que le calcul assigne, la paroi de la poutre parabolique pourrait être plus légère que la paroi de la poutre rectiligne, parce que cette épaisseur c' se trouverait la même dans les deux poutres. Il en est ainsi pour les petites poutres en fer ; l'épaisseur de l'âme y surpasse toujours de beaucoup la limite indiquée par le calcul de l'effort tranchant ; mais même dans ce cas, la forme parabolique ne présente aucun avantage qui doive la faire préférer à la forme droite.

SUPPLÉMENT AU LIVRE II.

NOTE SUR LA STATIQUE GRAPHIQUE.

145. Nous n'avons pas l'intention d'exposer ici les méthodes nouvelles connues sous le nom de *statique graphique*, méthodes qui ont pour objet de résoudre au moyen de constructions géométriques tous les problèmes de l'équilibre. Nous renverrons les lecteurs curieux d'étudier cette branche de la science aux ouvrages du créateur de cette doctrine, M. Culmann, professeur à l'École polytechnique de Zurich, à ceux de M. Cremona, et enfin au traité de M. Maurice Lévy. Nous nous contenterons ici de démontrer quelques propositions qui peuvent donner une idée des nouvelles méthodes.

La statique graphique fait un emploi très-fréquent du polygone funiculaire, soit comme moyen de composer des forces, soit comme moyen de représenter les moments. Le théorème suivant rattache la théorie des courbes de moments fléchissants à celle des courbes funiculaires.

Fig. 153.

Soit AB une poutre posée sur deux appuis A et B, et chargée de poids P_1, P_2,... P_5, appliqués aux points C', D',... G'. Appelons X la réaction de l'appui A, Y la réaction de B. Construisons le polygone des moments ACDEFGB; en un point M' de la poutre, le moment fléchissant M sera représenté par l'ordonnée $MM' = y$.

Or imaginons un polygone funiculaire ACDEFGB coïncidant avec le polygone des moments, et attaché en A et B à des points fixes. Je dis que le polygone sera en équilibre sous l'action des forces P_1, P_2,... P_5, appliquées à ses sommets, et des tensions exercées aux points A et B dans la direction des côtés extrêmes; ces tensions peuvent se décomposer en deux forces : l'une verticale, X et Y, et l'autre horizontale, T_0, égale à l'unité.

Considérons en effet l'équilibre d'une portion quelconque ACDM de fil. La tension en M sera décomposable en deux forces : l'une horizontale, égale à T_0, l'autre verticale que l'on représentera par Z, et l'équilibre sera défini par les deux équations des composantes verticales,

$$X = P_1 + P_2 + Z, \quad \text{ou en général} \quad X = Z + \Sigma P,$$

et des moments par rapport à M,

$$T_0 y = Xx - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) = Xx - \Sigma P(x - a) = M.$$

On en déduit $\quad Z = X - \Sigma P =$ l'effort tranchant A,

et, T_0 étant égal à l'unité par hypothèse, $y = M$, égalité satisfaite, puisque y est égal au moment fléchissant en M'.

De plus, la résultante de Z et de T_0 en M est dirigée suivant le côté DE; car $\frac{Z}{T_0}$, ou Z, puisque $T_0 = 1$, est égal à l'effort tranchant, qui mesure l'inclinaison du côté DE du polygone des moments. On prouverait de même que la résultante de X et de T_0 en A est dirigée suivant le côté CA prolongé.

Si les forces P_1, P_2,... au lieu d'être discontinues, sont réparties suivant une loi quel-

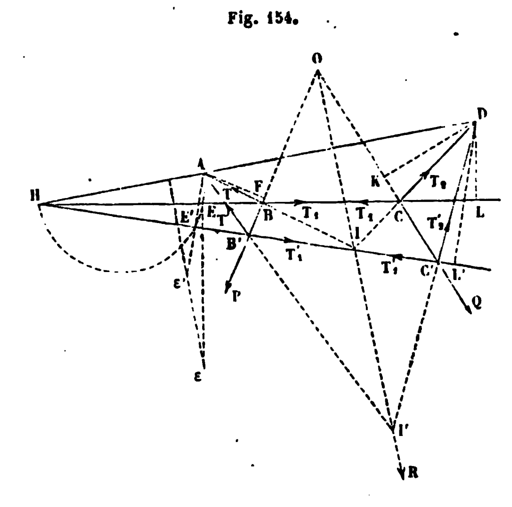
conque, le théorème subsiste encore, et la courbe des moments peut être considérée comme une courbe funiculaire construite en introduisant une tension horizontale égale à l'unité des forces.

C'est ainsi qu'on retrouve la parabole pour le cas des charges également réparties.

146. **Théorème.** *Quand deux polygones funiculaires plans tiennent en équilibre les mêmes forces, les côtés homologues de ces deux polygones se coupent mutuellement sur une droite.*

Il suffit de démontrer la proposition pour deux contours polygonaux de trois côtés chacun, tenant en équilibre deux forces P et Q; car si elle est vraie pour deux forces, elle sera vraie pour trois, pour quatre, ... pour un nombre quelconque.

Fig. 154.



Soient P et Q deux forces tenues en équilibre, d'une part au moyen des fils BA, BC, CD développant les tensions T, T_1, T_2; d'autre part, au moyen des fils B'A, B'C', C'D, développant les tensions T', T'_1, T'_2. Les côtés homologues BA, B'A se coupent en A; les côtés homologues CD, C'D se coupent en D. Cela posé, je dis que les côtés homologues CB, C'B' se coupent en un point H situé sur la droite AD.

Exprimons en effet que les forces T et T_1 font équilibre à la force P; il viendra, en prenant les moments par rapport au point A,

$$(1) \qquad T_1 \times AE = P \times AF;$$

de même,

$$(2) \qquad T'_1 \times AE' = P \times AF,$$

puisque T', T'_1 et P se font aussi équilibre.

Prenant ensuite les moments des forces T_1, T_2 et Q, puis T'_1, T'_2 et Q, par rapport au point D, on aura les deux équations:

$$(3) \qquad T_1 \times DL = Q \times DK,$$

$$(4) \qquad T'_1 \times DL' = Q \times DK.$$

Divisant l'équation (1) par l'équation (3), l'équation (2) par l'équation (4), puis divisant encore le premier quotient par le second, il vient la proportion

$$\frac{AE}{DL} = \frac{AE'}{DL'},$$

qui montre que les deux droites CB, C'B', coupent la droite DA en un même point H, satisfaisant à la proportion

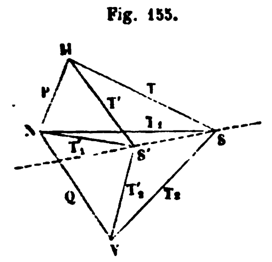
$$\frac{AE}{DL} = \frac{AH}{DH}.$$

On peut remarquer que les côtés AB, DC prolongés se coupent en un point I apparenant à la résultante OR des forces P et Q. Les côtés AB', DC' prolongés se coupent

en un autre point I' de la même droite. On retrouve ainsi ce théorème de géométrie, dû à Desargues : *Quand une transversale* HBC *pivote autour d'un point fixe* H, *les transversales* AB, DC *pivotant autour des points fixes* A et D *en ligne droite avec le premier, et coupant la première transversale sur des droites fixes* OB, OC, *se coupent mutuellement sur une droite fixe passant par un point* O.

Construisons les *polygones de Varignon* correspondants aux deux contours funiculaires ABCD, AB'C'D. Pour cela par un point S (*fig.* 155) menons des parallèles SM, SN, SV aux côtés AB, BC, CD, et prenons sur ces parallèles des longueurs égales aux tensions T, T_1, T_2; les côtés MN, NV seront égaux respectivement à P et Q. Pour le second polygone funiculaire, on se servira des mêmes forces extérieures P = MN, Q = NV; mais le point S sera changé en un autre point S' tel, que S'M, S'N, S'V soient respectivement parallèles à AB', B'C', C'D. Les nouvelles tensions T', T'_1, T'_2 se déduisent donc des anciennes en composant celles-ci avec une même force, égale à SS', et agissant dans le sens S'S.

Fig. 155.



Or il est facile de voir que SS' est parallèle à la droite DA. En effet, les tensions T_1 et T'_1 sont respectivement égales à $\frac{P \times AF}{AE}$ et à $\frac{P \times AF}{AE'}$; elles sont donc inversement proportionnelles aux distances AE, AE', et si l'on prend deux longueurs Aε, Aε' inversement proportionnelles à AE, A'E, on pourra regarder ces longueurs comme représentant les tensions T_1 et T'_1. Les points E et E' appartiennent à la demi-circonférence décrite sur AH comme diamètre; donc les points ε, ε' appartiennent à la transformée par rayons vecteurs réciproques de cette circonférence par rapport au point A, c'est-à-dire à une droite perpendiculaire au diamètre AH.

Le triangle Aε'ε, dont les côtés Aε, Aε' sont proportionnels à T_1 et à T'_1, et dont l'angle en A est égal à l'angle que fait BC avec B'C', est semblable au triangle SNS' du polygone de Varignon. Seulement il est placé perpendiculairement à ce dernier triangle, puisque Aε est perpendiculaire à T_1 ou à SN, et Aε' à T'_1 ou à S'N. Donc SS' est perpendiculaire à εε', c'est-à-dire parallèle à la droite HAD.

Ces résultats s'étendent sans difficulté à autant de forces extérieures qu'on voudra.

LIVRE TROISIÈME.

CHAPITRE UNIQUE.

TORSION DES PRISMES.

147. La torsion se produit lorsqu'une pièce prismatique, fixée invariablement par une de ses extrémités, est soumise à des forces réductibles à un couple, dans un plan perpendiculaire à la direction du prisme. Ce couple tend à faire tourner dans leur plan les sections transversales, et à dévier les fibres rectilignes pour leur faire prendre une forme hélicoïdale.

Les lois de la torsion des fils métalliques ont été étudiées expérimentalement par Coulomb (1); il a reconnu que la quantité angulaire dont une section transversale tourne par rapport à une autre section, éloignée de la première de l'unité de longueur, est proportionnelle au moment du couple appliqué au fil, et inversement proportionnelle à la quatrième puissance de son diamètre; plus généralement, si l'on

(1) *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils de métal*, 1784.

opère sur un cylindre dont la longueur totale soit égale à L, et dont le rayon soit r, et qu'on appelle Θ l'angle total dont la torsion déplace la section transversale à l'extrémité libre de ce cylindre par rapport à l'autre extrémité, laquelle reste fixe par hypothèse, qu'enfin Pp soit le moment du couple appliqué dans le plan de la section mobile, on aura l'équation

$$\frac{\Theta}{L} = A\frac{Pp}{r^4},$$

A désignant un coefficient constant, qui dépend seulement de la matière dont se compose le cylindre considéré.

Au rapport $\frac{\Theta}{L}$ on peut substituer l'angle θ, qui mesure la déviation rapportée à l'unité de longueur, ainsi que nous l'avons définie dans l'énoncé de la loi de Coulomb.

Si le cylindre était creux, et que r' fût le rayon du vide intérieur, on aurait l'équation

$$\frac{\Theta}{L} = \theta = A\frac{Pp}{r^4 - r'^4}.$$

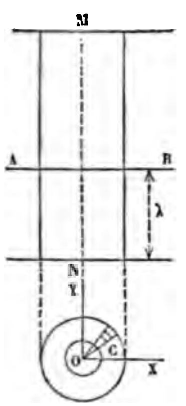
Ces lois ont servi à Coulomb à l'étude de divers problèmes de physique : sa *balance de torsion* est l'instrument le plus commode pour la recherche des lois des attractions magnétiques ou électriques. Il s'en est servi aussi pour évaluer les actions mutuelles des fluides et des solides dans le mouvement relatif.

On suppose d'ailleurs que le rapport $\frac{\Theta}{L}$, ou que l'arc θ, soit très-petit; au delà d'un certaine limite, la proportionnalité de θ au couple Pp n'est plus en effet vérifiée par l'expérience.

148. Voici comment on peut justifier par un raisonnement de statique les lois que Coulomb a déduites de l'observation directe.

Coupons le cylindre MN par un plan AB perpendiculaire à la direction de ses arêtes, et éloigné de son extrémité libre N d'une quantité λ quelconque. La portion de cylindre ABN est en équilibre sous l'action du couple extérieur P*p* agissant dans le plan N, et des forces moléculaires développées dans le plan sécant AB. Ces dernières forces sont réductibles à un couple de même moment que P*p*, mais dirigé en sens contraire. La déviation angulaire totale de la section N par rapport à la section AB étant représentée par Θ, la déviation par unité de longueur du cylindre est mesurée par le rapport $\frac{\Theta}{\lambda} = \theta$.

Fig. 156.



Appelons ρ et ω les coordonnées polaires d'un point C quelconque de la section AB, rapportées au centre O de cette section, et à un axe OX arbitraire. Prenons au point C un élément de surface, dont l'aire sera mesurée par $\rho d\omega d\rho$; nous admettrons que cet élément développe, perpendiculairement au rayon OC, une résistance proportionnelle à l'aire $\rho d\omega d\rho$ de l'élément, proportionnelle à l'angle θ de déviation par unité de longueur, et enfin proportionnelle à la distance ρ. Le produit de ces derniers facteurs, ρ et θ, mesure en effet le déplacement relatif que subit dans la torsion l'élément considéré par rapport à l'élément correspondant pris dans la section voisine ; et la direction de la force, perpendiculaire à OC, a la direction même de ce déplacement relatif. Appelons donc G une nouvelle constante spécifique. La résistance totale de l'élément à la torsion sera exprimée par le produit

$$G\theta\rho \times \rho d\omega d\rho = G\theta\rho^2 d\omega d\rho,$$

et son moment par rapport à l'axe projeté en O sera

$$G\theta\rho^3 d\omega d\rho.$$

Prenons la somme de tous ces moments, en l'étendant à toute la section, que nous supposons limitée extérieurement à un cercle de rayon r, et intérieurement à un cercle de rayon r' ; nous devrons trouver un moment égal au couple P*p*. Nous aurons ainsi l'équation

$$G\theta \int_0^{2\pi} d\omega \int_{r'}^{r} \rho^3 d\rho = Pp,$$

ou bien

$$2\pi G\theta \frac{r^4 - r'^4}{4} = \frac{\pi}{2} G\theta (r^4 - r'^4) = Pp,$$

ou enfin

$$\theta = \frac{2}{\pi G} \frac{Pp}{r^4 - r'^4}.$$

La constante A est liée à la nouvelle constante G par la relation

$$A = \frac{2}{\pi G},$$

qui permet de passer de l'une à l'autre.

La résistance à la torsion par unité de surface est représentée par $G\theta\rho$, et par suite, à une distance du point O égale à l'unité, elle est égale à $G\theta$.

Les forces moléculaires, dans cet exemple, se font équilibre en projection sur un axe quelconque et se réduisent par suite à un couple ; car deux éléments symétriquement placés par rapport au point O développent, d'après nos hypothèses, des forces égales, parallèles et de sens contraires.

149. La constante G a été déterminée par expérience (1).

En prenant pour unité de force le kilogramme, et pour unité de surface le mètre carré, on a trouvé pour G les valeurs suivantes :

Acier fondu. . . .		10 000 000 000
Acier.		6 000 000 000
Fer.	de	6 000 000 000
	à	6 600 000 000
Cuivre.		4 366 000 000
Fonte..		2 200 000 000
Bronze.		1 066 000 000
Sapin.		433 000 000
Chêne.		400 000 000

On a pu de même déterminer par l'observation la limite d'élasti-

(1) Il est facile de voir que l'homogénéité de la formule

$$\frac{\Theta}{L} = \frac{2}{\pi G} \frac{Pp}{r^4 - r'^4},$$

ou de la formule plus générale qu'on établira plus loin

$$\frac{\Theta}{L} = \frac{1}{G} \frac{Pp}{I},$$

exige que la constante G représente une force rapportée à l'unité de surface.

cité des corps à la torsion. Pour le fer forgé, on l'a trouvée égale à 14,000,000 de kilogrammes par mètre carré.

150. Nous venons de voir qu'en un point éloigné du centre O d'une quantité égale à ρ, l'effort développé dans la matière par unité de surface est égal à $G\theta\rho$; il est maximum pour le maximum de ρ, c'est-à-dire pour $\rho = r$, et si l'on suppose que le cylindre soit plein, on aura par conséquent

$$G\theta r = \frac{2}{\pi}\frac{Pp}{r^3}.$$

Cette quantité doit rester au-dessous de la limite d'élasticité; d'où résulte cette règle pratique : *les arbres cylindriques pleins, soumis à des efforts de torsion, doivent recevoir des diamètres proportionnels, pour une même matière, à la racine cubique du moment du couple de torsion.*

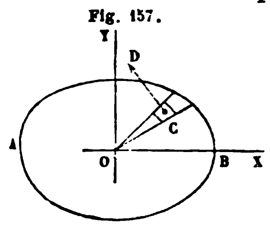
Les formules que l'on trouve dans les aide-mémoire pour le calcul des dimensions des arbres tournants, des tourillons, et des autres pièces de machines qui doivent résister à la torsion, dérivent de l'équation précédente. On se sert habituellement de l'équation

$$d^3 = K\,\frac{T}{n},$$

dans laquelle T exprime en kilogrammètres le travail transmis par minute à l'arbre tournant, n le nombre de tours que fait l'arbre en une minute, K un coefficient empirique qui varie avec la destination de l'arbre et la matière dont il est formé, et d le diamètre de l'arbre, en centimètres. Il est facile de reconnaître que $\frac{T}{n}$ est proportionnel au couple appliqué à l'arbre.

151. On a cherché à étendre aux prismes quelconques les lois de la torsion des cylindres.

Soit AB la section du prisme, supposée la même en tous les points de sa longueur. Par le centre de gravité O menons deux axes rectangulaires OX, OY. Puis considérons au point C un élément de surface compris entre deux rayons vecteurs menés sous les angles ω et $\omega + d\omega$, et deux circonférences tracées autour du point O,



aux distances ρ et $\rho+d\rho$. Admettons que dans la torsion, l'élément C se déplace par rapport à l'élément correspondant de la section infiniment voisine, d'une quantité proportionnelle à $\rho\theta$, dans une direction CD normale à OC. La résistance à la torsion développée par ce déplacement relatif est donc dirigée dans le sens CD, et on peut l'exprimer par le produit $G \times \rho\theta \times \rho d\omega d\rho$; décomposons-la parallèlement aux axes OX, OY ; il suffit pour cela de multiplier ce produit par $\cos\omega$ et $\sin\omega$, ce qui donnera, en appelant x et y les coordonnées rectangles du point C,

$$Gx\theta \times \rho d\omega d\rho \quad \text{parallèlement à l'axe des } y,$$

et

$$Gy\theta \times \rho d\omega d\rho \quad \text{parallèlement à l'axe des } x.$$

Pour l'équilibre de toutes ces forces moléculaires et du couple Pp, on doit donc avoir, en étendant les sommations à toute la section,

$$G\theta \iint x \times \rho d\omega d\rho = 0,$$

$$G\theta \iint y \times \rho d\omega d\rho = 0,$$

$$G\theta \iint \rho^2 \times \rho d\omega d\rho = Pp.$$

Or la première équation et la seconde sont satisfaites d'elles-mêmes ; car les doubles sommes expriment les sommes des moments des éléments de surface par rapport aux axes OY, OX ; et ces moments sont nuls, puisqu'on a pris pour origine le centre de gravité de la section.

La troisième équation contient une double somme qui est la somme des produits des éléments de section par le carré de leur distance à l'axe mené perpendiculairement à la section en son centre de gravité O. C'est le moment d'inertie de la section par rapport à l'*axe central* de la pièce prismatique. Représentons-le par I, et nous aurons l'équation

$$\theta = \frac{1}{G}\frac{Pp}{I}.$$

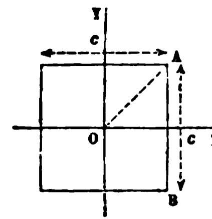
L'effort par unité de surface à une distance ρ du point O sera encore donné par l'expression

$$G\theta\rho = \frac{Pp\rho}{I},$$

et l'on devra faire ρ égal à son maximum pour avoir le plus grand effort développé dans la matière.

Par exemple, prenons pour section droite du prisme un carré de côté $c = AB$.

Fig. 158.



Pour avoir le moment d'inertie par rapport à l'axe projeté en O, on peut prendre les moments d'inertie par rapport aux axes OX, OY, puis faire la somme ; on aura donc

$$I = \frac{1}{12} c^4 + \frac{1}{12} c^4 = \frac{1}{6} c^4,$$

et la plus grande valeur de ρ sera égale à

$$OA = \frac{1}{2} c \sqrt{2};$$

$\frac{I}{\rho}$ a donc pour valeur limite

$$\frac{\frac{1}{6} c^4}{\frac{1}{2} c \sqrt{2}} = \frac{1}{6} c^3 \sqrt{2},$$

et la charge par unité de surface aux points les plus fatigués est égale à

$$\frac{6Pp}{c^3 \sqrt{2}}.$$

152. Cette théorie suppose que, dans un prisme de forme quelconque, la torsion dévie de quantités angulaires égales à tous les rayons vecteurs menés dans chaque section par le centre de gravité, et sans les faire sortir de leur plan. Si la section est très-voisine du cercle, cette hypothèse est encore admissible ; mais elle ne l'est plus du tout si la section a des rayons vecteurs de dimensions très-différentes ; il serait tout à fait faux, par exemple, d'appliquer la formule générale

$$\theta = \frac{Pp}{GI}$$

à une section rectangulaire longue et mince. L'expérience est d'accord avec la théorie générale de l'élasticité pour montrer combien est grossière dans ces cas généraux la théorie élémentaire de la torsion des prismes. De savants calculs, dus à M. Barré de Saint-Venant, ont commencé à combler cette lacune, en tenant compte du gauchissement des sections planes (1). Mais ce sujet est étranger au plan de notre cours.

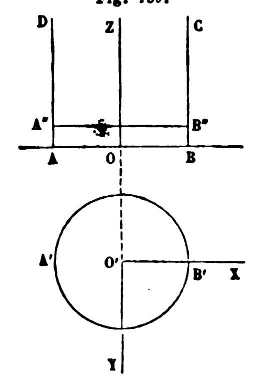
Remarquons d'ailleurs que, lorsqu'une pièce est destinée à subir des efforts de torsion, on est instinctivement conduit à lui donner une forme voisine de la forme circulaire, et qu'alors la théorie élémentaire de la torsion fait connaître les limites de sa déformation avec une suffisante exactitude.

Les lacunes de la théorie ont donc plus d'importance au point de vue scientifique qu'au point de vue des applications.

153. La torsion est la dernière déformation élémentaire que nous ayons à étudier, et nous pouvons résumer comme il suit l'ensemble des opérations à faire pour trouver la répartition principale des efforts dans un solide soumis à des forces quelconques, et les déformations élémentaires que ce corps a à subir.

Soit ABCD une pièce prismatique en équilibre. Coupons-la par un plan transversal AB, et soit A'B' la section de la pièce par ce plan rabattue sur le papier. Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires, l'un OZ, mené par le centre de gravité O de la section perpendiculairement à son plan, les autres O'X, O'Y, menés par le centre de gravité dans le plan de la section, suivant la direction des axes principaux de l'ellipse d'inertie.

Fig. 159.



Les forces extérieures appliquées à la portion du corps située au-dessus du plan AB, sont tenues en équilibre par les forces moléculaires développées dans ce plan AB. Nous pouvons réduire les forces exté-

(1) *De la torsion des prismes*, t. XIV des Mémoires des Savants étrangers. — Navier, *Résumé des leçons de l'École des ponts et chaussées*, 3e édition, t. I; art. V. *Notes*.

rieures à trois forces X, Y, Z, appliquées au point O et dirigées suivant les trois axes, et à trois couples L, M, N, situés respectivement dans les plans coordonnés, YOZ, ZOX, XOY. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que deux espèces de forces moléculaires développées dans une section plane : l'une est une résistance à l'effort tranchant, qui se développe dans le plan de la section parallèlement à une direction définie ; l'autre est une force provenant de l'extension ou de la compression des fibres, et on l'introduit dans le calcul en admettant qu'elle est en chaque point une fonction linéaire des coordonnées de ce point.

Décomposons les résistances à l'effort tranchant développées par chaque élément de section, en deux forces parallèles aux axes OX et OY, et appelons T_x la somme des composantes dirigées suivant l'axe OX, et T_y la somme des composantes dirigées suivant l'axe OY.

La résistance R par unité de surface, normale à la section AB, est par hypothèse exprimable par une fonction linéaire des coordonnées du point d'application, et nous poserons par conséquent

$$R = Ax + By + C,$$

A, B, C étant des coefficients indéterminés.

Écrivons les six équations d'équilibre entre les forces extérieures et les forces moléculaires :

$T_x = X$	équation des composantes parallèles à l'axe	des x,
$T_y = Y$	*id.*	des y,
$\iint Rdxdy = Z$	*id.*	des z,
$\iint Rydxdy = L$	équations des moments autour	de l'axe OX,
$\iint Rxdxdy = M$	*id.*	de l'axe OY,
$T_y x_1 - T_x y_1 = N$	*id.*	de l'axe OZ.

Les coordonnées y_1, z_1 sont celles de l'un des points de passage de la résultante des efforts tranchants.

Les cinq premières équations nous donnent les composantes de l'effort tranchant total, et les trois coefficients A, B, et C de la pression normale par unité de surface. La sixième est l'équation de la

droite suivant laquelle agit la résultante de tous les efforts tranchants; si le moment des forces par rapport à l'axe OZ est nul, de telle sorte qu'il n'y ait pas torsion, la résistance à l'effort tranchant, ou la résultante des forces T_x, T_y, passe par le centre de gravité O de la section.

Si N n'est pas nul, il y a torsion; dans ce cas les forces T_x, T_y, au lieu d'être appliquées au point O, sont appliquées en un point x_1, y_1, et en les transportant au point O parallèlement à elles-mêmes, on donne naissance à deux couples, qui se composent en un seul

$$T_y x_1 - T_x y_1,$$

faisant équilibre au couple N.

Introduisons la valeur de R dans nos équations. Nos hypothèses sur la position et la direction des axes OX, OY, nous donnent:

$$\iint x dx dy = 0, \qquad \iint y dx dy = 0, \qquad \iint xy dx dy = 0.$$

Posons de plus:

$$\iint dx dy = \Omega, \qquad \iint y^2 dx dy = I_x, \qquad \iint x^2 dx dy = I_y.$$

Il viendra pour déterminer nos inconnues les six équations réduites :

$$\begin{aligned} T_x &= X \\ T_y &= Y \\ C\Omega &= Z \\ BI_x &= L \\ AI_y &= M \\ T_y x_1 - T_x y_1 &= N \end{aligned}$$

Dans le cas où les forces X et Y seraient nulles ensemble, T_x et T_y seraient aussi nuls, et les efforts tranchants se réduiraient, non pas à une force, mais à un couple dont le moment serait égal à N. Ce cas particulier n'a donc rien d'embarrassant.

Cherchons la déformation subie par le solide. Pour cela, considérons, dans le prisme à l'état naturel, la tranche comprise entre le plan de la section AB et un plan A″B″, parallèle et infiniment voisin. Les forces X et Y tendent simplement à faire glisser la tranche sur le plan AB. On admet que ce déplacement est négligeable.

La force Z produit une compression ou une extension, c'est-à-dire rapproche ou éloigne le plan A″B″ du plan AB.

Les couples L et M donnent chacun une flexion particulière, et ces deux déformations élémentaires se composent pour faire basculer autour d'une certaine droite le plan A″B″.

Le couple N produit une torsion autour de l'axe du prisme, et tend à changer l'orientation de la section A″B″ par rapport à la section AB, en lui faisant décrire dans son plan un petit angle autour de son centre de gravité.

Nous avons montré comment on pouvait, à l'aide des deux coefficients d'élasticité E et G, calculer les déformations élémentaires provenant de ces efforts de compression, de flexion et de torsion; après les avoir déterminées séparément, on les composera ensemble par les règles de la cinématique; le calcul intégral permettra ensuite de trouver la forme d'une portion finie du solide. On peut remarquer que la déformation des pièces courbes se prêterait à une décomposition tout à fait identique.

SUPPLÉMENT AU LIVRE III.

NOTE SUR L'ÉCOULEMENT DES CORPS SOLIDES.

154. La théorie de l'*écoulement des corps solides*, récemment fondée par les recherches de M. Tresca, paraît étrangère à la résistance des matériaux, puisqu'elle a en vue des déformations permanentes, qui s'opèrent en dehors des limites de l'élasticité. Il convient toutefois d'en dire un mot ici, parce qu'elle jette un grand jour sur les phénomènes observés dans diverses opérations, telles que le cisaillement, le poinçonnage, la préparation des métaux à la forge ou au laminoir, le passage à la filière (§ 5), et que de plus elle conduit à la détermination précise de certaines constantes spécifiques qu'on ne pourrait pas définir exactement en considérant seulement les déformations infiniment petites.

Si l'on imagine un corps solide dont la surface est soumise à des pressions graduellement croissantes, la limite d'élasticité est bientôt dépassée, et le coefficient d'élasticité, qui s'était jusque-là maintenu sensiblement constant, décroît de plus en plus rapidement à mesure que la pression extérieure s'élève. Le corps entre alors dans une période d'élasticité imparfaite. Si l'on augmente encore la pression, l'élasticité disparaît entièrement, et, sous l'influence des pressions qu'il subit, le solide se comporte comme un véritable liquide : il devient susceptible de couler. M. Tresca a donné le nom de *période de fluidité* à cet état moléculaire, dans lequel le coefficient d'élasticité est réduit à zéro, et où toute trace d'élasticité a effectivement disparu. La *pression de fluidité* est la plus petite pression par unité de surface nécessaire pour produire un tel résultat.

Le principe général de la théorie de l'écoulement des solides peut être formulé en ces termes :

Toutes les fois qu'une pression est exercée sur un corps solide, cette pression tend à déterminer un écoulement relatif des molécules, qui doivent se mouvoir chacune dans la direction où la résistance à son mouvement est la moindre.

155. Pour donner un exemple de l'application de cette théorie, nous traiterons le problème suivant, que nous empruntons au cours de M. Tresca à l'École centrale des arts et manufactures.

Soit AA'B'B un cylindre très-résistant, dans lequel se meut un piston P. Sous le piston on place un bloc de plomb remplissant exactement le cylindre; une ouverture circulaire CD est pratiquée au centre de la paroi inférieure AA', de sorte que le piston P, en refoulant le bloc de plomb, force les molécules à s'échapper par cet orifice CD, sous forme d'un jet cylindrique CDEF, concentrique au cylindre AA'B'B.

Fig. 160.

Désignons par

a le rayon du cylindre AA';

b le rayon de l'orifice circulaire CD;

H la distance de la face inférieure BB' du piston au fond AA', quand on commence à comprimer le bloc de plomb;

x la distance de la même face au fond AA' quand le piston a parcouru un certain chemin;

y la longueur CE du jet qui correspond à cet espace décrit par le piston.

L'expérience montre que le poids spécifique de la matière comprimée reste constant malgré la compression subie, grâce à l'écoulement incessant qui s'opère par l'orifice CD. Si donc le piston descend de la quantité $Bb = -dx$, le jet doit s'allonger d'une quantité $Ee = dy$, telle que l'on ait l'équation

$$\pi b^2 dy + \pi a^2 dx = 0. \qquad (1)$$

Mais il est clair que le mouvement des molécules s'est opéré de proche en proche : les molécules de la tranche BB'bb' n'ont pas traversé la masse entière pour aller se ranger dans la tranche EFef. En réalité, l'abaissement Bb du piston fait rentrer dans le bloc les molécules de la tranche BB'bb'; ces molécules y exercent une compression qui se transmet au pourtour du *cylindre central* CGHD, c'est-à-dire du cylindre obtenu en prolongeant à l'intérieur du bloc le cylindre formé par le jet; et, conformément au principe ci-dessus posé, la compression subie par le cylindre central fait jaillir au dehors, par l'orifice libre, un volume de matière égal au volume qu'elle lui fait perdre par réduction de son rayon. L'abaissement Bb produit donc la transformation du cylindre GCDH dans le cylindre plus petit *gcdh*, et l'évacuation d'une tranche CDc'd' de volume égal à l'anneau cylindrique compris entre les deux cylindres. La condition de constance du poids spécifique donne, en appelant $-db$ la diminution Gg du rayon du cylindre central, l'équation

$$2\pi b db \times x = \pi(a^2 - b^2)dx. \qquad (2)$$

Or le cylindre central peut être considéré comme formé d'une infinité de cylindres de même axe, qui subissent tous une compression latérale transmise de proche en proche. Désignons par r le rayon d'un de ces cylindres; ce rayon subira une diminution représentée par $-dr$, et l'on est conduit à admettre que la contraction simultanée de tous les rayons concentriques n'altère pas les rapports de leurs rayons, ce qui revient à exprimer que la diminution de chaque rayon est proportionnelle au rayon lui-même. On a dans cette hypothèse

$$\frac{dr}{r} = \frac{db}{b}. \qquad (3)$$

156. Ces équations permettent de résoudre le problème suivant, qui servira à vérifier par des observations directes les hypothèses sur lesquelles la solution est établie : *Que devient dans le jet, arrêté à un instant quelconque, le cylindre central qu'on pouvait concevoir dans le bloc au commencement de l'expérience ?*

Au commencement de l'expérience, la longueur du jet est nulle, et le cylindre central primitif est projeté sur la figure entre les lignes CG, DH. Lorsque le piston est descendu en $B_1B'_1$, ce cylindre primitif CGHD s'est transformé en un volume $EC_1G_1H_1D_1F$, dont une partie, $G_1H_1D_1C_1$, encore comprise dans l'intérieur du bloc, a conservé la forme cylindrique, tandis que l'autre, C_1D_1FE, comprise dans le jet, a des diamètres graduellement croissants de l'orifice au bout du jet EF, point où le diamètre variable est égal au diamètre de l'orifice.

Fig. 161.

Soit r le rayon de la partie cylindrique; x étant la distance AB_1, on pourra appliquer au cylindre $C_1G_1H_1D_1$ et au cylindre central actuel, CG'H'D les équations (2) et (3); il viendra, en éliminant db entre ces deux équations, la relation

$$(a^2 - b^2)dx = 2b^2 \frac{dr}{r} \times x,$$

ou bien

$$(a^2 - b^2)\frac{dx}{x} = 2b^2 \frac{dr}{r},$$

dont l'intégration donne

$$\log \frac{x}{H} = \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \log \frac{r}{b},$$

en observant que, pour $x = H$, on a $r = b$.

Donc
$$r = b \left(\frac{x}{H}\right)^{\frac{a^2 - b^2}{2b^2}}. \quad (4)$$

Cette équation fait connaître la position de la génératrice droite C_1G_1.

Pour trouver l'équation de la courbe C_1E qui y fait suite, observons que chaque déplacement $-dx$ du piston accroît le jet d'une longueur dy donnée par l'équation (1). Or dans ce jet élémentaire le transformé du cylindre central primitif fournit un petit cylindre de rayon r et de longueur dy. Rapportons la courbe EC_1 aux axes OO' et OE, le premier servant à compter les abscisses $y = OL$, le second les ordonnées $r = LC_1$. Il suffira pour avoir l'équation cherchée d'exprimer r en fonction de y, ou de remplacer dans l'équation (4) x par sa valeur en y déduite de l'équation (1). Il vient, en effet, en intégrant l'équation (1), sous la condition que l'on ait à la fois $y = 0$ et $x = H$,

$$b^2y + a^2(x - H) = 0. \quad (5)$$

Éliminant x entre (4) et (5), il vient

$$r = b\left(1 - \frac{b^2y}{a^2H}\right)^{\frac{a^2-b^2}{2b^2}} \quad (6)$$

pour l'équation de la méridienne EC_1.

On peut aller plus loin, et, en exprimant l'égalité des volumes, trouver quelle forme EFMN prend dans le jet une tranche quelconque CD*mn* du cylindre central primitif.

Pour vérifier ces résultats, on se servira d'un bloc de plomb découpé d'avance suivant la forme extérieure du cylindre central primitif; l'expérience justifie le calcul en faisant retrouver au centre du jet la matière de ce cylindre déformée suivant la surface de révolution indiquée par la théorie.

M. Tresca a varié ces expériences de bien des manières. Il a opéré sur des *jets creux*, et a reconnu la formation de vides comme ceux que produit l'entraînement de l'air dans l'écoulement des liquides par des *trompes catalanes*. L'écoulement des solides, sous des pressions assez grandes pour le provoquer, est en résumé tout à fait analogue à l'écoulement des fluides ; on y retrouve toutes les circonstances accessoires, jusqu'au phénomène de la *contraction de la veine*.

157. L'application du principe de la moindre résistance rend compte de certaines particularités. Par exemple, si l'on perce avec un poinçon une plaque de plomb prise entre deux surfaces résistantes, qui laissent seulement libre le passage de l'outil perforateur, la débouchure obtenue n'aura pas l'épaisseur de la plaque; les molécules supérieures, refoulées directement par le poinçon, rencontrent la résistance des molécules situées au-dessous; elles tendent à glisser latéralement, et à rentrer dans le bloc; les molécules inférieures, au contraire, n'ont pas à vaincre la même résistance et sont chassées directement à l'extérieur. Aussi lorsqu'on substitue au bloc une pile de plaques d'égale épaisseur et de même épaisseur totale, la débouchure se compose d'un égal nombre de disques, dont les supérieurs sont très-amincis par la compression, tandis que les inférieurs conservent sensiblement leur épaisseur primitive. Il faut tenir compte de ce phénomène quand on veut mesurer la résistance d'un métal au cisaillement. Si l'on enfonce, par exemple, un poinçon dans une pièce métallique, la première résistance rencontrée par l'outil est uniquement due à la compression de la matière. La résistance

au cisaillement ne commence à intervenir que lorsqu'une débouchure commence à apparaître sur la face inférieure de la pièce, et elle a pour mesure le produit de la surface réellement cisaillée au pourtour de la débouchure par une constante spécifique, qui n'est autre que la *pression de fluidité.*

On choisit le plomb de préférence aux autres métaux pour cette série d'expériences, parce que c'est de tous les métaux usuels celui qui a la pression de fluidité la plus basse aux températures ordinaires. Elle est égale à 2×10^6 kilogrammes par mètre carré, soit 2 kilogrammes par millimètre carré.

LIVRE QUATRIÈME.

POUTRES DROITES POSÉES SUR PLUSIEURS APPUIS.

CHAPITRE PREMIER.

LE THÉORÈME DES TROIS MOMENTS.

IDÉE GÉNÉRALE DU PROBLÈME ET DES MÉTHODES EMPLOYÉES POUR LE RÉSOUDRE.

158. Les méthodes exposées dans notre livre second permettent à la rigueur de résoudre tous les problèmes relatifs à l'équilibre et à la flexion d'une poutre droite posée sur plusieurs appuis. Mais elles conduisent à des calculs extrêmement pénibles lorsque le nombre des appuis est très-grand. On possède aujourd'hui, pour résoudre les questions de ce genre, qui se rencontrent très-fréquemment dans la pratique des grands travaux, une méthode beaucoup plus élégante et beaucoup plus rapide, dont les principes ont été posés par Clapeyron, et qui a reçu de M. Bertot, ingénieur civil, une transformation des plus heureuses, adoptée immédiatement et développée par Clapeyron lui-même.

Rappelons d'abord l'ancienne méthode.

Considérons une poutre droite de n travées, c'est-à-dire posée sur $n + 1$ appuis sensiblement de niveau, et sollicitée dans chaque

travée par une charge également répartie. Les réactions des appuis sont inconnues; elles sont au nombre de $n + 1$. On partagera la poutre en autant de tronçons qu'il y a de travées, et l'on aura pour chacune une équation différentielle définissant la forme de la fibre neutre après la déformation. L'intégration de ces n équations différentielles, qui sont du second ordre, introduira $2n$ constantes arbitraires, qui restent à déterminer. Le nombre total des inconnues est donc :

Réactions.	$n + 1$
Constantes arbitraires.	$2n$
En tout. . .	$3n + 1$

Pour trouver les valeurs de ces $3n + 1$ inconnues, on a $3n + 1$ équations. En effet, dans chaque travée la fibre neutre, après la déformation, doit passer par les deux appuis qui limitent la travée; cette double condition à laquelle chaque travée est assujettie, fournit deux équations par travées, ce qui fait $2n$ équations pour la poutre entière. De plus, deux travées consécutives se raccordent tangentiellement sur l'appui commun, ce qui introduit encore $n - 1$ équations de condition. Enfin il faut joindre les deux équations fournies par la statique, et qui expriment que la somme des réactions des appuis est égale à la somme des charges de la poutre, et qu'il y a égalité entre les moments de ces deux groupes de forces. On a ainsi:

Pour les points connus de l'axe neutre.	$2n$ équations
Pour le raccordement sur les appuis intermédiaires. . .	$n - 1$
Pour l'équilibre des forces extérieures.	2
En tout. . .	$3n + 1$

Le problème est donc déterminé; on peut observer de plus que les équations sont du premier degré par rapport à toutes les inconnues, de sorte que la détermination de leurs valeurs rentre dans les problèmes que l'algèbre élémentaire permet de résoudre. Mais ce qui rend inapplicable cette méthode si simple au point de vue

abstrait, c'est le nombre des équations à résoudre. Par exemple pour $n = 7$, nombre qui n'est pas bien grand, $3n + 1$ est égal à 22; de sorte que, pour faire le projet d'une poutre de sept travées, on serait conduit à résoudre vingt-deux équations du premier degré à vingt-deux inconnues, opération extrêmement laborieuse.

Parmi les travaux faits pour simplifier cette méthode, on doit mentionner une étude très-remarquable de M. Piarron de Mondésir, ingénieur en chef des ponts et chaussées, qui est parvenu à poser des formules générales donnant directement les valeurs des réactions des appuis (1).

Les méthodes de Clapeyron réduisent de beaucoup, par un choix convenable des inconnues, le nombre des équations simultanées à résoudre. Son ancienne méthode consistait à prendre pour inconnues les moments fléchissants sur les appuis, et les angles très-petits formés aux mêmes points par la fibre neutre, après sa déformation, avec l'axe neutre primitif. Les angles sont au nombre de $n + 1$, tandis que les moments fléchissants sur les appuis sont seulement au nombre de $n - 1$, car les moments fléchissants sont nuls sur les appuis extrêmes. Le nombre des inconnues s'abaisse ainsi de $3n + 1$ à $2n$. Les équations prennent dans ce système une forme simple, qui se prête à une résolution facile.

Le *théorème des trois moments*, découvert par M. Bertot en 1855, a fait faire un nouveau progrès à la méthode, en éliminant les angles de déviation de la fibre neutre sur les appuis, et en réduisant le nombre des inconnues, et le nombre des équations, au nombre $n - 1$ des moments fléchissants sur les appuis intermédiaires. Ce théorème est d'ailleurs susceptible de généralisation et peut s'appliquer à une distribution quelconque de charges dans l'étendue des travées.

Nous assimilerons quelquefois dans ce qui suit la poutre droite continue à un pont jeté sur une rivière, et par suite, nous donnerons le nom de *culées* aux deux appuis extrêmes, et le nom de *piles* aux appuis intermédiaires. Le nombre des travées étant égal à n, il y a $n + 1$ appuis; nous les numéroterons de 1 à $n + 1$, en allant de

(1) L'ouvrage de M. de Mondésir a été publié en 1860, chez Dunod. Une seconde édition a paru en 1873, chez Gauthier-Villars.

gauche à droite sur l'élévation de la poutre; de sorte que l'appui n° 1 sera la première culée, les appuis n° 2, n° 3,..... n° (n) seront les $n - 1$ piles successives, et enfin l'appui n° ($n + 1$) sera la dernière culée. Nous conviendrons de donner à la travée le même numéro qu'à son appui de gauche, ce qui donnera aux n travées les numéros de 1 à n. Les deux travées extrêmes n° (1) et n° (n) sont appelées les *travées de rive;* les autres, n° 2, n° 3,....... n° ($n - 1$), sont les *travées intermédiaires*, ou *travées centrales*.

LE THÉORÈME DES TROIS MOMENTS.

159. Le théorème des trois moments peut s'énoncer comme il suit :

Si l'on considère trois appuis consécutifs A, B, C, et qu'on appelle l, l', les portées AB, BC comprises entre le premier appui et le second, entre le second et le troisième;

Fig. 162.

A B C

M, M', M'' les valeurs des moments fléchissants sur les appuis A, B, C;

Enfin p, p' les charges par unité de longueur supposées réparties également dans les deux travées AB, BC;

Les moments M, M', M'' sont liés par la relation linéaire

$$l\mathrm{M} + 2(l + l')\,\mathrm{M}' + l'\mathrm{M}'' + \frac{1}{4}\,pl^3 + \frac{1}{4}\,p'l'^3 = 0.$$

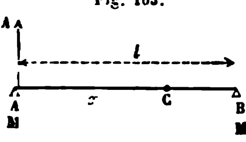
Ce théorème donne autant d'équations qu'il en faut pour déterminer dans chaque cas particulier les valeurs des moments fléchissants sur les appuis, d'après l'hypothèse faite sur la distribution des charges entre les diverses travées. On remarquera que les longueurs l et l' entrent seules dans les coefficients des moments inconnus M, M', M''.

Avant de démontrer le théorème, il est utile de poser un lemme préliminaire plus général, qui peut être regardé comme la base de la première méthode de Clapeyron.

Nous suivrons la marche qui nous a déjà servi à résoudre le problème de la flexion d'une poutre droite sur trois appuis (§ 94).

160. Considérons une travée quelconque AB, comprise entre deux appuis A et B; nous supposons que les forces extérieures et les réactions des appuis sont verticales. Après avoir coupé la poutre sur l'appui A, on rétablira l'équilibre en appliquant à la poutre dans la section A un couple égal au moment fléchissant M qui existait avant la coupure. Appelons A la portion de la réaction de l'appui A qui s'exerce sur la travée AB, enfin représentons par une lettre, μ, la somme des moments des forces extérieures données qui s'exercent sur la poutre du point A à un certain point C, défini par son abscisse x, cette abscisse étant mesurée sur l'axe neutre de la poutre AB à partir du point A pris pour origine; μ est donc une fonction connue de x.

Fig. 163.



Le moment fléchissant de la poutre au point C sera donné par l'équation

$$\mathrm{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{M} + \mu + \mathrm{A}x.$$

Soit φ l'angle que fait en A avec l'horizon l'axe neutre déformé; nous aurons, en intégrant une première fois l'équation qui précède,

$$\mathrm{EI}\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tang}\varphi\right) = \mathrm{M}x + \int_0^x \mu dx + \frac{1}{2}\,\mathrm{A}x^2.$$

L'intégrale $\int_0^x \mu dx$ est une nouvelle fonction de x que nous représenterons par ρ; et nous aurons par suite, en intégrant une seconde fois,

$$\mathrm{EI}(y - x\operatorname{tang}\varphi) = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}x^2 + \int_0^x \rho dx + \frac{1}{6}\,\mathrm{A}x^3.$$

Dans ces équations, faisons $x = l$, et appelons N, Q, S, les valeurs

que prennent pour cette valeur particulière de la variable les fonctions μ, $\rho = \int_0^x \mu dx$, et $\int_0^x \rho dx$; pour cette même valeur $x = l$, on a $y = h$, et $\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{M}'$, M' désignant le moment fléchissant au point B, et h la hauteur de ce point au-dessus du point A ; soit encore φ' l'angle que fait l'axe neutre déformé avec l'horizon au point B, de sorte que, pour $x = l$, on ait $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\varphi'$; il viendra les trois équations :

$$\mathrm{M}' = \mathrm{M} + \mathrm{N} + \mathrm{A}l,$$
$$\mathrm{EI}(\operatorname{tang}\varphi' - \operatorname{tang}\varphi) = \mathrm{M}l + \mathrm{Q} + \frac{1}{2}\mathrm{A}l^2,$$
$$\mathrm{EI}h - \mathrm{EI}l\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{M}l^2 + \mathrm{S} + \frac{1}{6}\mathrm{A}l^3.$$

Éliminons A entre la première de ces équations et la troisième, puis entre la seconde et la troisième ; il vient

$$\mathrm{M}'\frac{l^2}{6} + \mathrm{EI}l\operatorname{tang}\varphi = -\frac{1}{3}\mathrm{M}l^2 + \frac{1}{6}\mathrm{N}l^2 - \mathrm{S} + \mathrm{EI}h,$$
$$\mathrm{EI}\frac{l}{3}\operatorname{tang}\varphi' + \frac{2}{3}\mathrm{EI}l\operatorname{tang}\varphi = -\frac{1}{6}\mathrm{M}l^2 + \frac{1}{3}\mathrm{Q}l - \mathrm{S} + \mathrm{EI}h.$$

Les quantités N, Q, S, qui dépendent des forces extérieures, sont connues ; au contraire M, M', tgφ, tgφ' sont inconnues, et ces deux équations font voir que M' et tgφ *sont des fonctions linéaires connues de* M *et* tangφ', quelle que soit d'ailleurs la distribution des forces extérieures.

Pour revenir au cas ordinaire où les forces extérieures données se réduisent à des poids uniformément répartis par unité de longueur, à raison de p kilogrammes par mètre courant, il suffit d'observer qu'on a alors :

$$\mu = -\frac{1}{2}px^2,$$
$$\rho = \int_0^x \mu dx = -\frac{1}{6}px^3,$$
$$\int_0^x \rho dx = -\frac{1}{24}px^4,$$

et par suite, en faisant $x = l$,

$$N = -\frac{1}{2} pl^2,$$

$$Q = -\frac{1}{6} pl^3,$$

$$S = -\frac{1}{24} pl^4.$$

D'où résultent enfin les deux équations

$$M' = -2M - \frac{6EI}{l} \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{4} pl^2 + \frac{6EIh}{l^2},$$

$$\operatorname{tang} \varphi' = -2 \operatorname{tang} \varphi - \frac{1}{2} \frac{l}{EI} M - \frac{1}{24} \frac{pl^3}{EI} + \frac{3h}{l}.$$

Les angles φ et φ', étant très-petits, peuvent être pris pour leurs tangentes, et l'on parvient ainsi au lemme suivant :

« Le moment fléchissant sur un appui quelconque, et l'angle « très-petit que forme en ce point avec l'horizon la tangente à l'axe « neutre déformé, sont exprimables par des fonctions *linéaires* du « moment fléchissant sur l'appui précédent, et de l'angle de la tan- « gente à l'axe neutre avec l'horizon sur ce même appui précé- « dent. »

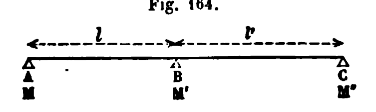
Ce lemme fournit une méthode générale pour trouver les moments fléchissants sur les appuis d'une poutre posée sur tant d'appuis qu'on voudra. En effet, appliqué au second appui, il conduit à exprimer le moment sur cet appui et l'angle d'inclinaison de l'axe neutre déformé, par des fonctions linéaires du seul angle φ_1 de l'axe neutre avec l'horizon sur le premier appui ; car le moment fléchissant sur le premier appui est nul. Passant au troisième appui, on pourra, par de simples substitutions, exprimer aussi les deux inconnues M et φ, correspondantes à cet appui, par des fonctions linéaires de φ_1 ; et opérant de la même manière pour tous les appuis successifs, on finira par exprimer le moment fléchissant sur le dernier appui par une fonction linéaire de φ_1. Or ce moment doit être nul. Il suffira donc d'égaler à zéro la fonction qui le représente pour avoir la valeur de φ_1 qui,

substituée dans toutes les expressions précédemment trouvées, donnera la valeur de chacune des inconnues.

161. Le théorème des trois moments se déduit facilement, par l'élimination des angles φ, du lemme que nous venons d'établir.

Soient A,B,C, trois appuis consécutifs, et M,M',M'' les moments fléchissants sur ces appuis; appelons φ' l'angle de l'axe neutre avec l'horizon sur l'appui intermédiaire B. En vertu du lemme, on pourra exprimer M'' par une fonction linéaire de M' et de φ'; par la même raison, on pourra exprimer M par une fonction linéaire de M' et de φ', car il suffit pour cela de prendre les travées dans l'ordre inverse; le même angle φ' se retrouve, avec un signe contraire, pour les deux travées qui aboutissent au point B, parce qu'elles se raccordent tangentiellement sur cet appui. Entre les deux équations résultantes, on éliminera φ', et l'équation finale sera une relation linéaire entre M,M',M''.

Fig. 164.



Appliquons cette méthode à une poutre continue posée sur des appuis de niveau, et sollicitée dans chacune de ses travées par des poids uniformément répartis; p,p' sont les charges par unité de longueur dans chaque travée; pour la seconde BC, nous n'avons qu'à appliquer la relation trouvée plus haut:

$$M'' = -2M' - \frac{6EI}{l'}\varphi' - \frac{1}{4}p'l'^2.$$

Pour la première travée, on devra changer φ' en $-\varphi'$, puisque pour exprimer M en fonction de M', on prend les appuis dans l'ordre rétrograde; au lieu de l'angle que fait avec l'horizon la tangente à l'axe neutre dans la travée BC, on doit prendre l'angle que fait avec l'horizon le prolongement de cette tangente, angle qui est égal au premier changé de signe; on aura donc la seconde équation:

$$M = -2M' + \frac{6EI}{l}\varphi' - \frac{1}{4}pl^2.$$

Multiplions la première par l', la seconde par l et ajoutons; l'angle φ' s'élimine, nous obtenons l'équation

$$Ml + 2M'(l + l') + M''l' + \frac{1}{4}pl^3 + \frac{1}{4}p'l'^3 = 0, \qquad (1)$$

et le théorème des trois moments est démontré.

On trouverait une relation linéaire de forme analogue entre les trois moments M, M', M'', dans le cas général où les forces seraient réparties d'une manière quelconque, et où il y aurait de petites différences de niveau entre les divers appuis (1). Mais nous nous bornerons à examiner dans ce qui suit le cas de la répartition uniforme des charges dans chacune des travées.

162. Au lieu d'éliminer les angles φ, on pourrait chercher une relation linéaire entre ces angles pris sur trois appuis consécutifs. Pour cela appliquons la formule

$$\varphi' = -2\varphi - \frac{1}{2}\frac{l}{EI}M - \frac{1}{24}\frac{pl^3}{EI} + \frac{3h}{l},$$

d'abord à la travée BC, puis à la travée AB prise dans le sens BA; nous trouverons les deux équations

$$\varphi'' = -2\varphi' - \frac{1}{2}\frac{l'}{EI}M' - \frac{1}{24}\frac{p'l'^3}{EI} + \frac{3h''}{l'},$$

$$-\varphi = +2\varphi' - \frac{1}{2}\frac{l}{EI}M' - \frac{1}{24}\frac{pl^3}{EI} - \frac{3h'}{l}.$$

Divisant la première par l', la seconde par l, et retranchant, on obtient la relation cherchée :

$$\frac{\varphi}{l} + 2\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right)\varphi' + \frac{\varphi''}{l'} = \frac{1}{24EI}(pl^2 - p'l'^2) + 3\left(\frac{h'}{l^2} + \frac{h''}{l'^2}\right).$$

Lorsque les deux travées sont égales et également chargées, et que

---

(1) Soit h' la hauteur de l'appui B au-dessus de l'appui A, et h'' la hauteur de l'appui C au-dessus de l'appui B. La seule modification à introduire dans l'équation (1) consisterait à remplacer dans le second membre zéro par le terme

$$6EI\left(\frac{h''}{l'} - \frac{h'}{l}\right);$$

ce terme devient nul quand les trois points A, B, C sont en ligne droite.

les trois appuis sont de niveau, on a

$$l = l', \quad p = p' \quad \text{et} \quad h' = h'' = 0;$$

l'équation prend alors la forme très-simple

$$\varphi + 4\varphi' + \varphi'' = 0.$$

RÉSOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUQUEL CONDUIT LE THÉORÈME DES TROIS MOMENTS.

163. Considérons une poutre droite continue de n travées, reposant sur $n + 1$ appuis du niveau.

Appelons $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ les longueurs de chaque travée, et p_1, $p_2, \ldots p_n$ les poids par unité de longueur dans chacune d'elles.

Le numéro d'une travée sert d'indice à la fois à la longueur l de cette travée, et au poids p qui y est uniformément réparti; il est égal au numéro de l'appui de gauche de la travée.

Appelons enfin $M_2, M_3, \ldots\ldots M_n$ les $n - 1$ moments fléchissants inconnus sur les appuis n°s 2, 3,..... n; nous omettons le moment fléchissant sur l'appui n° 1, ou sur la première culée, et le moment fléchissant sur l'appui n° $(n + 1)$ ou sur la seconde culée, parce que ces moments sont nuls, la poutre reposant sans encastrement sur ses appuis extrêmes.

On aura pour déterminer les $n - 1$ moments inconnus, le groupe suivant de $n - 1$ équations du premier degré, qui ne sont que l'application de l'équation (1) à trois appuis consécutifs quelconques:

$$2(l_1 + l_2)M_2 + l_2M_3 = -\frac{1}{4}(p_1l_1^3 + p_2l_2^3),$$

$$l_2M_2 + 2(l_2 + l_3)M_3 + l_3M_4 = -\frac{1}{4}(p_2l_2^3 + p_3l_3^3),$$

$$l_3M_3 + 2(l_3 + l_4)M_4 + l_4M_5 = -\frac{1}{4}(p_3l_3^3 + p_4l_4^3),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_{n-2}M_{n-2} + 2(l_{n-2} + l_{n-1})M_{n-1} + l_{n-1}M_n = -\frac{1}{4}(p_{n-2}l^3_{n-2} + p_{n-1}l^3_{n-1}),$$

$$l_{n-1}M_{n-1} + 2(l_{n-1} + l_n)M_n = -\frac{1}{4}(p_{n-1}l^3_{n-1} + p_nl^3_n).$$

Nous poserons, pour abréger,

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{4}(p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3), \\ P_3 &= \frac{1}{4}(p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n &= \frac{1}{4}(p_{n-1} l_{n-1}^3 + p_n l_n^3), \end{aligned}$$

les équations deviendront :

$$(\mathrm{M}) \left\{ \begin{array}{ll} 2(l_1+l_2)M_2 + l_2 M_3 & = -P_2, \\ l_2 M_2 + 2(l_2+l_3)M_3 + l_3 M_4 & = -P_3, \\ l_3 M_3 + 2(l_3+l_4)M_4 + l_4 M_5 & = -P_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ l_{n-2}M_{n-2} + 2(l_{n-2}+l_{n-1})M_{n-1} + l_{n-1}M_n & = -P_{n-1}, \\ l_{n-1}M_{n-1} + 2(l_{n-1}+l_n)M_n & = -P_n. \end{array} \right.$$

Soit proposé de trouver M_2; on y parviendra en appliquant la méthode connue sous le nom de *méthode de Bezout*, et qui consiste à faire disparaître toutes les inconnues, moins une, en multipliant les équations par des coefficients indéterminés. Ici nous multiplierons la dernière équation par l'unité, l'avant-dernière par un coefficient indéterminé α_1, la précédente par un autre coefficient indéterminé α_2, et ainsi de suite jusqu'à la première équation, qui sera multipliée par un coefficient α_{n-2}.

Faisons ensuite la somme de toutes les équations ainsi transformées, et égalons à zéro les coefficients de M_3, M_4, ..., M_n dans l'équation résultante. Il viendra, pour déterminer M_2, l'équation

$$M_2[2\alpha_{n-2}(l_1+l_2) + \alpha_{n-3}l_2] = -P_2\alpha_{n-2} - P_3\alpha_{n-3} \ldots - P_{n-1}\alpha_1 - P_n,$$

et pour déterminer les $n-2$ coefficients inconnus (α), le groupe suivant de $n-2$ équations :

$$(\mathrm{A}) \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{n-2}l_2 + 2\alpha_{n-3}(l_2+l_3) + \alpha_{n-4}l_3 & = 0, \\ \alpha_{n-3}l_3 + 2\alpha_{n-4}(l_3+l_4) + \alpha_{n-5}l_4 & = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_3 l_{n-3} + 2\alpha_2(l_{n-3}+l_{n-2}) + \alpha_1 l_{n-2} & = 0, \\ \alpha_2 l_{n-2} + 2\alpha_1(l_{n-2}+l_{n-1}) + l_{n-1} & = 0, \\ \alpha_1 l_{n-1} + 2(l_{n-1}+l_n) & = 0. \end{array} \right.$$

Or ces équations sont immédiatement résolubles ; on tire α_1 de la dernière; cette valeur de α_1, substituée dans la précédente, donne α_2; l'antéprécédente donne α_3 au moyen de α_2 et de α_1, et ainsi de suite, chaque coefficient se déduisant des deux précédents, ajoutés ensemble après avoir été multipliés par des nombres connus. L'analogie conduit à poser

$$\alpha_{n-1}l_1 + 2\alpha_{n-2}(l_1 + l_2) + \alpha_{n-3}l_2 = 0,$$

et l'introduction de ce nouveau coefficient α_{n-1} permet d'exprimer M_2 par la formule

$$M_2 = \frac{P_2\alpha_{n-2} + P_3\alpha_{n-3} + \ldots\ldots + P_{n-1}\alpha_1 + P_n}{\alpha_{n-1}l_1}.$$

On remarquera que si l'on écrit en tête du groupe (A) l'équation qui définit α_{n-1}, on obtient un groupe qui ne diffère du groupe (M) qu'en ce que les moments inconnus

$$M_2,\ M_3,\ \ldots\ldots M_{n-1},\ M_n,$$

sont remplacés par les coefficients

$$\alpha_{n-2},\ \alpha_{n-3}, \ldots\ldots \alpha_1,\ 1,$$

et les quantités connues

$$P_2,\ P_3, \ldots\ldots P_{n-1},\ P_n,$$

sont toutes remplacées par zéro, sauf la première, P_2, qui est remplacée par $\alpha_{n-1}l_1$.

Les coefficients (α) sont donnés par les équations

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -2\left(1 + \frac{l_n}{l_{n-1}}\right),\\
\alpha_2 &= -2\alpha_1\left(1 + \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}}\right) - \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}},\\
\alpha_3 &= -2\alpha_2\left(1 + \frac{l_{n-2}}{l_{n-3}}\right) - \alpha_1\frac{l_{n-2}}{l_{n-3}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\alpha_{n-2} &= -2\alpha_{n-3}\left(1 + \frac{l_3}{l_2}\right) - \alpha_{n-4}\frac{l_3}{l_2},\\
\alpha_{n-1} &= -2\alpha_{n-2}\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) - \alpha_{n-3}\frac{l_2}{l_1}.
\end{aligned}$$

Il est facile de s'assurer que les coefficients α_1, α_2, α_3,... α_{n-2}, α_{n-1} ont des valeurs absolues qui sont croissantes, à partir du premier α_1, dont la valeur absolue excède le nombre 2, et qu'ils sont alternativement positifs ou négatifs, à partir de α_1, qui est toujours négatif.

On obtient donc M_2 par la formule

$$M_2 = \frac{\sum_2^n P_i \alpha_{n-i}}{\alpha_{n-1} l_1},$$

l'indice i recevant dans cette somme toutes les valeurs entières de 2 à n ; pour que cette expression soit générale, il faut admettre que α_0 est égal à l'unité ; c'est un premier coefficient constant qu'on peut mettre en tête de la suite des coefficients (α).

La même marche sert à déterminer M_n. On calculera une série γ_0, γ_1, ... γ_{n-1}, comme on calcule la série α_0, ... α_{n-1}, mais en commençant par l'autre bout de la poutre ; on trouvera de cette manière :

$$\gamma_0 = 1,$$
$$\gamma_1 = -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right),$$
$$\gamma_2 = -2\gamma_1\left(1 + \frac{l_2}{l_3}\right) - \frac{l_2}{l_3},$$
$$\gamma_3 = -2\gamma_2\left(1 + \frac{l_3}{l_4}\right) - \gamma_1 \frac{l_3}{l_4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\gamma_{n-2} = -2\gamma_{n-3}\left(1 + \frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}\right) - \gamma_{n-4}\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}},$$
$$\gamma_{n-1} = -2\gamma_{n-2}\left(1 + \frac{l_{n-1}}{l_n}\right) - \gamma_{n-3}\frac{l_{n-1}}{l_n},$$

et M_n sera donné par l'équation

$$M_n = \frac{\sum_2^n P_i \gamma_{i-2}}{\gamma_{n-1} l_n}.$$

Nous verrons plus loin qu'au moyen des deux séries (α) et (γ), on peut calculer directement un moment fléchissant quelconque. Observons d'ailleurs que, quand la poutre est symétrique par rapport à

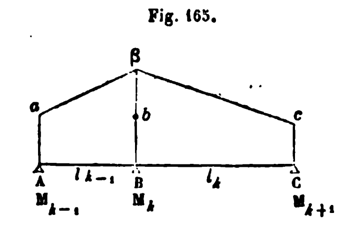
son milieu, les deux séries (α) et (γ) sont composées respectivement des mêmes nombres.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES MOMENTS SUR LES APPUIS.

164. Connaissant M_2, on en déduira successivement $M_3, M_4, \ldots M_n$; cette recherche se fait aisément par des constructions géométriques.

Lorsqu'une poutre repose sur un certain nombre d'appuis, les moments fléchissants sur les appuis intermédiaires sont tous négatifs. Sur les verticales Aa, Bb, Cc passant par les appuis A, B, C, dont les numéros sont $k-1$, k, $k+1$, prenons des longueurs Aa, Bb; Cc, égales aux valeurs absolues de M_{k-1}, M_k, M_{k+1}; doublons la longueur intermédiaire en prenant $B\beta = 2Bb$; joignons $a\beta$, $c\beta$; nous formons ainsi deux trapèzes dont la surface totale est égale à

Fig. 165.



$$AB \times \frac{Aa + B\beta}{2} + BC \times \frac{B\beta + Cc}{2} = -l_{k-1}\frac{M_{k-1} + 2M_k}{2} - l_k\frac{2M_k + M_{k+1}}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left[l_{k-1}M_{k-1} + 2(l_{k-1} + l_k)M_k + l_kM_{k+1}\right] = \frac{1}{2}P_k.$$

Le théorème des trois moments donne donc la mesure de l'aire formée par la somme de deux trapèzes $AB\beta a$, $BCc\beta$, dont les bases sont égales aux longueurs des travées, et dont les hauteurs ont des rapports simples avec les moments fléchissants sur les appuis. On peut se servir de cette propriété pour construire géométriquement la valeur absolue de M_{k+1}, au moyen des valeurs absolues de M_{k-1} et de M_k.

Soit en valeur absolue (fig. 166)

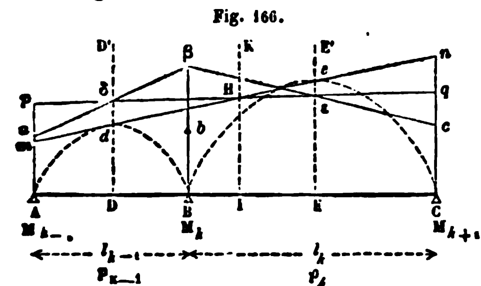
$$Aa = M_{k-1}, \quad Bb = M_k;$$

prenons

$$B\beta = Bb \times 2.$$

Il s'agit de construire la valeur absolue Cc de M_{k+1}. Supposons le problème résolu, et prenons les milieux, δ et ε, des côtés $a\beta$, βc; par ces deux points menons la droite $\delta\varepsilon$, qui, prolongée, rencontre en p et q les verticales Aa, Cc; le trapèze $ApqC$ est égal à la somme des trapèzes $Aa\beta B$, $B\beta cC$, et par suite il a pour mesure

Fig. 166.



$\frac{1}{2} P_k$. Par le milieu I de la distance AC, menons la verticale IK, qui coupe pq en H; le trapèze $ApqC$ a aussi pour mesure le produit

$$AC \times IH,$$

et par conséquent

$$IH = \frac{\frac{1}{2} P_k}{AC}.$$

Le point H est donc connu de position sur la droite IK; on connaît d'ailleurs le point δ, milieu de $a\beta$; le point ε se trouve donc à l'intersection de la droite δH avec la verticale EE' élevée sur le milieu de BC.

Au lieu de déterminer la longueur IH par l'équation

$$IH = \frac{\frac{1}{2} P_k}{AC},$$

on peut l'obtenir par une construction géométrique. Sur les verticales DD', EE' élevées au milieu des portées AB, BC, prenons des

quantités Dd, respectivement égales à

$$\frac{1}{8} p_{k-1} l^2_{k-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{8} p_k l^2_k,$$

c'est-à-dire aux valeurs des moments fléchissants qui existeraient au milieu des portées AB, BC, si elles étaient coupées sur leurs appuis; par les points d et e, menons la droite mn, qui, prolongée, forme le trapèze AmnC; ce trapèze a pour surface

$$\mathrm{AB} \times \mathrm{D}d + \mathrm{BC} \times \mathrm{E}e,$$

ou bien

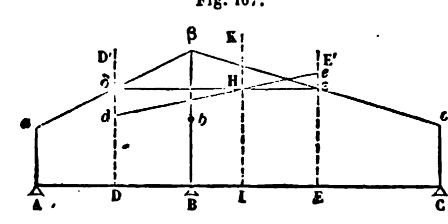
$$l_{k-1} \times \frac{1}{8} p_{k-1} l^2_{k-1} + l_k \times \frac{1}{8} p_k l^2_k = \frac{1}{8} (p_{k-1} l^2_{k-1} + p_k l^2_k) = \frac{1}{2} \mathrm{P}_k.$$

Donc il est équivalent au trapèze ApqC, et la droite mn passe par le point H comme la droite $\delta\varepsilon$.

En résumé, voici la suite des constructions à faire pour trouver M_{k+1} connaissant M_k et M_{k-1}.

Sur les verticales Aa, Bb, passant par les appuis A et B, prenons Aa égale à la valeur absolue de M_{k-1}, et Bβ égale au double de la valeur absolue de M_k ; joignons $a\beta$ et prenons le point δ milieu de Aβ. Par les points D, E, I, milieux de AB, de BC et de AC, élevons sur AC des perpendiculaires indéfinies, et prenons

Fig. 167.



$$\mathrm{D}d = \frac{1}{8} p_{k-1} l^2_{k-1}, \qquad \mathrm{E}e = \frac{1}{8} p_k l^2_k;$$

joignons de, qui coupe IK en H, joignons δH, qui, prolongée, coupe E'E en ε; enfin joignons $\beta\varepsilon$, qui, prolongée, coupe en c la verticale pas-

sant par le point C. La longueur Cc sera la valeur absolue du moment fléchissant M_{k+1}.

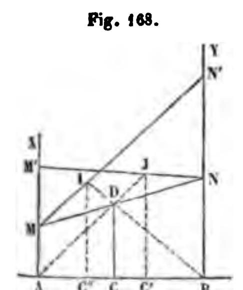
On pourra appliquer cette construction aux deux premières travées, en observant que le moment sur le premier appui est nul; on connaît M_2 par le calcul; on peut donc en déduire M_3. La même construction appliquée à la seconde et à la troisième travée donnera M_4, et ainsi de suite jusqu'aux dernières travées. Appliquée aux deux dernières travées, la construction devra donner zéro pour le moment sur le dernier appui; c'est une vérification.

MÉTHODE DE M. FOURET.

165. M. Fouret a donné, dans les *Annales des ponts et chaussées* (avril 1876, n° 21), deux méthodes entièrement graphiques pour la détermination des moments M_2, M_3, ... M_n. Ces méthodes reposent sur l'emploi du lemme suivant :

Soient donnés, sur deux droites parallèles BX, AY, *deux points fixes* A *et* B, *à partir desquels on compte sur chacune des longueurs* $AM = x$, $BN = y$. *Cela posé, si l'on fait varier la position des points* M *et* N *de telle sorte, qu'il existe constamment entre x et y une relation linéaire*

Fig. 168.



$$\alpha x + \beta y = \gamma, \qquad (1)$$

α, β *et* γ *étant des nombres donnés constants, la droite mobile* MN *pivote autour d'un point fixe.*

Cette proposition est très-facile à démontrer géométriquement. On peut aussi l'établir par des considérations mécaniques. Attribuons au point M une masse α et au point N une masse β, et soit D le centre de gravité des deux masses M et N. Ce point sera situé sur la droite MN, et si l'on mène par le point D une parallèle aux droites AX, BY, elle partagera la distance AB en deux segments AC,

CB, tels qu'on ait

$$\frac{\text{AC}}{\text{CB}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Pour avoir l'ordonnée $\text{CD} = z$ du point D, on appliquera le théorème des moments, en prenant les moments des masses α, β et $\alpha + \beta$, situées respectivement en M, N et D, par rapport au plan projeté en AB. On aura donc

$$\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta) z,$$

et comme

$$\alpha x + \beta y = \gamma,$$

il en résulte

$$z = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}, \text{ quantité constante.}$$

Donc le point D est fixe, et la droite MN pivote autour de ce point.

Remarque. Si l'on prend sur la droite AX, à partir du point A, une quantité $\text{AM}' = \text{AM} \times \theta$, θ étant un nombre constant, donné ou pris arbitrairement, et qu'on appelle x' la nouvelle ordonnée AM', on aura, entre les segments $\text{AM}' = x'$ et $\text{BN} = y$, une relation linéaire qu'on déduit de la relation (1) en y remplaçant x par $\frac{x'}{\theta}$, ce qui donne

$$\frac{\alpha}{\theta} x' + \beta y = \gamma, \qquad (2)$$

équation de même forme que l'équation (1), et qui ne diffère de celle-ci que par l'altération d'un des coefficients donnés. Donc, en vertu du lemme, la droite M'N pivote autour d'un certain point fixe J, défini par le rapport $\frac{\text{AC}'}{\text{C}'\text{B}} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)}{\beta}$, et par la distance $\text{C}'\text{J} = \frac{\gamma}{\frac{\alpha}{\theta} + \beta}$.

Or ce point J est le centre de gravité du système formé par une masse $\frac{\alpha}{\theta}$ placée en M', et une masse β placée en N. Pour passer du

point J ainsi défini au point D, pivot de la droite MN, remarquons qu'à la masse α, placée en M, on peut substituer, sans altérer les centres de gravité, une masse $\frac{\alpha}{\theta}$ placée en M', et une masse $\frac{(\theta-1)\alpha}{\theta}$ placée en A; car la somme de ces masses équivaut à α, et le rapport des segments $\frac{MM'}{MA}$ est égal à $\frac{(\theta-1)AM}{AM}=\theta-1$, rapport inverse des masses adjacentes. Connaissant le centre de gravité J des masses en M' et N, on aura le centre de gravité D des masses M et N en composant la masse $\frac{\alpha}{\theta}+\beta$, placée en J, avec la masse $\frac{(\theta-1)\alpha}{\theta}$ placée en A. Donc *les trois points* A, D, J *sont en ligne droite.*

Remarque 2. Le rapport $\frac{AC}{CB}$ est égal à $\frac{\beta}{\alpha}$, c'est-à-dire égal, au signe près, à la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{x}{y}$ lorsque x et y grandissent indéfiniment. Pour trouver la position de la parallèle CD sur laquelle se trouve le pivot de la droite MN, il suffit donc de supposer x et y infinis dans l'équation (1), et de chercher la limite de leur rapport. On aura en effet

$$\lim. \frac{x}{y}=-\frac{\beta}{\alpha},$$

relation qu'il est aisé d'interpréter sur la figure.

166. *Première méthode de M. Fouret.* — De ces considérations, M. Fouret a déduit une méthode graphique pour résoudre un système quelconque d'équations linéaires (1). Cette méthode se simplifie quand il s'agit du système des équations M. Comme on commence dans la méthode par attribuer une valeur arbitraire à M_2, les équations (M) ne seront satisfaites qu'à la condition de compléter la dernière par une inconnue de plus, M_{n+1}, qui doit être nulle pour que l'on ait les valeurs exactes cherchées. Nous considérerons donc d'abord

(1) *Association française pour l'avancement des sciences*, congrès de Nantes, 1875.

le système

$$(\mathrm{M}') \left\{ \begin{array}{l} 2(l_1 + l_2)\mathrm{M}_2 + l_2\mathrm{M}_3 = -\mathrm{P}_2 \\ l_2\mathrm{M}_2 + 2(l_2 + l_3)\mathrm{M}_3 + l_3\mathrm{M}_4 = -\mathrm{P}_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_{n-1}\mathrm{M}_{n-1} + 2(l_{n-1} + l_n)\,\mathrm{M}_n + l_n\mathrm{M}_{n+1} = -\mathrm{P}_n; \end{array} \right.$$

et l'on voit clairement que ce système, dans lequel les M sont des variables, impose des relations linéaires de la forme

$$\alpha\mathrm{M}_k + \beta\mathrm{M}_{k+1} = \gamma$$

à deux moments consécutifs quelconques. Les coefficients α et β ne dépendent que des rapports des travées, et la distribution des charges influe seulement sur le terme tout connu γ. Donc si l'on construit sur l'épure les moments fléchissants de la poutre sur ses appuis, en partant d'une valeur quelconque attribuée à M_2, chaque droite $\mathrm{M}_k\mathrm{M}_{k+1}$ pivote autour d'un point fixe D_k, dont la position est donnée dans la travée n° k par le rapport $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}} = \lim. \frac{\mathrm{M}_{k+1}}{\mathrm{M}_k}$, laquelle limite est facile à déduire du groupe M' en y supposant tous les M infinis; ce rapport ne dépend que des longueurs des travées l_1, l_2, ... l_n. Ayant construit dans chaque travée la verticale qui contient le pivot, on déterminera la position du pivot sur cette verticale en construisant le polygone

$$0\ \mathrm{M}_2\,\mathrm{M}_3 \dots \mathrm{M}_n\,\mathrm{M}_{n+1},$$

en partant d'une valeur arbitraire pour M_2. Puis, les pivots une fois déterminés, on construira le vrai polygone des moments en partant d'une valeur nulle attribuée à M_{n+1}, et en faisant passer par les pivots successifs les divers côtés de ce nouveau polygone.

167. *Seconde méthode.*— La seconde méthode de M. Fouret est un perfectionnement de la méthode géométrique exposée tout à l'heure (§ 164). Elle consiste à observer que, quand on fait varier M_2, le groupe (M) étant toujours complété par l'adoption d'une variable nouvelle M_{k+1}, et devenant ainsi le groupe (M'), les droites $a\beta$, βc des fig. 165, 166, 167, pivotent dans chaque travée autour de points fixes.

La droite $a\beta$ est définie de position par les ordonnées $Aa = M_{k-1}$ et $B\beta = 2M_k$. On déduit donc la droite $a\beta$ de la droite ab, qui, comme on vient de le voir, pivote autour d'un point fixe D_{k-1}, en doublant l'ordonnée $M_k = Bb$; donc, en vertu de la première remarque et en supposant $\theta = 2$, $a\beta$ pivote autour d'un point fixe I_{k-1}. De même la droite βc pivote autour d'un point fixe J_k. Il existe ainsi dans chaque travée deux pivots I et J, le premier qui correspond à la droite joignant le point M_k au point $2M_{k+1}$, le second, à celle qui joint le point $2M_k$ au point M_{k+1}. On voit de plus que les droites AJ, BI se coupent mutuellement au point D, pivot de la droite $M_k M_{k+1}$. Cette dernière remarque est due à M. Sacheri, de Turin.

Lorsqu'on fait varier M_2, les autres variables $M_3, \dots M_{n+1}$ varient; mais les droites $a\beta$, βc de la construction graphique passent constamment l'une par le point I_{k-1}, l'autre par le point I_k. En même temps la droite $\delta\varepsilon$ passe constamment par le point fixe H, dont la position ne dépend que des surcharges et des longueurs des travées. Le triangle variable $\delta\beta\varepsilon$ a ses trois sommets assujettis à parcourir trois droites parallèles DD', BB, EE', et ses trois côtés pivotent autour de trois points fixes, I_{k+1}, H, J_k. Donc, en vertu du *théorème de Desargues* (1), *les trois points* I_{k-1}, H *et* J_k *sont en ligne droite.*

La recherche des moments inconnus consiste, en définitive, à construire les verticales des pivots I et J dans chaque travée; puis à construire les points H relatifs à deux travées consécutives; à appliquer ensuite la construction du § 164 en partant d'une valeur arbitraire de M_2, ce qui achève de déterminer les pivots, et ce qui conduit à un moment M_{n+1} sur le dernier appui; enfin à refaire cette même construction dans l'ordre inverse, en réduisant à zéro le moment M_{n+1}, et en s'aidant des pivots. Les propriétés des points I, J, D dans chaque travée donnent de nombreuses vérifications.

---

(1) *Lorsque deux triangles ont leurs sommets respectifs situés deux à deux sur trois droites concourantes ou parallèles, les points de rencontre des côtés correspondants sont en ligne droite.* Ce théorème est évident s'il s'agit d'une figure dans l'espace; quant à la figure plane, on peut la regarder comme la perspective d'un tétraèdre ou d'un prisme triangulaire coupé par un plan, ce qui démontre la propoposition. — La réciproque est vraie. Voir plus haut, § 146.

On trouvera dans le mémoire de M. Fouret les développements de cette méthode, et l'application qu'il en a faite à un projet de pont métallique de quatre travées.

On peut consulter aussi sur le même sujet une note insérée par M. Maurice Lévy dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXIII, p. 749; la solution géométrique qui y est donnée est fondée sur les méthodes de la statique graphique.

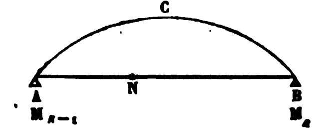
PARABOLES DES MOMENTS.

168. Supposons que tous les moments fléchissants sur les appuis soient déterminés; et proposons-nous d'en déduire le moment fléchissant dans une section quelconque de la poutre.

La section donnée est située dans une travée AB, comprise entre le $(k-1)^{me}$ et le k^{me} appui; elle est définie dans cette travée par son abscisse AN $= x$.

Nous aurons en ce point, en appelant M le moment fléchissant variable avec x,

Fig. 169.



$$M = M_{k-1} + Ax - \frac{1}{2} p_{k-1} x^2.$$

A est l'effort tranchant en A dans la travée AB; faisant $x = l_{k-1}$, M devient égal à M_k, et par suite

$$M_k = M_{k-1} + A l_{k-1} - \frac{1}{2} p_{k-1} l^2_{k-1}.$$

Entre ces deux équations éliminons A, nous obtiendrons l'équation finale

$$M l_{k-1} - M_k x = M_{k-1}(l_{k-1} - x) + \frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1} x (l_{k-1} - x),$$

ou bien

$$M = \frac{M_{k-1}(l_{k-1} - x) + M_k x}{l_{k-1}} + \frac{1}{2} p_{k-1} x (l_{k-1} - x).$$

Le moment M en un point quelconque de AB se compose donc de deux parties; l'une,

$$\frac{1}{2} p_{k-1} x (l_{k-1} - x),$$

est la valeur qu'aurait le moment fléchissant au point défini par l'abscisse x, si la travée AB était coupée sur ses deux appuis ; cette portion est représentée par les ordonnées d'une parabole ACB, dont l'axe coïncide avec la droite élevée perpendiculairement au milieu de AB (fig. 169). L'autre partie,

$$\frac{M_{k-1}(l_{k-1}-x)+M_k x}{l_{k-1}},$$

est représentée par les ordonnées d'une droite, passant par le point

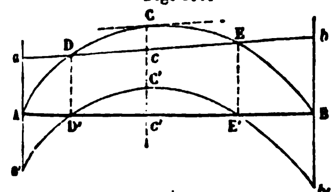
$$x=0,\quad M=M_{k-1},$$

et par le point

$$x=l_{k-1},\quad M=M_k;$$

en d'autres termes, par les ordonnées d'une droite ab (fig. 170) joignant les extrémités des longueurs Aa, Bb, proportionnelles aux moments fléchissants en A et en B; M_{k-1}, M_k sont des nombres négatifs, et l'addition des deux portions de la valeur de M revient à soustraire de la première partie la seconde partie prise positivement. Prenons donc sur les verticales Aa, Bb, passant par les appuis, des quantités Aa, Bb égales aux valeurs absolues de M_{k-1}, M_k, et joignons ab ; nous aurons le nouvel axe par rapport auquel il faut prendre les ordonnées de la parabole ACB pour avoir la valeur complète de M. Ainsi, au point A, M est égal à $-$Aa; M est nul en D', projection du point D où la droite ab coupe la parabole ; M est maximum au point c', projection du point C où la tangente à la parabole ACB est parallèle à ab ; il se retrouve nul en E', projection du point E ; enfin, en B il est égal à $-$Bb ; la courbe des moments a'D'C'E'b' s'obtient ainsi (§ 138) en prenant pour ordonnées la différence des ordonnées des deux contours ACB et ab. C'est la parabole ACB elle-même, déplacée de manière que son axe reste toujours vertical et qu'elle passe par les deux points donnés a' et b'.

Fig. 170.



On peut remarquer que, des deux lignes ACB, ab, qui concourent

à former la courbe définitive $a'C'b'$ des moments, l'une, ACB, est entièrement définie par la longueur l_{k-1} et le poids p_{k-1}, tandis que la position de la droite ab dépend des charges uniformément réparties dans toutes les travées, y compris la travée AB elle-même. Chaque travée doit être considérée successivement comme pleine et comme vide; on n'aura donc à admettre pour chacune que deux contours paraboliques, ACB, l'un correspondant au poids de la travée pleine, l'autre à son poids propre sans addition de surcharge; il y a au contraire autant de droites ab à considérer, qu'il y a d'hypothèses distinctes à faire sur la distribution des surcharges entre les diverses travées.

DÉTERMINATION DIRECTE DU MOMENT FLÉCHISSANT SUR UN APPUI QUELCONQUE.

169. Une méthode analogue à celle que nous avons indiquée pour déterminer M_2 ou M_n, conduit à la détermination directe d'un moment M_k quelconque. Avant de l'exposer, il est bon de former avec toutes les quantités qui entrent dans le problème, connues, inconnues et coefficients auxiliaires, un diagramme où chacune soit attribuée sans ambiguïté à une travée ou à un appui. C'est l'objet de la figure suivante :

Fig. 171.

Numéros des travées. .		1		2				$k-1$		k				$n-1$		n	
Numéros des appuis. .	1		2		3		$k-1$		k		$k+1$		$n-1$		n		$n+1$
Moments inconnus. . . .			M_2		M_3	.....	M_{k-1}		M_k		M_{k+1}	...	M_{n-1}		M_n		
Longueur des travées. . .		l_1		l_2				l_{k-1}		l_k				l_{n-1}		l_n	
Poids répartis par unité de longueur.		p_1		p_2				p_{k-1}		p_k				p_{n-1}		p_n	
Série (α).	α_{n-1}		α_{n-2}		α_{n-3}	.....	α_{n-k+1}		α_{n-k}		α_{n-k-1}	...	α_1		$\alpha_0=1$		0
Série (γ)	0		$\gamma_0=1$		γ_1	.....	γ_{k-3}		γ_{k-2}		γ_{k-1}	...	γ_{n-3}		γ_{n-2}		γ_{n-1}
Fonctions des charges.			P_2		P_3	.....	P_{k-1}		P_k		P_{k+1}	...	P_{n-1}		P_n		

On voit par ce tableau qu'à chaque appui, correspondent un coefficient (α) et un coefficient (γ), et que la somme des indices de ces deux coefficients est constante et égale à $n - 2$.

Revenons aux équations (M).

Le moment inconnu, M_k, se trouve dans la $(k-2)^{me}$ équation de ce groupe avec le coefficient l_{k-1}, dans la $(k-1)^{me}$ avec le coefficient $2(l_{k-1}+l_k)$, et dans la k^{me} avec le coefficient l_k. Multiplions la première des équations M par α_{n-k}, la seconde par $\alpha_{n-k}\gamma_1$, la troisième par $\alpha_{n-k}\gamma_2$ .... jusqu'à la $(k-1)^{me}$ que nous multiplierons par $\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}$; puis continuons, en multipliant la k^{me} par $\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}$; la $(k+1)^{me}$ par $\alpha_{n-k-2}\gamma_{k-2}$, et ainsi de suite jusqu'à la $(n-1)^{me}$ et dernière, qui sera multipliée par γ_{k-2}; faisons la somme des équations ainsi préparées, et tous les moments inconnus disparaîtront, sauf M_k; nous trouverons comme résultat final :

$$M_k = -\frac{\alpha_{n-k}(P_2+P_3\gamma_1+\ldots+P_{k-1}\gamma_{k-3})+P_k\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}+\gamma_{k-2}(P_{k+1}\alpha_{n-k-1}+\ldots+P_{n-1}\alpha_1+P_n)}{l_{k-1}\alpha_{n-k}\gamma_{k-3}+2(l_{k-1}+l_k)\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}+l_k\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}}.$$

Le dénominateur du second membre peut se simplifier, en observant que l'on a entre les trois coefficients consécutifs

$$\gamma_{k-1},\quad \gamma_{k-2},\quad \gamma_{k-3},$$

la relation

$$l_{k-1}\gamma_{k-3} + 2(l_{k-1}+l_k)\gamma_{k-2} + l_k\gamma_{k-1} = 0.$$

Multipliant par α_{n-k}, il vient

$$l_{k-1}\gamma_{k-3}\alpha_{n-k} + 2(l_{k-1}+l_k)\alpha_{n-k}\gamma_{k-2} + l_k\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} = 0,$$

et, par suite, le dénominateur M_k se transforme en

$$l_k(\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2} - \alpha_{n-k}\gamma_{k-1}),$$

ou, avec la suppression du signe — devant le second nombre,

$$l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}).$$

C'est le produit de la longueur l_k de la k^{me} travée, par la *différence*

des produits en croix des coefficients (α) et (γ) qui correspondent aux appuis sur lesquels porte cette travée. Le dénominateur de la valeur de M_k est ainsi relatif à l'une des deux travées qui aboutissent à l'appui auquel s'applique le moment M_k; le numérateur, au contraire, ne contient que des termes relatifs aux divers appuis. De cette simple remarque il est permis de conclure que le dénominateur pourrait aussi bien se représenter par le produit

$$l_{k-1}(\alpha_{n-k+1}\gamma_{k-2} - \alpha_{n-k}\gamma_{k-3}),$$

formé au moyen de la longueur l_{k-1} de la travée précédente et des coefficients (α) et (γ) pris dans cette travée, que par le produit

$$l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2})$$

auquel nous sommes parvenu; et de là résulte ce théorème : *Le produit de la longueur d'une travée par la différence des produits en croix des coefficients* (α) *et* (γ) *qui correspondent aux appuis comprenant cette travée, est constant dans toute l'étendue de la poutre.*

On démontre directement cette proposition en se reportant aux équations

$$l_{k-1}\gamma_{k-3} + 2(l_{k-1} + l_k)\gamma_{k-2} + l_k\gamma_{k-1} = 0,$$
$$l_{k-1}\alpha_{n-k+1} + 2(l_{k-1} + l_k)\alpha_{n-k} + l_k\alpha_{n-k-1} = 0.$$

qui établissent la relation entre γ_{k-3}, γ_{k-2}, γ_{k-1}, d'une part, et entre α_{n-k+1}, α_{n-k}, α_{n-k-1}, de l'autre.

Si l'on multiplie la première de ces équations par α_{n-k}, la seconde par γ_{k-2}, et qu'on retranche, il vient

$$l_{k-1}(\alpha_{n-k+1}\gamma_{k-2} - \alpha_{n-k}\gamma_{k-3}) = l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}).$$

Appelons L ce produit constant; pris dans la première travée, il est égal à $l_1 \alpha_{n-1}$; dans la dernière, à $l_n\gamma_{n-1}$. On a en définitive la formule générale

$$M_k = \frac{\alpha_{n-k}\sum_2^k P_i\gamma_{i-2} + \gamma_{k-2}\sum_{k+1}^n P_i\alpha_{n-i}}{L}.$$

Le dénominateur commun L a le signe α_{n-1}; il est positif si le nombre n des travées est impair, et négatif dans le cas contraire.

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES (α) ET (γ).

Propriétés générales.

170. Les nombres (α) et (γ) ont quelques propriétés intéressantes que nous allons indiquer. On vient de reconnaître que le produit de la longueur l d'une travée par le *déterminant*, $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma$, des coefficients $\begin{Bmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{Bmatrix}$ qui correspondent à ses appuis, est une quantité constante, quelle que soit la travée considérée. On peut aussi poser entre trois coefficients (α) consécutifs, et les trois coefficients (γ) relatifs aux mêmes appuis, une équation dans laquelle n'entre aucune longueur de travée ; il suffit pour cela d'éliminer le rapport $\frac{l_k}{l_{k-1}}$ entre les deux équations qui lient

$$\gamma_{k-3},\quad \gamma_{k-2},\quad \gamma_{k-1}$$

d'une part, et

$$\alpha_{n-k+1},\quad \alpha_{n-k},\quad \alpha_{n-k-1}$$

de l'autre.

Pour cela on donnera à ces équations la forme

$$l_{k-1}(\gamma_{k-3} + 2\gamma_{k-2}) = -l_k(2\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}),$$
$$l_{k-1}(\alpha_{n-k+1} + 2\alpha_{n-k}) = -l_k(2\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}),$$

et la division éliminera les longueurs de travées :

$$\frac{\gamma_{k-3} + 2\gamma_{k-2}}{2\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}} = \frac{\alpha_{n-k+1} + 2\alpha_{n-k}}{2\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}}.$$

171. Les nombres α_n, γ_n, sont positifs ou négatifs, suivant que n est

pair ou impair, et ils ont une valeur absolue d'autant plus grande que n est plus grand. Il résulte de là :

1° Que la somme ou la différence $\alpha_n \pm \alpha_{n-1}$, de deux termes consécutifs d'une même série (α) a toujours le signe de celui des deux termes qui a le plus grand indice, c'est-à-dire le signe de α_n, et que la valeur absolue de la somme, $\alpha_n + \alpha_{n-1}$, est moindre que celle de α_n, tandis que la valeur absolue de la différence, $\alpha_n - \alpha_{n-1}$, est plus grande ;

2° Que les produits $\alpha_n \alpha_k$, ou $\alpha_n \gamma_k$ de deux termes pris comme on voudra dans une des séries (α), (γ), ou dans les deux, sont positifs si les indices n et k sont tous deux pairs ou tous deux impairs, et négatifs si l'un des indices est pair et l'autre impair ; ce qui revient à dire que les produits $\alpha_n \alpha_k$, ou $\alpha_n \gamma_k$ sont positifs ou négatifs, suivant que la somme $n+k$ des indices est paire ou impaire, ou encore qu'ils ont toujours le signe de $(-1)^{n+k}$.

Il en est de même des quotients

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_k} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_n}{\gamma_k},$$

et plus généralement encore, le nombre

$$\frac{\alpha_n \gamma_k \ldots\ldots}{\alpha_{n'} \gamma_{k'} \ldots\ldots}$$

est positif ou négatif, suivant que la somme $n+k+n'+k'+\ldots$ des indices des facteurs du numérateur et du dénominateur est paire ou impaire.

Propriétés particulières quand les travées sont égales.

172. Supposons que toutes les travées soient égales et qu'elles soient en nombre indéfini. Les deux séries (α) et (γ) se réduiront à une seule et même série, savoir :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1,\\
\alpha_1 &= -4,\\
\alpha_2 &= 15,\\
\alpha_3 &= -56,\\
\alpha_4 &= 209,\\
\alpha_5 &= -780.\\
\vdots\ \ & \ \ \vdots
\end{aligned}$$

Chaque terme se forme du précédent en multipliant celui-ci par le nombre négatif — 4, et en retranchant du produit le terme antéprécédent ; en d'autres termes, la série (α) est une *série récurrente* dont *l'échelle de relation* est (— 4, — 1). Il est facile d'en déduire la forme générale du terme α_k.

On a généralement, quel que soit k,

$$\alpha_k = -4\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2},$$

et par suite

$$\alpha_k + 4\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} = 0.$$

Avec les nombres

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_k \ldots\ldots$$

formons le polynôme indéfini

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots\ldots \alpha_k x^k + \ldots\ldots,$$

et multiplions-le par le trinôme

$$1 + 4x + x^2.$$

Il viendra pour le produit

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
\alpha_0 + \alpha_1 & x + \alpha_2 & x^2 + \alpha_3 & x^3 + \ldots\ldots + \alpha_k & x^k + \ldots\ldots \\
+ 4\alpha_0 & + 4\alpha_1 & + 4\alpha_2 & + 4\alpha_{k-1} & \\
 & + \alpha_0 & + \alpha_1 & + \alpha_{k-2} &
\end{array}$$

Les coefficients des termes en $x^2, x^3, \ldots x^k$, étant tous nuls, le produit se réduit à ses deux premiers termes

$$\alpha_0 + (\alpha_1 + 4\alpha_0)x,$$

et après la substitution pour α_0 et α_1 de leurs valeurs numériques, 1 et — 4, on obtient pour résultat final l'unité.

La série

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots$$

s'obtient donc en divisant l'unité par le trinôme

$$1 + 4x + x^2.$$

Pour avoir le terme général de la série, décomposons en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{1 + 4x + x^2}.$$

Pour cela, égalons à zéro le trinôme; nous aurons pour ses racines

$$x = -2 \pm \sqrt{3},$$

et nous poserons

$$\frac{1}{1 + 4x + x^2} = \frac{M}{x+2-\sqrt{3}} + \frac{N}{x + 2 + \sqrt{3}},$$

M et N étant des nombres à déterminer.

On en déduit

$$1 = (M + N)x + M(2 + \sqrt{3}) + N(2 - \sqrt{3}).$$

Cette équation, devant avoir lieu pour toute valeur de x, donne

$$M + N = 0$$

et

$$(M - N)\sqrt{3} = 1.$$

Donc

$$M = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$N = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

et l'on a identiquement

$$\frac{1}{1+4x+x^2}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{(2-\sqrt{3})+x}-\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{(2+\sqrt{3})+x}.$$

Chacune des fractions simples se développe, par la division, en une progression géométrique, et par suite

$$\frac{1}{1+4x+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}\left(1-\frac{x}{2-\sqrt{3}}+\frac{x^2}{(2-\sqrt{3})^2}+\ldots\pm\frac{x^k}{(2-\sqrt{3})^k}+\ldots\right)$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}\left(1-\frac{x}{2+\sqrt{3}}+\frac{x^2}{(2+\sqrt{3})^2}+\ldots\pm\frac{x^k}{(2+\sqrt{3})^k}+\ldots\right)$$

Les termes des deux séries sont alternativement positifs et négatifs, et le signe du coefficient de x^k est donné par l'expression $(-1)^k$.

Le coefficient de x^k est donc égal à

$$(-1)^k\left(\frac{1}{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^{k+1}}-\frac{1}{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^{k+1}}\right),$$

ou bien à

$$(-1)^k\frac{(2+\sqrt{3})^{k+1}-(2-\sqrt{3})^{k+1}}{2\sqrt{3}},$$

et l'on a par conséquent d'une manière générale

$$\alpha_k=(-1)^k\frac{(2+\sqrt{3})^{k+1}-(2-\sqrt{3})^{k+1}}{2\sqrt{3}},$$

nombre qui est nécessairement rationnel et entier.

On obtiendrait des résultats analogues si les longueurs des travées successives, l_1, l_2, l_3....., au lieu d'être égales, formaient les termes d'une progression géométrique.

173. On démontre en arithmétique (1) que, si $x=p$, $y=q$, for-

(1) V. Legendre, *Théorie des nombres*, premiere partie, § VI. L'équation $x^2-Ay^2=1$ est toujours résoluble en nombres entiers, quand A est un entier non carré; cette proposition, connue de Fermat, a été démontrée pour la première fois par Lagrange (Mém. de Berlin, 1767).

ment la moindre solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $x^2 - Ay^2 = 1$, A étant un entier donné non carré (la solution $x = 1$, $y = 0$ étant écartée), on obtient toutes les autres solutions au moyen des formules générales

$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^k + (p - q\sqrt{A})^k}{2},$$
$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^k - (p - q\sqrt{A})^k}{2\sqrt{A}}.$$

Si l'on fait $A = 3$, la moindre solution en nombres entiers de l'équation $x^2 - 3y^2 = 1$ est $p = 2$, $q = 1$, et substituant ces valeurs dans l'expression précédente de y, il vient

$$y = \frac{(2 + \sqrt{3})^k - (2 - \sqrt{3})^k}{2\sqrt{3}}.$$

Comparons ce résultat à la valeur générale des termes de la série (α); nous voyons qu'on a en valeur absolue

$$y = \alpha_{k-1};$$

donc les valeurs successives de α sont respectivement égales aux valeurs successives de y, et par suite $1 + 3\alpha^2_{k-1}$ est toujours un carré.

Exemples :

$$\begin{aligned} 1 + 3 \times 1 &= 4 = 2^2, \\ 1 + 3 \times 4^2 &= 49 = 7^2, \\ 1 + 3 \times \overline{15}^2 &= 676 = \overline{26}^2, \\ 1 + 3 \times \overline{56}^2 &= 9409 = \overline{97}^2. \end{aligned}$$

174. Lorsque toutes les travées sont égales, si n est leur nombre, la série (α) se termine au terme α_{n-1}; et la série (γ) comprend les nombres α eux-mêmes, de telle sorte que

$$\gamma_{n-1} = \alpha_{n-1}, \quad \gamma_{n-2} = \alpha_{n-2}, \ldots$$

Donc le produit

$$l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2})$$

devient dans ce cas égal à

$$l_k(\alpha_{n-k}\alpha_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\alpha_{k-2}),$$

et, laissant de côté le facteur l_k qui est constant, on voit que, pour une valeur donnée de n, le produit

$$\alpha_{n-k}\alpha_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\alpha_{k-2}$$

est le même, quelle que soit la valeur de k.

En d'autres termes, si on écrit sur une ligne horizontale tant de termes successifs qu'on voudra de la série (α), puis au-dessous les mêmes termes dans l'ordre rétrograde, les déterminants des groupes de quatre termes voisins pris dans les deux lignes sont constants, quel que soit le groupe considéré. Exemple :

$$\begin{array}{cccccc} 1, & -4, & +15, & -56, & +209, & -780, \\ -780, & +209, & -56, & +15, & -4, & +1, \end{array}$$

$$1 \times 209 - (-4 \times -780) = (-4 \times -56) - 15 \times 209 = \overline{15}^2 - \overline{56}^2 = -2911.$$

On peut supposer que dans la série (α) l'unité soit précédée du terme 0 (1) ; si on prolongeait la série d'un terme, on trouverait donc + 2911 ; car le déterminant du groupe

$$\begin{array}{cc} -780 & (\alpha) \\ +1 & 0 \end{array}$$

doit être égal au déterminant constant des autres groupes de 4 termes ; or il se réduit au terme — (α). Donc (α) = 2911 ; ce qui est vérifié par le calcul direct.

On peut tirer de là une conclusion intéressante pour les termes α_k dans lesquels l'indice k est pair ; prenons les séries

$$\begin{array}{cccccccccc} 0, & 1, & -4, & +15, & \ldots\ldots & \alpha_{\frac{k}{2}-1}, & \alpha_{\frac{k}{2}}, & \ldots\ldots & \alpha_{k-1}, & \alpha_k, \\ \alpha_k, & \alpha_{k-1}, & \alpha_{k-2}, & \alpha_{k-3}, & \ldots\ldots & \alpha_{\frac{k}{2}}, & \alpha_{\frac{k}{2}-1}, & \ldots\ldots & 1, & 0. \end{array}$$

---

(1) L'équation générale $\alpha_k + 4\alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} = 0$ permet, en effet, de prolonger la série dans le sens rétrograde ; $\alpha_k = -4$, et $\alpha_{k-1} = 1$ font $\alpha_{k-2} = 0$.

Le déterminant du premier groupe est égal à $-\alpha_k$; et le déterminant du groupe central

$$\cdot\quad \begin{Bmatrix} \alpha_{\frac{k}{2}-1} & \alpha_{\frac{k}{2}} \\ \alpha_{\frac{k}{2}} & \alpha_{\frac{k}{2}-1} \end{Bmatrix}$$

est égal à

$$\alpha^2_{\frac{k}{2}-1} - \alpha^2_{\frac{k}{2}}.$$

Donc on a l'égalité

$$\alpha^2_{\frac{k}{2}} - \alpha^2_{\frac{k}{2}-1} = \alpha_k,$$

c'est-à-dire tout terme α_k d'indice pair (ou tout terme impair) est égal à la différence des carrés de deux termes consécutifs de la même série.

Nous avions déjà trouvé

$$2911 = \overline{56}^2 - \overline{15}^2;$$

on aurait de même

$$209 = \overline{15}^2 - \overline{4}^2,$$
$$15 = 4^2 - 1.$$

175. Nous terminerons par la remarque suivante.

On a en même temps les deux équations

$$\alpha_{n+1} = -4\alpha_n - \alpha_{n-1},$$

et

$$\alpha_{n+2} = -4\alpha_{n+1} - \alpha_n.$$

Multiplions la première par α_{n+1}, la seconde par α_n, et retranchons; il viendra

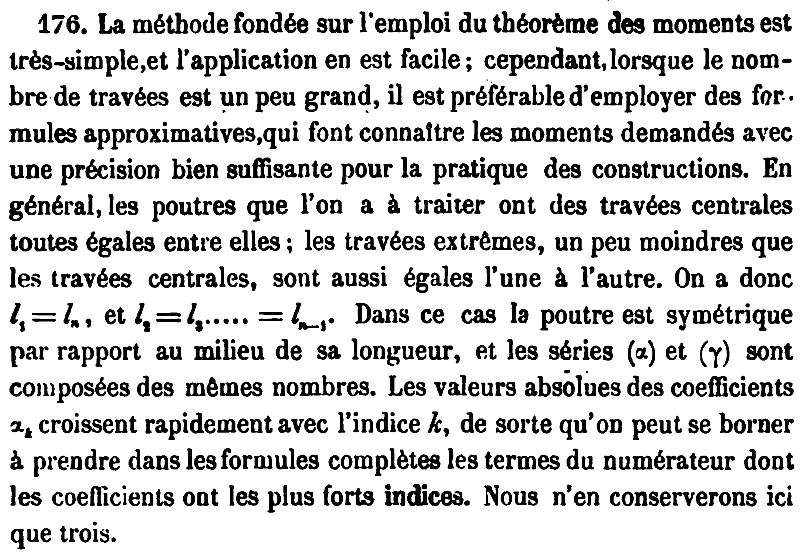
$$\alpha^2_{n+1} - \alpha_n\alpha_{n+2} = \alpha^2_n - \alpha_{n-1}\alpha_{n+1};$$

c'est-à-dire que l'excès du carré d'un terme de la suite (α) sur le produit du terme précédent et du terme suivant, est constant pour tous les termes; et, en faisant le calcul pour le terme $\alpha_1 = -4$, on voit que cet excès est partout égal à l'unité. On a en effet :

$$4^2 - 1 \times 15 = 16 - 15 = 1,$$
$$15^2 - 4 \times 56 = 226 - 224 = 1,$$
$$56^2 - 15 \times 209 = 3136 - 3135 = 1, \text{ etc.}$$

Un théorème analogue a lieu pour toutes les séries récurrentes dont l'échelle de relation est $(a, -1)$, quel que soit a.

FORMULES APPROXIMATIVES.



176. La méthode fondée sur l'emploi du théorème des moments est très-simple, et l'application en est facile; cependant, lorsque le nombre de travées est un peu grand, il est préférable d'employer des formules approximatives, qui font connaître les moments demandés avec une précision bien suffisante pour la pratique des constructions. En général, les poutres que l'on a à traiter ont des travées centrales toutes égales entre elles; les travées extrêmes, un peu moindres que les travées centrales, sont aussi égales l'une à l'autre. On a donc $l_1 = l_n$, et $l_2 = l_3 \ldots\ldots = l_{n-1}$. Dans ce cas la poutre est symétrique par rapport au milieu de sa longueur, et les séries (α) et (γ) sont composées des mêmes nombres. Les valeurs absolues des coefficients α_k croissent rapidement avec l'indice k, de sorte qu'on peut se borner à prendre dans les formules complètes les termes du numérateur dont les coefficients ont les plus forts indices. Nous n'en conserverons ici que trois.

Il y a alors trois cas à distinguer.

1° S'il s'agit de déterminer M_2, nous n'admettrons dans la formule que les termes en P_2, P_3 et P_4.

Reprenons les formules générales

$$\alpha_{n-3} = -2\alpha_{n-4}\left(1 + \frac{l_4}{l_3}\right) - \alpha_{n-5}\frac{l_4}{l_3},$$
$$\alpha_{n-2} = -2\alpha_{n-3}\left(1 + \frac{l_3}{l_2}\right) - \alpha_{n-4}\frac{l_3}{l_2},$$
$$\alpha_{n-1} = -2\alpha_{n-2}\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) - \alpha_{n-3}\frac{l_2}{l_1}.$$

Négligeons α_{n-5}, et remplaçons $\frac{l_4}{l_3}$, $\frac{l_3}{l_2}$ par l'unité, il viendra

$$\alpha_{n-3} = -4\alpha_{n-4},$$
$$\alpha_{n-2} = +15\alpha_{n-4},$$
$$\alpha_{n-1}l_1 = -30\alpha_{n-4}(l_1 + l_2) + 4\alpha_{n-4}l_2,$$

et, par suite, le facteur commun α_{n-4} disparaît aux deux termes de la fraction qui donne M_2 :

$$M_2 = -\frac{15P_2 - 4P_3 + P_4}{30l_1 + 26l_2}.$$

La même formule s'appliquerait à M_n :

$$M_n = -\frac{15P_n - 4P_{n-1} + P_{n-2}}{30l_n + 26l_{n-1}}.$$

Nous pouvons remplacer dans ces équations

$$P_2,\ P_3, \ldots P_n, \quad \text{par} \quad R_1 + R_2,\ R_2 + R_3, \ldots R_{n-1} + R_n,$$

en désignant d'une manière générale par R_k le produit

$$\frac{1}{4}p_k l_k^2.$$

Il vient après ces substitutions :

$$M_2 = -\frac{15(R_1 + R_2) - 4(R_2 + R_3) + (R_3 + R_4)}{30l_1 + 26l_2}$$

$$= -\frac{15R_1 + 11R_2 - 3R_3 + R_4}{30l_1 + 26l_2}.$$

$$M_n = -\frac{15(R_n + R_{n-1}) - 4(R_{n-1} + R_{n-2}) + (R_{n-2} + R_{n-3})}{30l_n + 26l_{n-1}}$$

$$= -\frac{15R_n + 11R_{n-1} - 3R_{n-2} + R_{n-3}}{30l_n + 26l_{n-1}}.$$

2° Proposons-nous de déterminer approximativement M_3, en ne conservant de même que les termes en P_2, P_3 et P_4. La formule réduite sera

$$M_3 = \frac{\alpha_{n-2}P_2 + \gamma_1(P_3\alpha_{n-3} + P_4\alpha_{n-4})}{l_2(\alpha_{n-2}\gamma_1 - \alpha_{n-3}\gamma_0)},$$

et l'on aura, comme tout à l'heure,

$$\alpha_{n-3} = -4\alpha_{n-4},$$
$$\alpha_{n-2} = 15\alpha_{n-4},$$

avec

$$\gamma_1 = -2\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right),$$

et

$$\gamma_0 = 1.$$

Donc

$$M_2 = -\frac{-4P_2 l_1 + 2(l_1 + l_2)(4P_3 - P_4)}{l_2(26 l_1 + 30 l_2)},$$

ou bien

$$M_2 = -\frac{-4(R_1 + R_2) l_1 + 2(l_1 + l_2)(4R_2 + 4R_3 - R_3 - R_4)}{l_2(26 l_1 + 30 l_2)}$$

$$= -\frac{4R_2(l_1 + 2l_2) + 6R_3(l_1 + l_2) - 4R_1 l_1 - 2R_4(l_1 + l_2)}{l_2(26 l_1 + 30 l_2)}.$$

3° Enfin, soit proposé de trouver une valeur approximative de M_k, en n'employant que P_{k-1}, P_k et P_{k+1}, k étant > 3 et $< n-1$. Dans l'étendue de la poutre qui correspond à ces trois valeurs de P, toutes les travées sont égales. On a, en effaçant tous les autres termes de la formule générale,

$$M_k = \frac{P_{k-1}\alpha_{n-k}\gamma_{k-3} + P_k \alpha_{n-k}\gamma_{k-2} + P_{k+1}\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}}{L}.$$

Mais

$$\alpha_{n-k} = -4\alpha_{n-k-1}$$

$$\gamma_{k-2} = -4\gamma_{k-3}, \qquad \gamma_{k-1} = 15\gamma_{k-3},$$

enfin

$$L = l(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}) = l\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-3}(-4 \times 15 + 4) = -56 l \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-3},$$

l étant la longueur d'une travée centrale quelconque.

Substituant ces valeurs approximatives, et supprimant le facteur commun $\alpha_{n-k-1} \times \gamma_{k-3}$, il vient

$$M_k = \frac{-4P_{k-1} + 16P_k - 4P_{k+1}}{-56 l} = -\frac{4P_k - (P_{k-1} + P_{k+1})}{14 l}.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$M_k = -\frac{4(R_{k-1} + R_k) - (R_{k-2} + R_{k-1} + R_k + R_{k+1})}{14 l}$$

$$= -\frac{3(R_{k-1} + R_k) - (R_{k-2} + R_{k+1})}{14 l}.$$

Ces formules très-simples feront connaître en général les valeurs des inconnues avec une exactitude suffisante.

CORRECTION D'UNE VALEUR FAUTIVE ATTRIBUÉE A M_2.

177. Si, au lieu de calculer M_2 par la formule exacte

$$M_2 = \frac{\Sigma P\alpha}{l_1 \alpha_{n-1}},$$

on détermine M_2 par une formule approximative, ou même, si l'on prend pour M_2 une valeur arbitraire M'_2, et qu'on s'en serve pour calculer les valeurs successives de M_3, M_4,..... M_n, au moyen des équations (M), il arrivera généralement que la dernière équation de ce groupe ne sera pas satisfaite, et que, pour la rendre identique, on devra ajouter à son premier membre un terme εl_n, dans lequel ε représenterait le moment d'encastrement de la poutre sur le $(n+1)^{me}$ appui, qui assurerait au moment fléchissant la valeur M'_2 sur la première pile.

Appelons M'_2, M'_3, M'_4,..... M'_n, les valeurs trouvées pour les moments fléchissants par cette méthode, et δ_2, δ_3,..... δ_n les corrections qu'il faut y ajouter pour obtenir les vraies valeurs; nous aurons à la fois les deux groupes suivants d'équations, savoir :

$$\left\{\begin{array}{r} 2M'_2(l_1+l_2)+M'_3l_2=-P_2 \\ M'_2l_2+2M'_3(l_2+l_3)+M'_4l_3=-P_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M'_{n-1}l_{n-1}+2M'_n(l_{n-1}+l_n)+\varepsilon l_n=-P_n \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2(M'_2+\delta_2)(l_1+l_2)+(M'_3+\delta_3)l_2=-P_2 \\ (M'_2+\delta_2)l_2+2(M'_3+\delta_3)(l_2+l_3)+(M'_4+\delta_4)l_3=-P_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (M'_{n-1}+\delta_{n-1})l_{n-1}+2(M'_n+\delta_n)(l_{n-1}+l_n)=-P_n. \end{array}\right.$$

On tire de là, en retranchant le premier groupe du second, un troisième groupe qui ne contient plus que les δ :

$$(\Delta)\begin{cases} 2\delta_2(l_1+l_2)+\delta_3 l_2=0 \\ \delta_2 l_2+2\delta_3(l_2+l_3)+\delta_4 l_3=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \delta_{n-1}l_{n-1}+2\delta_n(l_{n-1}+l_n)=\varepsilon l_n. \end{cases}$$

Ce groupe (Δ) n'est autre chose que le groupe (M) où l'on aurait remplacé les M par les δ de même indice, où l'on aurait mis 0 à la place de P_2, P_3.....P_{n-1}, et εl_n au lieu de $-P_n$. On aura donc, en appliquant la formule :

$$\delta_2=-\frac{\varepsilon l_n}{\alpha_{n-1}l_1}.$$

Cette correction est rigoureuse, quelque valeur qu'on ait prise pour M'_2, et l'on a toujours exactement

$$M_2=M'_2-\frac{\varepsilon l_n}{\alpha_{n-1}l_1}.$$

Une valeur arbitraire quelconque attribuée à M_2 conduit ainsi à la valeur exacte de cette inconnue. Connaissant M_2, les valeurs exactes de M_3, M_4,...., M_n se tireront des équations (M), ou se construiront géométriquement comme on l'a indiqué.

Si le nombre des travées est très-grand, α_{n-1} a une très-grande valeur absolue, et par suite une faible erreur δ_2, commise sur M_2, peut entraîner dans la suite du calcul un écart ε très-considérable ; mais cet écart, si grand qu'il soit, peut servir à trouver les véritables valeurs des inconnues.

On pourrait aussi calculer directement la correction δ_k à faire subir à M'_k ; en effet, dans la formule

$$M_k=\frac{\alpha_{n-k}\sum_2^k P_i\gamma_{i-2}+\gamma_{k-2}\sum_{k+1}^n P_i\alpha_{n-i}}{L},$$

il suffirait de remplacer P_2, P_3,..... P_{n-1} par zéro, et P_n par $-\varepsilon l_n$. On trouverait

$$\delta_k = \frac{-\gamma_{k-2}\varepsilon l_n}{L} = -\frac{\gamma_{k-2}\varepsilon l_n}{l_1 \alpha_{n-1}},$$

de sorte que la valeur exacte de M_k est donnée par la formule

$$M_k = M'_k - \frac{\gamma_{k-2}\varepsilon l_n}{l_1 \alpha_{n-1}}.$$

EFFORTS TRANCHANTS ET RÉACTIONS DES APPUIS.

178. Soit A_k l'effort tranchant qui s'exerce sur l'appui n° k dans la travée de même numéro ; l_k est la longueur de cette travée, p_k son poids par mètre courant ; pour déterminer A_k, nous ferons usage de la formule

$$M = M_k + A_k x - \frac{1}{2} p_k x^2,$$

qui devient, pour $x = l_k$,

$$M_{k+1} = M_k + A_k l_k - \frac{1}{2} p_k l_k^2.$$

Donc

$$A_k = \frac{1}{2} p_k l_k + \frac{M_{k+1} - M_k}{l_k}.$$

Si l'on voulait l'effort tranchant B_{k+1} sur l'appui n° $(k+1)$ dans la travée n° k, on l'obtiendrait facilement en faisant $x = l_k$ dans l'expression de la dérivée $\frac{dM}{dx}$ du moment fléchissant par rapport à l'abscisse ; on aurait ainsi

$$B_{k+1} = A_k - p_k l_k,$$

de sorte que la différence

$$A_k - B_{k+1}$$

est égale au poids $p_k l_k$ de la travée ; substituant la valeur de A_k, on trouve

$$B_{k+1} = -\frac{1}{2} p_k l_k + \frac{M_{k+1} - M_k}{l_k}.$$

Pour avoir la charge totale de l'appui n° k, on remarquera qu'elle est égale à $A_k - B_k$, de sorte qu'il faut, dans la seconde équation, changer k en $k-1$, puis retrancher l'équation ainsi transformée de l'équation qui donne A_k ; il viendra

$$F_k = A_k - B_k = \left(\frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1} + \frac{1}{2} p_k l_k\right) + \left[\frac{M_{k-1}}{l_{k-1}} - M_k \left(\frac{1}{l_{k-1}} + \frac{1}{l_k}\right) + \frac{M_{k+1}}{l_k}\right].$$

La première parenthèse est la charge que supporterait l'appui, si la poutre, au lieu d'être continue, était coupée sur les appuis ; la seconde renferme les moments fléchissants, et représente l'influence de la continuité des travées.

La réaction du premier appui, ou première culée, est donnée par la formule

$$A_1 = \frac{1}{2} p_1 l_1 + \frac{M_2}{l_1},$$

ou bien, en substituant la valeur générale de M_2,

$$A_1 = \frac{1}{2} p_1 l_1 + \frac{\Sigma P\alpha}{\alpha_{n-1} l_1^2}.$$

De même, la réaction du dernier appui, ou seconde culée, est égale à $-B_{n+1}$, ou à

$$\frac{1}{2} p_n l_n + \frac{M_n}{l_n} = \frac{1}{2} p_n l_n + \frac{\Sigma P\gamma}{\gamma_{n-1} l_n^2}.$$

La détermination de l'effort tranchant en un point donné résulte donc entièrement de la connaissance des moments fléchissants sur les appuis.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DES HYPOTHÈSES A FAIRE SUR LA DISTRIBUTION DES CHARGES.

---

179. Quand on étudie le projet d'une poutre métallique posée sur plus de deux appuis, chaque travée peut être successivement supposée vide ou surchargée; dans le premier cas, elle porte uniquement son poids propre; dans le second, au poids propre s'ajoute une surcharge que l'on suppose également répartie dans la longueur de la travée.

Il est facile de déterminer le nombre total des hypothèses que l'on peut faire sur la distribution des surcharges pour un nombre n de travées.

Si d'abord on suppose qu'une travée seulement reçoive la surcharge, on doit compter n hypothèses distinctes, chaque travée pouvant être successivement celle à laquelle la surcharge est attribuée. Si l'on suppose ensuite deux travées chargées, le nombre d'hypothèses correspondantes est égal au nombre de manières distinctes qu'il y a de prendre deux objets sur une collection de n objets, c'est-à-dire au nombre des combinaisons de n objets deux à deux, ou enfin à $\frac{n(n-1)}{2}$; de même, pour trois travées chargées, le nombre d'hypothèses est égal au nombre $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$ des combinaisons de n objets pris trois à trois, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on suppose les

n travées chargées, ce qui ne peut se faire que d'une seule manière. Le nombre total des hypothèses distinctes est donc égal à la somme

$$n+\frac{n(n-1)}{1\times2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}+\ldots+1,$$

ou à 2^n-1; l'unité qu'on retranche de 2^n correspond à l'hypothèse dans laquelle toutes les travées seraient vides, hypothèse écartée *à priori*.

180. Lorsque la poutre est symétrique par rapport au milieu de sa longueur totale, un certain nombre d'hypothèses se groupent deux à deux symétriquement, et l'une n'est que la reproduction de l'autre. Il y a alors une réduction du nombre des hypothèses réellement distinctes au point de vue du constructeur.

Voici comment on peut déterminer ce nombre réduit.

Soit $N=2^n-1$ le nombre total d'hypothèses à faire sur les n travées d'une poutre symétrique, lorsqu'on ne tient pas compte de la symétrie. Ces N hypothèses se partagent en deux classes. La première comprend N′ *hypothèses non symétriques*, et la seconde N″ *hypothèses symétriques*. Chaque hypothèse de la première classe a, en vertu de la symétrie de la poutre, une hypothèse symétrique distincte d'elle-même; par suite les N′ hypothèses de la première classe ne donnent que $\frac{1}{2}N'$ hypothèses réellement distinctes quand on tient compte de la symétrie. Au contraire, la seconde classe ne subit aucune réduction par suite de la symétrie de la poutre; car chaque hypothèse étant symétrique d'elle-même, ne se groupe avec aucune autre qui soit comptée séparément dans le nombre N″.

Si donc nous représentons par N_0 *le nombre des hypothèses distinctes lorsqu'on tient compte de la symétrie*, nous aurons à la fois:

$$N=N'+N'',$$

et

$$N_0=\frac{1}{2}N'+N'';$$

d'où l'on tire, en éliminant N′,

$$N_0=\frac{1}{2}(N+N'').$$

N est connu; il suffit donc de déterminer N''. Deux cas doivent être distingués ici, suivant que n est impair ou pair.

1° Si n est impair, la poutre a une travée centrale, de chaque côté de laquelle sont $\frac{n-1}{2}$ travées.

Soit μ le nombre de travées chargées. Pour que la distribution soit symétrique, il faudra, si μ est pair, qu'il y ait $\frac{\mu}{2}$ travées chargées de chaque côté de la travée centrale; le nombre d'*hypothèses symétriques* est donc égal, dans ce cas particulier, au nombre des combinaisons de $\frac{n-1}{2}$ objets pris $\frac{\mu}{2}$ à $\frac{\mu}{2}$. Si μ est impair, il faudra que la travée centrale soit chargée, et qu'en outre il y ait $\frac{\mu-1}{2}$ travées chargées dans chaque moitié de la poutre; le nombre d'hypothèses symétriques est donc alors égal au nombre des combinaisons de $\frac{n-1}{2}$ objets pris $\frac{\mu-1}{2}$ à $\frac{\mu-1}{2}$.

Ainsi, pour une valeur paire de μ, le nombre d'hypothèses symétriques est donné par la formule

$$C_{\frac{n-1}{2},\ \frac{\mu}{2}}=\frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-5}{2}\times\ldots\times\frac{n-\mu+1}{2}}{1\times2\times3\times\ldots\times\frac{\mu}{2}};$$

et pour une valeur impaire de μ, il est donné par la formule

$$C_{\frac{n-1}{2},\ \frac{\mu-1}{2}}=\frac{\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-5}{2}\times\ldots\times\frac{n-\mu+2}{2}}{1\times2\times3\times\ldots\times\frac{\mu-1}{2}}.$$

Pour obtenir le nombre total N″ d'hypothèses symétriques, on fera successivement $\mu = 2, 4, 6, \ldots n-1$ dans la première formule, et $\mu = 1, 3, 5, \ldots n$ dans la seconde, et l'on ajoutera les résultats. On remarquera que la seconde formule donnera, pour

$$\mu = 3, \quad 5, \quad 7, \ldots \quad n,$$

les mêmes résultats que la première pour

$$\mu = 2, \quad 4, \quad 6, \ldots, \quad n-1;$$

En définitive, on aura :

$$\begin{aligned} N'' &= 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{\frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2}}{1 \times 2} + \frac{\frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2}}{1 \times 2} + \ldots \\ &\ldots + \frac{\frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2} \times \ldots \times 1}{1 \times 2 \times \ldots \times \frac{n-1}{2}} + \frac{\frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2} \times \ldots \times 1}{1 \times 2 \times \ldots \times \frac{n-1}{2}} \\ &= 1 + \left(\frac{n-1}{2} + \frac{\frac{n-1}{2} \times \frac{n-3}{2}}{1 \times 2} + \ldots + 1 \right) \times 2 \\ &= 1 + \left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1 \right) \times 2 = 2^{\frac{n+1}{2}} - 1. \end{aligned}$$

Donc enfin

$$N_0 = \frac{1}{2}(N + N'') = 2^{n-1} + 2^{\frac{n-1}{2}} - 1.$$

2° Si n est pair, il n'y a pas de travée centrale, mais il y a $\frac{n}{2}$ travées symétriques par rapport à l'appui du milieu de la poutre. Dans ce cas, toute hypothèse comprenant un nombre impair de travées chargées est nécessairement non symétrique. On doit donc chercher les diverses parties dont la somme forme le nombre N″, en attribuant seulement à μ des valeurs paires. Le nombre d'hypothè-

ses symétriques pour une valeur particulière de μ est égal au nombre

$$C_{\frac{n}{2},\, \frac{\mu}{2}}$$

des combinaisons de $\frac{n}{2}$ objets $\frac{\mu}{2}$ à $\frac{\mu}{2}$, ou bien à l'expression

$$\frac{\frac{n}{2}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-4}{2}\times\ldots\times\frac{n-\mu+2}{2}}{1\times 2\times 3\times\ldots\times\frac{\mu}{2}}.$$

N″ s'obtiendra donc en faisant la somme des valeurs successives que prend cette expression quand on y fait

$$\mu=2,\quad \mu=4,\ldots,\quad \mu=n.$$

On trouve ainsi

$$N''=\frac{n}{2}+\frac{\frac{n}{2}\times\frac{n-2}{2}}{1\times 2}+\frac{\frac{n}{2}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-4}{2}}{1\times 2\times 3}+\ldots+1=2^{\frac{n}{2}}-1,$$

et par suite

$$N_s=\frac{1}{2}(N+N'')=2^{n-1}+2^{\frac{n-2}{2}}-1.$$

On peut donc former le tableau suivant :

NOMBRE de travées.	NOMBRE TOTAL d'hypothèses distinctes	
	Pour une poutre quelconque:	Pour une poutre symétrique.
n	N	N_s
2	3	2
3	7	5
4	15	9
5	31	19
[illegible]	63	39
7	127	71
8	255	135

Les deux formules qui donnent N_s peuvent se fondre en une seule, en observant que $\frac{n-1}{2}$, quand n est impair, et $\frac{n-2}{2}$, quand n est pair, sont les *valeurs entières les plus approchées par défaut* de la moitié de $n-1$; la notation connue, $E(x)$, désignant le plus grand entier contenu dans le nombre x, on pourra poser d'une manière générale :

$$N_s = 2^{n-1} + 2^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} - 1.$$

181. Les hypothèses distinctes à faire sur la distribution des surcharges sont encore, après la réduction due à la symétrie de la poutre, en très-grand nombre pour une valeur de n médiocrement grande. Mais il n'est pas nécessaire de les faire toutes pour déterminer les plus grands efforts auxquels la matière sera soumise dans les diverses sections de la pièce. On est amené ainsi à se poser cette question : *parmi les diverses hypothèses distinctes que l'on peut faire sur la distribution des surcharges entre les* n *travées d'une poutre, quelle est celle qui correspond à la plus grande valeur absolue du moment fléchissant dans telle section de telle travée?*

Nous chercherons la solution de cette question en commençant par en traiter un cas particulier important.

THÉORÈME SUR LE MAXIMUM DU MOMENT FLÉCHISSANT SUR UN APPUI DÉTERMINÉ.

182. Pour distinguer dans l'équation qui donne M_k les charges de chaque travée prise individuellement, nous poserons, comme nous l'avons déjà fait (§ 176), $R_k = \frac{1}{4} p_k l^2_k$, ce qui permettra de substituer aux expressions

$$P_2, \quad P_3, \quad P_4, \ldots \quad P_k, \ldots \quad P_n,$$

les sommes

$$R_1+R_2, \quad R_2+R_3, \quad R_3+R_4, \ldots \quad R_{k-1}+R_k, \ldots \quad R_{n-1}+R_n,$$

dans lesquelles les quantités R représentent des fonctions connues des charges des diverses travées. Il vient, en introduisant cette notation dans la formule qui fait connaître M_k,

$$M_k = \frac{\begin{array}{c}\alpha_{n-k}[R_1+R_2(1+\gamma_1)+R_3(\gamma_1+\gamma_2)+\ldots+R_{k-1}(\gamma_{k-3}+\gamma_{k-2})]+\\ +\gamma_{k-2}[R_k(\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1})+R_{k+1}(\alpha_{n-k-1}+\alpha_{n-k-2})+\ldots+R_n]\end{array}}{l_1\alpha_{n-1}}.$$

Or nous avons observé (§ 171, 1°) que les coefficients des R dans chaque grande parenthèse,

$$1, \quad 1+\gamma_1, \quad \gamma_1+\gamma_2, \ldots \quad \gamma_{k-3}+\gamma_{k-2}, \quad \alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1}, \ldots \quad \alpha_1+1, \quad 1,$$

ont respectivement les mêmes signes que les nombres

$$1, \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \ldots \quad \gamma_{k-2}, \quad \alpha_{n-k}, \ldots \quad \alpha_1, \quad 1,$$

et par suite les coefficients des R dans la valeur de M_k ont le signe des nombres

$$\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1}}, \quad \frac{\gamma_1\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1}}, \quad \frac{\gamma_2\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1}}, \ldots \quad \frac{\gamma_{k-2}\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-1}}, \quad \frac{\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}}{\alpha_{n-1}}, \ldots \quad \frac{\alpha_1\gamma_{k-2}}{\alpha_{n-1}}, \quad \frac{\gamma_{k-2}}{\alpha_{n-1}},$$

c'est-à-dire, le signe + ou le signe —, suivant que la somme des indices

$$2n-k-1, \quad 2n-k, \quad 2n-k+1, \ldots \quad 2n-3, \quad 2n-3, \ldots \quad n+k-2, \quad n+k-3,$$

est paire ou impaire.

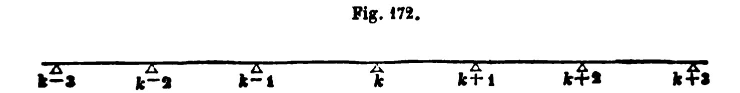
On voit sur-le-champ que R_{k-1} et R_k auront tous deux des coefficients négatifs ; que R_{k-2} et R_{k+1} auront des coefficients positifs, puis R_{k-3} et R_{k+2} des coefficients négatifs, et ainsi de suite alternativement

jusqu'aux deux bouts de la poutre. La série des signes des coefficients des R dans la formule qui donne M_k présente une suite de variations jusqu'au coefficient de R_{k-1}, qui est toujours négatif, une permanence de R_{k-1} à R_k; puis une suite de variations jusqu'au coefficient de R_n.

M_k est généralement négatif. Le maximum de sa valeur absolue correspond donc à l'hypothèse dans laquelle on suppose chargées les travées dont les poids sont pris négativement dans la formule, et vides les autres travées; en d'autres termes, le maximum de la valeur absolue de M_k correspond à l'hypothèse dans laquelle on charge les travées n° $(k-1)$ et n° (k) qui portent toutes deux sur l'appui considéré, puis toutes les travées de deux en deux à partir de celles-là, c'est-à-dire les travées n° $(k-3)$, n° $(k-5)$,... d'un côté de l'appui n° k, et n° $(k+2)$, n° $(k+4)$,...., de l'autre côté, les travées n° $(k-2)$, n° $(k-4)$,..... et n° $(k+1)$, n° $(k+3)$,..... ne recevant pas de surcharge.

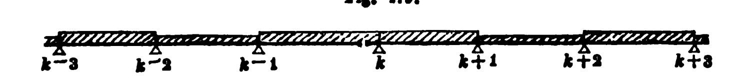
On voit du même coup que le minimum de M, en valeur absolue, correspond à l'hypothèse inverse. Soit, par exemple, le fragment suivant de la distribution des appuis sous une poutre continue indéfinie:

Fig. 172.



L'hypothèse qui donnera le maximum du moment fléchissant, en valeur absolue, sur l'appui n° (k), sera représentée par le diagramme:

Fig. 173.



et l'hypothèse correspondante au minimum par le diagramme :

Fig. 174.

Ces deux hypothèses sont complémentaires l'une de l'autre ; si l'on additionne les deux valeurs du moment fléchissant en un même point, qui correspondent à chacune de ces deux hypothèses, on obtient la valeur qu'aurait le moment fléchissant en ce point, si chaque travée recevait une surcharge égale à la somme de la surcharge admise et de son poids propre.

RECHERCHE DE L'INFLUENCE DE LA CHARGE D'UNE TRAVÉE SUR LE MOMENT FLÉCHISSANT EN UN POINT QUELCONQUE DE LA POUTRE.

183. On connaît par le théorème précédent les hypothèses qui conduisent aux *maxima* et aux *minima* des moments sur les appuis pris en valeur absolue. Il reste à étudier ce qui se passe dans une travée quelconque, définie par son numéro, k.

Nous reprendrons la formule

$$M = \frac{M_k(l_k - x) + M_{k-1}x}{l_k} + \frac{1}{2}p_k x(l_k - x),$$

au moyen de laquelle on peut tracer la parabole des moments dans la travée considérée ; mais pour en faire l'application, nous remarquerons qu'il suffit, en appliquant le principe de la superposition des effets des forces, de supposer successivement nulles les charges de toutes les travées moins une, et de faire la somme algébrique des moments partiels qui correspondent pour un même point donné à chacune de ces hypothèses. Ce procédé fera connaître l'influence de la charge de chaque travée sur la répartition des moments dans une travée déterminée.

Soit t le numéro de la travée qui demeure seule pesante, toutes les autres étant réduites par la pensée à avoir un poids nul. Trois cas sont à distinguer, suivant que t est inférieur, égal ou supérieur à k.

184. — 1er cas. $t < k$. — La travée dont on conserve le poids dans

les formules qui font connaître M_k et M_{k+1}, étant à gauche des appuis n° (k) et n° $(k+1)$ pour lesquels on demande les moments, le terme en R_t se trouvera dans la première grande parenthèse des valeurs générales de ces moments, et effaçant tous les autres R, on aura

$$M_k = \frac{\alpha_{n-k} R_t(\gamma_{t-2} + \gamma_{t-1})}{l_1 \alpha_{n-1}}$$

et

$$M_{k+1} = \frac{\alpha_{n-k-1} R_t(\gamma_{t-2} + \gamma_{t-1})}{l_1 \alpha_{n-1}}.$$

Substituons dans la formule qui donne M, et observons que p_k est supposé égal à zéro. Il vient pour le moment partiel correspondant à la travée n° t seule chargée :

$$M = \frac{R_t(\gamma_{t-2} + \gamma_{t-1})}{l_1 l_k \alpha_{n-1}} [\alpha_{n-k} l_k - (\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1})x].$$

Le moment partiel dû à la charge de la travée n° (t) est donc représenté par les ordonnées d'une droite, qui coupe l'axe des abscisses en un point C appartenant à la travée n° (k) ; en effet l'équation

$$\alpha_{n-k} l_k - (\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}) x = 0$$

donne

$$x = \frac{\alpha_{n-k} l_k}{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}},$$

résultat positif et moindre que l_k, puisque $\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}$ a le signe de α_{n-k} avec une valeur absolue plus grande, et de plus, résultat indépendant du numéro t de la travée dont on cherche l'influence ; toutes les droites qui représentent les moments partiels dus aux poids des travées situées à gauche de la travée n° (k) coupent donc l'axe des abscisses en ce même point C. Par suite, le moment partiel change de signe de part et d'autre de ce point. A gauche, il a le même signe que pour $x = 0$, c'est-à-dire le signe du produit

Fig. 175.

A C B
k k+1

$$\frac{\gamma_{t-2} + \gamma_{t-1}}{\alpha_{n-1}} \times \alpha_{n-k},$$

lequel est positif si la somme

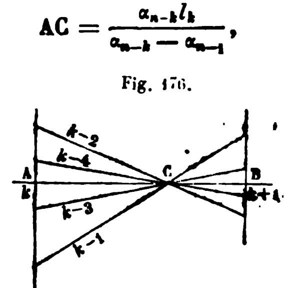
$$n-1+t-1+n-k=2n-2+t-k$$

est paire, et négatif si elle est impaire. Le moment partiel à gauche du point C est donc négatif si $k-t$ est impair, et positif dans le cas contraire. Les signes contraires ont lieu à droite du point C. Convenons d'appeler ***travées positives*** relativement à un tronçon quelconque, AC, de la travée AB. les travées dont les charges donnent des moments partiels positifs dans ce tronçon. Nous pourrons résumer dans un tableau très-simple les résultats de l'analyse du premier cas.

Influence des travées à gauche de l'appui n° (k).

$$AC = \frac{\alpha_{n-k} l_k}{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-1}},$$

Fig. 176.



TRONÇON *AC*		TRONÇON *CB*	
Travées positives.	Travées négatives.	Travées positives.	Travées négatives.
N° $k-2$ $k-4$ $k-6$ ⋮	N° $k-1$ $k-3$ $k-5$ ⋮	N° $k-1$ $k-3$ $k-5$ ⋮	N° $k-2$ $k-4$ $k-6$ ⋮

185. — 2° cas. $t > k$. — On devra conserver encore dans les formules qui donnent M_t et M_{t+1} le seul terme en R_t, et ce terme se trouvera dans la seconde grande parenthèse ; il viendra, par un calcul tout semblable à celui qui vient d'être développé,

$$M = \frac{R_t(\alpha_{n-t}+\alpha_{n-t-1})}{l_t l_k \alpha_{n-1}} [\gamma_{k-2} l_k + (\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})x].$$

L'équation du moment partiel représente encore une droite, qui coupe l'axe des abscisses en un point D défini par l'équation

$$\gamma_{k-2}l_k + (\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})\,x = 0,$$

ce qui donne

$$x = -\frac{\gamma_{k-2}l_k}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}}.$$

Le résultat est positif et moindre que l_k, de sorte que le point D appartient à la travée AB; on peut faire voir de plus qu'il est situé entre le point C et le point A, ce qui vient à démontrer l'inégalité

Fig 177.

A D C B

$$\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}} > -\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}}.$$

Supposons d'abord n impair; $\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}$ et $\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}$ ayant respectivement les signes de α_{n-k} et de γ_{k-1}, le produit

$$(\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}) \times (\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})$$

a le signe du produit $\alpha_{n-k}\gamma_{k-1}$, c'est-à-dire le signe $+$, puisque la somme $n-1$ des indices est paire. Donc on n'altère pas l'inégalité en en multipliant les deux membres par le produit des dénominateurs, ce qui donne

$$\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k}\gamma_{k-2} > -\alpha_{n-k}\gamma_{k-2} + \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2},$$

ou bien, en supprimant les terme $-\alpha_{n-k}\gamma_{k-2}$ commun aux deux membres :

$$\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} > \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2},$$

ou enfin

$$\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2} > 0,$$

inégalité évidente, car on a toujours

$$l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}) = l_1\alpha_{n-1},$$

nombre positif si n est impair.

Si n est pair, il faudrait renverser l'inégalité à vérifier en même temps qu'on chasse les dénominateurs, parce que leur produit serait négatif; mais α_{n-1} serait aussi négatif, et par suite la conclusion définitive serait la même.

La position du point D est, comme celle du point C, indépendante du numéro de la travée à laquelle on attribue la charge. On peut remarquer que la distance DC est égale à

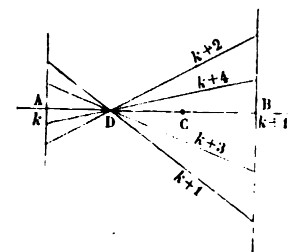
$$l_k \left(\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-k}-\alpha_{n-k-1}} + \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}\right) = \frac{l_k(\alpha_{n-k}\gamma_{k-1}-\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2})}{(\alpha_{n-k}-\alpha_{n-k-1})(\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2})}$$
$$= \frac{l_1\alpha_{n-1}}{(\alpha_{n-k}-\alpha_{n-k-1})(\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2})},$$

c'est-à-dire au quotient de la division du dénominateur commun des valeurs des moments sur les appuis, par les produits des différences des deux termes des séries (α) et (γ) qui correspondent aux deux appuis comprenant la travée ; le résultat est toujours positif.

Les travées à droite de l'appui n° $(k+1)$ seront négatives de deux en deux par rapport au tronçon BD, à partir de la travée n° $(k+1)$, et positives de deux en deux par rapport au même tronçon à partir de la travée n° $(k+2)$; et nous pouvons former comme il suit le tableau qui résume le second cas.

$$AD = -\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}} l_k.$$

Fig. 178.



TRONÇON *AD*.		TRONÇON *BD*.	
Travées positives.	Travées négatives.	Travées positives.	Travées négatives.
N° $(k+1)$	N° $(k+2)$	N° $(k+2)$	N° $(k+1)$
$(k+3)$	$(k+4)$	$(k+4)$	$(k+3)$
$(k+5)$	$(k+6)$	$(k+6)$	$(k+5)$
⋮	⋮	⋮	⋮

186. — 3e CAS. $t = k$. — Nous n'avons à conserver ici que le terme en R_k dans les valeurs générales de M_k et de M_{k+1} ; ce terme se trouvera dans la seconde grande parenthèse pour M_k, et dans la première pour M_{k-1}; enfin, nous pouvons remplacer R_k par sa valeur $\frac{1}{4} p_k l^2_k$; il viendra :

$$M_k = \frac{1}{4} p_k l_k^2 \frac{\gamma_{k-2}(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1})}{l_1 \alpha_{n-1}},$$
$$M_{k+1} = \frac{1}{4} p_k l^2_k \frac{\alpha_{n-k-1}(\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1})}{l_1 \alpha_{n-1}}.$$

Le moment partiel M se compose dans la travée n° k de deux parties : l'une est donnée par les ordonnées négatives de la droite

$$y = M_{k+1} \frac{x}{l_k} + M_k \frac{l_k - x}{l_k},$$

l'autre par les ordonnées positives de la parabole

$$z = \frac{1}{2} p_k x (l_k - x).$$

Pour $x = 0$, on a $x = 0$ et $y = M_k$, quantité négative. M est donc négatif au point A.

Faisons ensuite

$$x = AD = -\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} l_k,$$

il viendra

$$y = \frac{\frac{1}{4} p_k l^3_k}{l_1 \alpha_{n-1}} \times \left[\begin{array}{l} \alpha_{n-k-1}(\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}) \times \left(-\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}}\right) \\ + \gamma_{k-2}(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}) \times \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} \end{array} \right]$$
$$= \frac{\frac{1}{4} p_k l^2_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} \left[\frac{l_k \times (\alpha_{n-k}\gamma_{k-1} - \alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2})}{l_1 \alpha_{n-1}} \right]$$
$$= \frac{1}{4} p_k l_k^2 \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}}$$

et

$$z = \frac{1}{2} p_k l^2_k \frac{-\gamma_{k-2}\gamma_{k-1}}{(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})^2}.$$

Donc

$$M = z + y = \frac{1}{4} p_k l^2_k \times \frac{-\gamma_{k-2}(\gamma_{k-1} + \gamma_{k-2})}{(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})^2},$$

quantité toujours positive, car $\gamma_{k-1} + \gamma_{k-2}$ a le signe de γ_{k-1}, et le produit — $\gamma_{k-1}\gamma_{k-2}$ est toujours positif.

M passe donc du négatif au positif quand x passe de zéro à la valeur AD; on prouverait de même que M passe du positif au négatif quand x passe de la valeur AC à la valeur AB.

La parabole qui représente, dans la travée n° k, le moment partiel correspondant à la charge de la travée n° k elle-même, coupe par conséquent l'axe des abscisses en deux points E et F, l'un compris entre A et D, l'autre entre C et B.

Fig. 179.

La travée n° k est négative relativement aux tronçons extrêmes AE, FB, et positive relativement au tronçon central EF.

On trouvera les abscisses AF, AF, des points E et F en résolvant l'équation

$$M = z + y = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{2} p_k x (l_k - x) + \frac{1}{4} p_k l^3_k \frac{\alpha_{n-k-1}(\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1})}{l_1 \alpha_{n-1}} \frac{x}{l_k}$$
$$+ \frac{1}{2} p_k l^3_k \frac{\gamma_{k-2}(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1})}{l_1 \alpha_{n-1}} \frac{(l_k - x)}{l_k} = 0,$$

équation du second degré qui, d'après ce qu'on vient de démontrer, a ses deux racines réelles, positives et moindres que l_k.

L'influence de la travée n° k sur elle-même est donc représentée par leur parabole aEFb, qui coupe la droite AB en E et en F. M. de Alzola, dans un mémoire espagnol sur la théorie des poutres droites, a fait connaître les théorèmes suivants, qui lient entre eux les quatre points E, D, C, F.

Fig. 180.

Soit I le milieu de la portée, i le point correspondant de la para-

bole aEFb, d et c les points de la même parabole qui correspondent aux points D et C ; cela posé :

1° *Les points* d *et* c *sont situés respectivement sur deux paraboles* AdI, IcB, *égales entre elles et à la première, mais passant par le milieu de la portée et par l'un des appuis ;*

2° *Les trois points* a, D, i, *d'une part, et les trois points* b, C, i, *d'autre part sont en ligne droite.*

Connaissant les points C et D, il sera facile, d'après ces théorèmes, de tracer la parabole aEFb, et de trouver par conséquent les points E et F. (Voir les démonstrations dans le supplément au livre IV.)

187. Réunissons dans un même tableau l'indication des influences positives ou négatives des charges des travées sur les cinq tronçons AE, ED, DC, CF, FB, dans lesquels nous venons de partager la travée AB.

La *fig.* 181, qui fait suite à ce tableau, résume au contraire l'influence de la charge de la travée n° k sur cette même travée et les travées voisines.

INFLUENCE SUR LA TRAVÉE N° k.	TRONÇON AE.		TRONÇON ED.		TRONÇON DC.		TRONÇON CF.		TRONÇON FB.	
	Positive.	Négative.	Positive.	Négative.	Positive.	Négative.	Positive.	Négative.	Positive.	Négative.
Des travées à gauche de l'appui n° k (partage : AC, CB).	travées. n° $k-2$ $k-4$ $k-6$	travées. n° $k-1$ $k-3$ $k-5$	travées. n° $k-2$ $k-4$ $k-6$	travées. n° $k-1$ $k-3$ $k-5$	travées. n° $k-2$ $k-4$ $k-6$	travées. n° $k-1$ $k-3$ $k-5$	travées. n° $k-1$ $k-3$ $k-5$	travées. n° $k-2$ $k-4$ $k-6$	travées. n° $k-1$ $k-3$ $k-5$	travées. n° $k-2$ $k-4$ $k-6$ . . . .
De la travée n° k (partage : AE, EF, FB).	»	n° k	n° k	»	n° k	»	n° k	»	»	n° k
Des travées à droite de l'appui n° $(k+1)$ (partage : AD, DB).	n° $k+1$ $k+3$ $k+5$	n° $k+2$ $k+4$ $k+6$	n° $k+1$ $k+3$ $k+5$	n° $k+2$ $k+4$ $k+6$	n° $k+2$ $k+4$ $k+6$	n° $k+1$ $k+3$ $k+5$	n° $k+2$ $k+4$ $k+6$	n° $k+1$ $k+3$ $k+5$	n° $k+2$ $k+4$ $k+6$	n° $k+1$ $k+3$ $k+5$ . . . .

Pour résumer le tableau précédent, observons

que les travées $\left\{ \begin{array}{l} n^\circ\, k-1,\ k-3,\ k-5,\ldots \\ n^\circ\, k,\ k+2,\ k+4,\ k+6\ldots \end{array} \right\}$ sont toujours *négatives* relativement au tronçon AE voisin de l'extrémité A;

que les travées $\left\{ \begin{array}{l} n^\circ\, k-2,\ k-4,\ k-6,\ldots \\ n^\circ\, k \\ n^\circ\, k+2,\ k+4,\ k+6,\ldots \end{array} \right\}$ sont toujours *positives* relativement au tronçon central DC;

qu'enfin les travées $\left\{ \begin{array}{l} n^\circ\, k,\ k-2,\ k-4,\ldots \\ n^\circ\, k+1,\ k+3,\ k+5,\ldots \end{array} \right\}$ sont toujours *négatives* relativement au tronçon FB voisin de l'extrémité B.

Le tronçon ED suit une loi inverse du tronçon FB, et le tronçon CF une loi inverse du tronçon AE.

Les moments fléchissants totaux, négatifs près des appuis A et B, deviennent généralement positifs vers le centre de la travée, à moins qu'elle ne soit extrêmement courte par rapport aux autres, ce qui serait un vice de construction qu'on doit éviter dans la pratique. Pour tous les autres points de la portée, on ne connaît pas d'avance les signes des moments fléchissants. Dans ces conditions, on obtiendra leurs plus grandes valeurs absolues en attribuant successivement la surcharge aux travées négatives seules, puis aux travées positives seules; car le moment total M en un point donné étant la somme algébrique des moments partiels afférents à **toutes** les charges, sa plus grande valeur absolue, dans un quelconque des tronçons, correspond à l'hypothèse qui attribue la plus grande charge aux travées dont l'influence a le même signe que M, et la moindre charge aux travées qui ont une influence contraire.

188. Nous pouvons maintenant déterminer le nombre d'hypothèses à faire pour trouver les maxima des moments fléchissants en tout point de la poutre.

Considérons une travée centrale AB. Deux hypothèses, complémentaires l'une de l'autre, feront connaître les maxima dans le tronçon AE; ce sont les hypothèses qui correspondent au maximum et au minimum du moment sur l'appui A. Les mêmes hypothèses font connaître les maxima dans le tronçon CF.

Il y a de même deux hypothèses complémentaires, distinctes des premières, à admettre à la fois pour le tronçon FB et pour le tronçon ED.

Enfin deux hypothèses complémentaires, distinctes des précédentes, doivent être faites pour le tronçon central DC;

En tout six hypothèses par travée centrale.

Mais sur ces six hypothèses, les quatre premières sont communes à la travée considérée et à l'une ou à l'autre des deux travées voisines; *elles appartiennent en réalité aux appuis communs.* Les deux dernières s'appliquent à la fois à toutes les travées.

Soit donc n le nombre des travées, $n-1$ est le nombre des appuis communs à deux travées successives; le nombre total d'hypothèses utiles est donc égal à $2+2(n-1)=2n$.

Cette formule suppose $n>2$; car, pour $n=2$, il n'y a pas de travée centrale.

Si la poutre est symétrique, ce nombre $2n$ se réduit encore. En effet, si n est impair, les $2(n-1)$ hypothèses correspondantes au maximum et au minimum du moment sur les appuis sont toutes non symétriques : elles se réduisent donc à $n-1$ hypothèses distinctes, quand on tient compte de la symétrie; il faut y ajouter les deux hypothèses qui donnent à la fois le maximum et le minimum dans le tronçon central de chaque travée, et qui, étant chacune symétrique, ne comportent pas une semblable réduction; cela fait en tout $n-1+2=n+1$ hypothèses.

Si n est pair, parmi les $2(n-1)$ premières hypothèses, il y en a deux symétriques: ce sont celles qui sont relatives à l'appui du centre de la poutre; les autres sont non symétriques, et doivent se réduire à moitié; enfin les deux hypothèses communes à toutes les travées sont non symétriques, et l'une n'est que la répétition de l'autre. Le nombre réduit d'hypothèses est donc égal à

$$\frac{2(n-2)}{2}+2+\frac{2}{2},$$

ou à $n+1$, comme si n était impair.

Nous verrons plus loin qu'on peut encore réduire ce nombre en introduisant une hypothèse auxiliaire.

INDICATION D'UNE MÉTHODE APPROXIMATIVE PLUS RAPIDE.

189. Les hypothèses auxquelles nous avons été conduit par les recherches qui précèdent correspondent à des charges discontinues. Or, il est rare que dans la pratique il y ait discontinuité dans la distribution des surcharges. Aussi certains constructeurs se contentent-ils de faire les hypothèses suivantes : ils supposent d'abord une surcharge continue appliquée à toute l'étendue de la poutre, et cette supposition leur fait connaître les plus grandes valeurs admissibles pour les moments fléchissants sur les appuis; puis ils chargent successivement chaque travée à l'exclusion de toutes les autres, et ils prennent le résultat pour le maximum correspondant au moment fléchissant dans la travée. On applique au calcul de ces moments les formules approximatives.

MAXIMA ET MINIMA DES RÉACTIONS DES APPUIS.

190. Pour trouver le maximum de la réaction A_1 de la première culée, il faut se reporter à l'équation

$$A_1 = \frac{1}{2} p_1 l_1 + \frac{M_2}{l_1}.$$

Remplaçons M_2 par sa valeur

$$M_2 = \frac{P_2 a_{n-2} + P_3 a_{n-3} + \ldots + P_n}{l_1 a_{n-1}},$$

puis

$$P_2, \qquad P_3, \qquad P_4, \ldots \qquad P_n,$$

par les quantités

$$R_1 + R_2, \quad R_2 + R_3, \quad R_3 + R_4, \ldots \quad R_{n-1} + R_n.$$

L'équation devient, après ces substitutions,

$$A_1 = \frac{\frac{1}{2} p_1 l^2_1 + (R_1 + R_2)\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} + (R_2 + R_3)\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} + \ldots + \frac{(R_{n-1} + R_n)}{\alpha_{n-1}}}{l^2_1}.$$

Nous pouvons remplacer $\frac{1}{2} p_1 l_1^2$ par $2 R_1$, et il viendra, en multipliant par l_1^2,

$$A_1 l^2_1 = R_1\left(2 + \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}}\right) + R_2\left(\frac{\alpha_{n-2} + \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}\right) + R_3\left(\frac{\alpha_{n-3} + \alpha_{n-4}}{\alpha_{n-1}}\right) + \ldots + R_n \frac{1}{\alpha_{n-1}}.$$

Dans cette équation, on voit clairement que les coefficients de R_1, R_3, R_5, et ainsi de suite de deux en deux, sont positifs, tandis que les coefficients de R_2, R_4, R_6... sont négatifs.

La plus grande valeur de A_1 correspond donc à la surcharge des travées de rang impair, et la moindre valeur de A_1 à la surcharge des travées de rang pair. Ce sont les mêmes hypothèses qui correspondent aux maxima et aux minima des moments fléchissants dans le tronçon central des travées.

191. Cherchons de même le maximum de la réaction F_k de l'appui n° k.

Nous avons trouvé (§ 178) la formule

$$F_k = \left(\frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1} + \frac{1}{2} p_k l_k\right) + \left[\frac{M_{k-1}}{l_{k-1}} - M_k\left(\frac{1}{l_{k-1}} + \frac{1}{l_k}\right) + \frac{M_{k+1}}{l_k}\right].$$

Nous supposerons, comme nous l'avons déjà fait pour les moments, que toutes les travées soient réduites à un poids nul, sauf la travée dont le numéro est t; nous aurons plusieurs cas à examiner, suivant que

$$t < k - 1, \quad t = k - 1, \quad t = k, \quad t > k.$$

L'examen des deux premiers cas suffit.

1° Soit

$$t < k - 1.$$

Nous aurons, en appliquant les formules,

$$M_{k-1}=\frac{\alpha_{n-k+1}R_t(\gamma_{t-2}+\gamma_{t-1})}{l_1\alpha_{n-1}},$$

$$M_k=\frac{\alpha_{n-k}R_t(\gamma_{t-2}+\gamma_{t-1})}{l_1\alpha_{n-1}};$$

$$M_{k+1}=\frac{\alpha_{n-k-1}R_t(\gamma_{t-2}+\gamma_{t-1}}{l_1\alpha_{n-1}}.$$

On a d'ailleurs dans cette hypothèse

$$p_{k-1}=0,\quad p_k=0,$$

et la valeur partielle de F_k est

$$F_k=R_t\frac{\gamma_{t-2}+\gamma_{t-1}}{l_1\alpha_{n-1}}\left[\frac{\alpha_{n-k+1}}{l_{k-1}}-\alpha_{n-k}\left(\frac{1}{l_{k-1}}+\frac{1}{l_k}\right)+\frac{\alpha_{n-k-1}}{l_k}\right]$$
$$=R_t\frac{\gamma_{t-2}+\gamma_{t-1}}{l_1\alpha_{n-1}}\times\left[\frac{1}{l_{k-1}}(\alpha_{n-k+1}-\alpha_{n-k})-\frac{1}{l_k}(\alpha_{n-k}-\alpha_{n-k-1})\right].$$

La quantité entre parenthèses a le signe de α_{n-k+1}, ou le signe de $(-1)^{n-k+1}$; le coefficient en dehors de la parenthèse a le signe de

$$(-1)^{(t-1)+n-1}=(-1)^{n+t-2}=(-1)^{n+t};$$

Donc la valeur partielle de F_k a le signe de

$$(-1)^{n-k+1+n+t}=(-1)^{t+1-k}.$$

Si $k-t$ est pair, la valeur partielle de F_k est négative, et si $k-t$ est impair, elle est positive; ce qui veut dire que les charges des travées n° $(k-2)$, n° $(k-4)$... soulagent l'appui n° k, tandis que les charges des travées $k-3$, $k-5$, $k-7$,... augmentent la pression de la poutre sur cet appui.

On en peut conclure immédiatement que les charges des travées n° $k+1$, $k+3$, $k+5$,... soulagent l'appui n° k, tandis que les charges des travées n° $k+2$, $k+4$, $k+6$,... pèsent sur cet appui.

2° Reste à examiner le cas de $t=k-1$, ou de $t=k$. On pourrait le faire en employant les formules et en discutant les signes. Mais cette discussion, qui serait assez laborieuse, est inutile, car il

est bien certain que la charge des travées adjacentes à l'appui n° k pèse sur cet appui, et qu'on soulage l'appui, au contraire, en enlevant la charge de l'une ou de l'autre de ces travées.

Donc, en définitive, le maximum de F_k correspond à l'hypothèse dans laquelle les travées

$$n^\circ k, \qquad n^\circ k+2, \quad n^\circ k+4, \ldots$$

et

$$n^\circ k-1, \quad n^\circ k-3, \quad n^\circ k-5, \ldots$$

sont chargées, les autres travées restant vides; le minimum de F_k correspond à l'hypothèse inverse ou complémentaire.

On peut remarquer que le maximum et le minimum de F_k ont lieu dans les mêmes circonstances que le maximum et le minimum de M_k.

RÉDUCTION DÉFINITIVE DU NOMBRE D'HYPOTHÈSES A FAIRE SUR LA DISTRIBUTION DES SURCHARGES.

192. Nous avons reconnu que les hypothèses à faire sur la distribution des surcharges, pour déterminer les valeurs limites des moments fléchissants, sont deux à deux complémentaires, c'est-à-dire qu'à une hypothèse dans laquelle plusieurs travées sont chargées et les autres vides, correspond une hypothèse dans laquelle les premières travées restent vides, et les autres reçoivent la surcharge. Appelons p' le poids par unité de longueur de la travée vide, p'' le poids par unité de longueur de la surcharge. Dans l'une des deux hypothèses complémentaires, la travée sera supposée avoir le poids p', et dans l'autre le poids $p = p' + p''$. Si l'on ajoute les deux moments fléchissants obtenus pour un point quelconque dans chacune de ces deux hypothèses, on obtiendra le moment auquel conduirait le calcul pour une charge totale égale à $p + p'$, ou à $2p' + p''$, également répartie dans toute la longueur de la poutre.

Si donc on a calculé les moments fléchissants pour une hypothèse particulière, on pourra obtenir les moments correspondants à l'hypo-

thèse complémentaire, en retranchant les moments obtenus des moments correspondants à la charge $p+p'$, également répartie dans toute la longueur de la poutre.

Or, $2n$ est le nombre d'hypothèses utiles pour une poutre non symétrique de n travées; elles se groupent deux à deux en hypothèses complémentaires. On pourra, en appliquant la remarque précédente, calculer seulement les moments pour n hypothèses distinctes, et calculer ensuite les moments qui correspondent à l'hypothèse auxiliaire où la charge est partout égale à $p+p'$. Des soustractions donneront les moments pour les hypothèses complémentaires. Le nombre d'hypothèses distinctes est donc réduit à $n+1$.

Si la poutre est symétrique, le nombre d'hypothèses utiles est réduit à $n+1$. L'introduction de l'hypothèse auxiliaire $p+p'$ permet de réduire encore ce nombre; mais il y a lieu distinguer le cas de n impair, et le cas de n pair.

1° Si n est impair, le nombre $n+1$ est pair, et les $n+1$ hypothèses sont complémentaires l'une de l'autre. Elles peuvent donc se réduire à moitié, pourvu qu'on ajoute l'hypothèse auxiliaire $p+p'$; ce qui fait en tout $\frac{n+1}{2}+1$ ou $\frac{n+3}{2}$ hypothèses distinctes.

2° Si n est pair, le nombre $n+1$ est impair, et de ces $n+1$ hypothèses il y en a une qui est symétrique de son hypothèse complémentaire; celle-ci ne peut donc pas être supprimée, car elle l'est déjà par la réduction due à la symétrie, de sorte que l'on ne peut réduire à moitié que les n autres hypothèses; il en reste donc $\frac{n}{2}+1$ distinctes, plus l'hypothèse auxiliaire $p+p'$, ce qui fait en tout $\frac{n}{2}+2$ hypothèses, ou $\frac{n+4}{2}$.

Ces deux formules rentrent l'une dans l'autre en prenant pour le nombre cherché le plus grand entier contenu dans $\frac{n+4}{2}$, ou dans $2+\frac{n}{2}$.

En résumé, on trouve pour le nombre d'hypothèses à faire sur la distribution des surcharges les résultats suivants :

Poutres quelconques de n *travées.*

Nombre total d'hypothèses distinctes.	$2^n - 1$,
Nombre d'hypothèses utiles.	$2n$, $(n > 2)$,
Nombre réduit d'hypothèses utiles, en introduisant l'hypothèse auxiliaire $p + p'$. . . .	$n + 1$, $(n > 2)$.

Poutres symétriques de n *travées.*

Nombre total d'hypothèses distinctes.	$2^{n-1} + 2^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} - 1$,
Nombre d'hypothèses utiles.	$n + 1$, $(n > 2)$,
Nombre réduit d'hypothèses utiles en introduisant l'hypothèse auxiliaire $p + p'$. . . .	$2 + E\left(\frac{n}{2}\right)$, $(n > 2)$.

Par exemple, une poutre de 10 travées peut donner lieu à 1023 hypothèses distinctes, si elle est non symétrique, et à 527 si elle est symétrique. Ces nombreuses hypothèses peuvent être ramenées à 11 utiles dans le premier cas, et à 7 dans le second.

CONSTRUCTION DE L'ÉPURE DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET DES EFFORTS TRANCHANTS.

193. On représentera sur le dessin, à une échelle quelconque, les longueurs des travées successives dont se compose la poutre donnée. Si elle est symétrique, on pourra se borner à en représenter une moitié.

On prendra une échelle arbitraire pour représenter les moments fléchissants par des ordonnées verticales, et une troisième échelle pour représenter les efforts tranchants.

Après avoir déterminé les hypothèses utiles à la construction des contours-limites, on formera les quantités P_1, P_2,... P_n, dans chacune de ces hypothèses, d'après les poids connus des charges et les longueurs des travées.

On calculera les nombres des séries (α) et (γ), qui se réduisent à une seule et même série dans le cas où la poutre est symétrique.

On appliquera les formules à la recherche des moments sur les appuis M_2, M_3,... M_n; on pourra par exemple calculer M_2 et déduire les autres moments des équations (M); on peut aussi remplacer ce calcul par des constructions géométriques; enfin, on peut prendre arbitrairement M_2, et calculer le *moment d'erreur* ε, qui sert, comme nous l'avons montré, à corriger rigoureusement la valeur arbitraire attribuée à M_2.

Connaissant M_2, M_3,... M_n, on déduira des formules connues les valeurs des efforts tranchants aux extrémités de chaque travée, A_1, B_2, A_2, B_3,... A_n, B_{n+1}, puis les différences $A_2 - B_2$, $A_3 - B_3$,..., $A_n - B_n$; ces différences et les efforts A_1 et $-B_{n+1}$ seront les réactions des appuis.

Pour une hypothèse quelconque, la somme

$$A_1 + (A_2 - B_2) + (A_3 - B_3) + \dots + (A_n - B_n) - B_{n+1},$$

ou bien

$$A_1 + F_2 + F_3 + \dots\dots\dots + F_n - B_{n+1},$$

doit être égale à la somme des poids des travées; cette vérification ne porte pas sur le calcul des moments; car elle réussirait en employant des moments quelconques.

On aura alors tous les éléments de la construction de l'épure.

On tracera donc les paraboles des moments fléchissants et les droites des efforts tranchants dans chacune des hypothèses examinées. Puis on repliera toutes les paraboles d'un côté de l'axe des abscisses, et toutes les droites du côté opposé, pour n'avoir plus à considérer que les valeurs absolues des moments et des efforts tranchants.

L'épure étant ainsi tracée, on peut avoir à résoudre deux problèmes principaux.

194. 1er Problème. Si la poutre qu'il s'agit d'étudier a une section constante, il sera facile de déduire des résultats de l'épure la charge-

limite à laquelle la matière est soumise. En effet, on déterminera facilement sur le dessin la plus grande valeur absolue M du moment fléchissant ; la section étant donnée, on pourra calculer son moment d'inertie I, et la plus grande distance v des fibres à la fibre neutre ; la plus grande pression ou tension par unité de surface sera donnée par l'équation

$$\frac{RI}{v}=M, \quad \text{ou} \quad R=\frac{Mv}{I}.$$

De même on pourra déterminer, par la seule inspection du dessin, la plus grande valeur absolue A de l'effort tranchant, et divisant cette plus grande valeur par la section Ω, on aura la limite $\frac{A}{\Omega}$ de l'effort tranchant moyen par unité de surface. On pourrait aussi, en appliquant la théorie que nous avons fait connaître, déterminer la loi de répartition de cet effort tranchant entre les divers éléments de la section transversale.

On pourra donc déterminer avec précision si la poutre donnée a ou non la résistance nécessaire pour supporter avec sécurité les charges qui y sont appliquées.

La solution de ce premier problème est rigoureuse.

195. 2° Problème. Le second problème n'offre qu'une solution approximative. Il consiste à déterminer les formes de la section, supposée variable d'un point à l'autre, de manière que les efforts développés dans la matière soient à peu près égaux en tous les points de la poutre.

Ce problème est très-fréquent dans la pratique des travaux publics ; il s'agit, par exemple, de construire un pont métallique à poutres droites continues, franchissant une rivière sur un certain nombre d'appuis, et l'on cherche quel est le meilleur emploi du métal pour assurer économiquement la résistance de l'ouvrage.

Voici la méthode que l'on suit habituellement : elle est très-simple ; mais, comme nous le verrons tout à l'heure, elle est peu rigoureuse.

La hauteur H de la poutre, comptée entre les centres de gravité

de la bande inférieure et de la bande supérieure, peut être considérée comme une donnée de la question.

On réduit le moment d'inertie I de la section à celui des deux bandes A et B, qui s'exprime approximativement par le produit

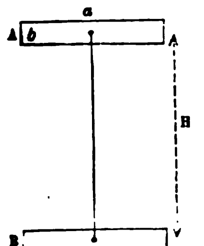


Fig. 182.

$$I = \frac{1}{2} ab \times H^2.$$

La largeur a des tables est prise arbitrairement; l'expression I est proportionnelle à b, seule quantité qu'on fasse varier d'une section à l'autre.

Le rapport $\frac{I}{v}$ est égal, par approximation, à abH.

On cherche à rendre constante la résistance R, laquelle est liée aux moments variables M par l'équation

$$R\frac{I}{v} = RabH = M.$$

On en déduit

$$b = \frac{M}{RaH}.$$

Donc b doit être proportionnel à M.

Les plus grandes valeurs absolues de M sont données par les ordonnées du contour-limite; il suffirait donc, pour résoudre la question, de donner à b des valeurs variables proportionnelles aux ordonnées de ce contour. On ne peut pas adopter dans la pratique cette loi de variation continue; car les tables A et B sont formées par la superposition de tôles d'égale épaisseur; la dimension b n'est donc susceptible de recevoir qu'un nombre limité de valeurs, multiples de l'épaisseur commune à toutes les feuilles de tôles admises dans la construction.

Mais on peut attribuer à b des valeurs plus grandes que celles que donne l'équation

$$b = \frac{M}{RaH},$$

car augmenter b revient à diminuer R, de sorte que l'excès d'épais-

seur admis pour la table en un point de la portée n'a d'autre effet que de réduire l'effort-limite développé dans le métal.

L'épure donne les valeurs du moment M; mais si l'on divise le moment M par le bras de levier H, on aura une force, $\frac{M}{H}$, qui pourra être représentée sur l'épure par la même ordonnée que M. Il suffit pour cela de prendre une échelle des forces dont l'unité corresponde à l'unité des moments divisée par la quantité donnée H. La force $\frac{M}{H}$ sera la pression ou la tension totale développée par la flexion dans les tables A et B.

De même, la résistance-limite R étant une quantité donnée, si l'on divise $\frac{M}{H}$ par R, on aura pour résultat la section correspondante à cette résistance; on pourra encore choisir une échelle des sections telle, que l'ordonnée M, prise sur l'épure, représente la section nécessaire; pour cela, il faut que l'unité de l'échelle des sections corresponde à l'unité de l'échelle des forces divisée par la quantité donnée R.

Enfin, si l'on divise la section $\frac{M}{HR}$ par la largeur *a*, qui est donnée, on aura pour quotient l'épaisseur *b*, et l'on peut encore s'arranger de telle sorte, que l'épaisseur *b* soit mesurée par l'ordonnée M, à l'échelle des épaisseurs. Ajoutons que l'échelle des moments étant arbitraire, on peut la choisir de manière que les épaisseurs *b* soient données sur l'épure en vraie grandeur.

Par exemple, supposons que, dans un projet particulier, H soit égal à 5 mètres, *a* à $1^{m},20$, et que la limite de résistance R soit fixée à 6 kilogrammes par millimètre carré, ce qui correspond à $R = 6\,000\,000$ de kilogrammes par mètre carré. Si l'on veut que les épaisseurs *b* soient données en vraie grandeur sur l'épure, on observera qu'une valeur d'un millimètre pour *b* correspond à une section de $1 \times 1\,200 = 1\,200$ millimètres carrés; que cette section, à raison de 6 kilogrammes par millimètre carré, correspond à une force totale de $1\,200 \times 6 = 7\,200$ kilogrammes,

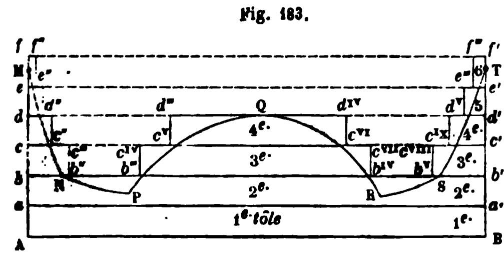
et que cette force, au bout d'un bras de levier de 5 mètres, correspond à $7\,200 \times 5 = 36\,000$ kilogrammètres.

Le problème sera résolu, par conséquent, en adoptant les échelles suivantes :

Échelle des moments fléchissants.	1 millimètre	pour	36 000 kilogr.
Échelle des forces totales développées dans les bandes.	1	— pour	7 200 kilogr.
Échelle des sections.	1	— pour	1 200 mill. qu.
Échelle des épaisseurs b.	1	— pour	1 millimètre.

L'épure de la distribution des tôles sera ensuite tracée comme il suit pour chaque travée. MNPQRST étant le contour-limite, on prendra, à l'échelle des épaisseurs, des quantités Aa, ab, bc,..... égales à l'épaisseur commune des feuilles de tôle, et l'on mènera par les points de division des parallèles à AB; ces droites aa', bb', cc',... représenteront les feuilles de tôle successives; on interrompra par des traits verticaux celles qui passeront au delà du contour-limite; de sorte que la ligne en escalier

Fig. 183.



$$ff'' e'' d'' c'' c''' b'' b''' c^{\text{IV}} c^{\text{V}} d''' d^{\text{IV}} c^{\text{VI}} c^{\text{VII}} b^{\text{IV}} b^{\text{V}} c^{\text{VIII}} c^{\text{IX}} d^{\text{V}} e''' f''' f',$$

qui laisse partout au-dessous d'elle le contour-limite MNPQRST, en le suivant cependant de près, donne la loi de la distribution des tôles dans les tables A et B de la section. Il y a deux tôles qui règnent dans toute l'étendue de la portée; il y en a quatre au milieu de la portée et six sur les appuis. L'aire de la ligne en escalier fait connaître le métré de la poutre réduite à ses bandes.

L'épure des efforts tranchants donne lieu à des questions toutes semblables; seulement il faudra faire entrer dans le calcul l'âme au lieu des bandes de la poutre. Cela revient à admettre entre les par-

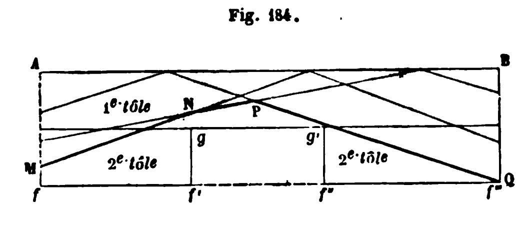
ties de la poutre une sorte de division du travail. On suppose que les moments fléchissants sont équilibrés par les tables seules, et les efforts tranchants par la paroi qui les unit (§111). L'inconnue à déterminer est l'épaisseur de la paroi. On commencera par déduire de l'échelle des efforts tranchants l'échelle des sections de l'âme, en divisant l'effort par la résistance-limite R'; puis on divisera la section par la hauteur de l'âme, et le quotient sera l'épaisseur; on en déduira une échelle des épaisseurs, et l'on pourra s'arranger pour qu'elles soient représentées en vraie grandeur sur l'épure.

Si, par exemple, la hauteur de l'âme est de $4^m,95$ et la limite de résistance à l'effort tranchant de 5 kilogrammes par millimètre carré, l'épaisseur d'un millimètre correspondra à une section de 4 950 millimètres carrés, et à un effort tranchant de $4\,950 \times 5 = 24\,750$ kilogrammes. On prendra donc les échelles suivantes :

Échelle des efforts tranchants. .	1 millimètre	pour	24 750 kilogr.,
Échelle des sections de l'âme . .	1	— pour	4 950 milligr.,
Échelle des épaisseurs.	1	— pour	1 millim.

L'épure présenterait la disposition suivante :

Fig. 184.



MNPQ, contour-limite des efforts tranchants; $ff'gg'f''f'''$, contour représentatif de la distribution des efforts de l'âme; la résistance moyenne à l'effort tranchant sera partout inférieure à R', puisque l'épaisseur excède partout la limite indiquée par le premier contour.

196. Voilà la méthode. Voici maintenant quelle objection on peut y faire.

Les équations fondamentales sur lesquelles repose le calcul des poutres continues sont établies dans la supposition que la poutre a une section uniforme d'un bout à l'autre de sa longueur. Lorsqu'on a construit l'épure des moments fléchissants et des efforts tranchants,

et qu'on s'en sert pour faire varier les dimensions de la section de la poutre, de manière à serrer de près les contours-limites, la poutre construite d'après les indications de l'épure n'est pas dans les conditions de la poutre idéale soumise aux calculs; la flexion qu'elle prend suit d'autres lois, et par suite les efforts se distribuent dans la poutre réelle d'une autre manière que celle qui a été prévue.

La méthode que nous venons d'exposer peut être considérée comme le premier pas d'une règle de fausse position. Pour la rendre rigoureuse, il faudrait chercher quelle est la distribution d'efforts correspondante à la forme attribuée à la poutre, puis corriger cette forme pour ramener les efforts aux limites assignées, et recommencer un certain nombre de fois les mêmes opérations, jusqu'à ce que les corrections fussent insignifiantes. Mais, dans ces nouveaux calculs, on aurait à traiter le problème d'une poutre de forme variable, ce qui complique singulièrement les équations (1). Aussi on ne cherche pas à rectifier cette erreur, et l'on se contente de la grossière approximation fournie par la méthode que nous venons d'exposer. La faiblesse des limites R et R′ permet de se contenter de cet à peu près; l'expérience a d'ailleurs montré qu'il n'y a aucun danger à suivre cette marche expéditive.

OBSERVATIONS SUR LES POUTRES DROITES CONTINUES.

PARTAGE DU DÉBOUCHÉ TOTAL EN TRAVÉES.

197. En général, on donne une même longueur aux portées centrales d'une poutre continue; les travées de rive reçoivent une longueur un peu moindre; le rapport de $\frac{4}{5}$, pour les portées des tra-

(1) On peut consulter sur ce sujet un mémoire de M. Albaret, intitulé : *Étude des ponts métalliques à poutres droites reposant sur plus de deux appuis* (Annales des ponts et chaussées, t. XII, 1866. — Depuis, divers auteurs ont étudié le même sujet; nous ren-

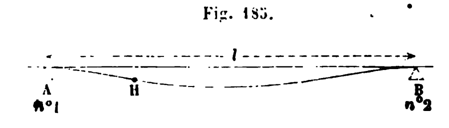
vées de rive comparées aux portées centrales, est très-convenable pour l'œil. Ce rapport est voisin du nombre

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}=0{,}7887\ldots,$$

qui donne l'abscisse de l'un des points d'inflexion d'une poutre encastrée à ses deux extrémités (§ 91). Étant donnée une suite de portées égales, toutes encastrées sur leurs appuis, et toutes également chargées, on en ferait en effet une poutre continue à extrémités libres, en coupant la première et la dernière travée en leurs points d'inflexion extrêmes; les moments fléchissants sont nuls en ces points d'inflexion, et de plus, les culées qu'on y placerait exerceraient de haut en bas un effort égal à l'effort tranchant.

Pour retrouver rigoureusement sur les appuis intermédiaires, les moments fléchissants d'une suite de poutres encastrées, il faut remarquer, comme l'a fait observer M. de Mondésir (1), que les culées doivent être tenues à un niveau inférieur à celui des piles, d'une quantité égale à $\frac{pl^4}{864EI}$; cette quantité représente l'ordonnée du point d'inflexion H de la poutre AB, encastrée à ses deux extrémités A et B, et chargée d'un poids uniformément réparti par unité de longueur.

Fig. 185.



[illegible]s compte, dans le supplément au présent livre, des résultats obtenus dans cette voie par M. Renoust des Orgeries. M. Bresse a donné, en 1871, une formule élégante, qui peut être considérée comme l'extension du théorème des trois moments aux poutres à section variable. M. Kleitz a publié en 1875 un mémoire sur la même question. Il a reconnu que l'hypothèse de l'uniformité conduit à des valeurs trop fortes pour les moments fléchissants au centre des portées, et à des valeurs trop faibles sur les ap
Mais les exemples qu'il a examinés lui ont montré que l'erreur ne dépassait pas 9 p. 100 sur les appuis, et 14 p. 100 au milieu des portées. La distribution de la matière, dans l'hypothèse de l'uniformité, entraine donc un léger excès de poids au milieu et, au contraire, sur les appuis, un léger excès de tension, qui grossit au plus d'un dixième la limite de résistance; de 6 kilogrammes par millimètre carré, elle passerait à 6k.6, ce qui n'a rien d'excessif.

(1) *Ponts métalliques à poutres droites*, pages 62 et suivantes.

On trouvera dans l'ouvrage de M. de Mondésir des formules établies pour les poutres ainsi tracées, qu'il a appelées *poutres équilibrées*.

Cet exemple fait sentir l'influence des différences de niveau sur la distribution des moments (1). La discussion de cette influence est donnée avec beaucoup de détails par M. Bresse, dans le 3e volume de son *Cours de mécanique appliquée.*

On trouve aussi dans le même ouvrage la discussion de l'influence du rapport des travées extrêmes aux travées centrales, et l'appréciation de l'influence de la déformation des appuis.

Les épures de moments fléchissants dressées par M. Bresse, et réunies par lui dans un atlas joint au 3e volume de son Cours, présentent en réalité deux contours-limites, formés chacun d'arcs de parabole. Le contour inférieur correspond à l'effet de la *charge propre* considérée seule; le contour supérieur correspond à l'effet de la *surcharge.* L'effet total est représenté en chaque point par la somme des ordonnées des deux contours de l'épure. Ce qui rend le travail de M. Bresse fort utile aux ingénieurs, c'est qu'il l'a fait suivre d'un formulaire analytique très-développé, qui conduit immédiatement au tracé des contours-limites pour des surcharges données, et pour des valeurs déterminées du rapport $\delta = \frac{l_2}{l_1}$ des portées centrales aux portées de rive.

---

(1) On peut admettre, comme règle générale, que l'abaissement de l'un des appuis d'une poutre continue tend à diminuer en valeur absolue le moment fléchissant sur cet appui, en même temps que la charge qu'il supporte; une surélévation produit des effets inverses. Du reste, l'abaissement et la surélévation admissibles pour un appui en particulier sont essentiellement limités; car si l'on descend l'appui B au-dessous d'un certain niveau, la poutre cessera de porter sur cet appui, et les deux travées qui s'y rejoignaient se réuniront pour former une travée unique AC (fig. 186). Si au contraire on élève successivement l'appui B, il arrivera un moment où la poutre abandonnera l'un des deux appuis voisins, l'appui C, par exemple, pour franchir l'intervalle total BD d'une seule portée (fig. 187). Ces conclusions seraient différentes si la poutre était liée aux appuis, de telle sorte qu'ils pussent développer des réactions négatives.

Fig. 186.

Fig. 187.

M. de Mondésir, appliquant ses formules à un pont métallique construit sur l'Allier, pour le passage du chemin de fer de Moulins à Montluçon, a mis en évidence les inconvénients que peut entraîner un trop faible rapport des travées de rive aux travées centrales. Le pont de l'Allier a neuf travées symétriques; les travées centrales ont 40 mètres, et les travées de rive ont seulement 18^m,25. Le calcul démontre que, dans l'hypothèse où l'on charge les travées n° 2, n° 4, n° 6 et n° 8, à l'exclusion des autres, la réaction de la première culée a une valeur négative; ce qui indique que l'extrémité de la poutre, au lieu de poser sur l'appui, tendrait à se soulever, et aurait besoin, pour réaliser l'équilibre prévu, d'être liée invariablement à la culée.

Dans une seconde édition du même ouvrage (1873, Gauthier-Villars), M. de Mondésir a donné des tableaux très-commodes des résultats obtenus; il y a résumé le calcul des poutres équilibrées et des poutres à travées égales jusqu'à 12 travées.

Le rapport $\frac{l_1}{l_2} = \frac{4}{5}$, ou $\frac{l_2}{l_1} = 1.25$ paraît satisfaisant à tous les égards. D'autres recommandent le rapport $\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.2247$.

COMPARAISON DE DEUX POUTRES DE MÊME LONGUEUR TOTALE ET PARTAGÉES DE LA MÊME MANIÈRE EN TRAVÉES, MAIS L'UNE CONTINUE, L'AUTRE COUPÉE SUR TOUS LES APPUIS.

198. Si l'on compare deux poutres, l'une continue, l'autre coupée sur les appuis, franchissant les mêmes portées avec les mêmes surcharges, on reconnaît en général que la poutre continue, à égalité d'efforts dans le métal, a un poids moindre que la poutre à travées indépendantes, mais que les pressions exercées sur les *appuis intermédiaires*, ou sur les piles, sont moindres pour la poutre à travées indépendantes que pour la poutre continue.

199. *Demi-continuité.* — Une poutre peut-être continue par rapport aux surcharges, et non continue par rapport à son poids propre. Cela a lieu pour un pont métallique de plusieurs ouvertures, dont les

travées, posées séparément sur les culées et les piles, ont été réunies ensuite par des panneaux rapportés, qui ne subissent d'efforts que sous l'action des surcharges.

Pour calculer les efforts développés par la surcharge, il faudrait donc supposer nul le poids propre, puis additionner algébriquement dans chaque section les efforts dus aux poids propres, lorsque les travées sont supposées coupées, aux efforts dus aux surcharges seules, lorsque les travées sont supposées continues. Les épures de M. Bresse, où l'on isole l'effet du poids propre et l'effet de la surcharge, se prêtent très-bien à ce mode de calcul dans le cas de la demi-continuité.

OBSERVATIONS DIVERSES.

200. Les efforts développés dans certaines régions des travées des poutres continues s'exercent, tantôt dans un sens, tantôt en sens contraire, et cette inversion d'efforts n'est pas favorable à la résistance du métal. Cela n'a pas lieu dans les poutres coupées sur les appuis.

201. Par ces divers motifs, il y a des constructeurs qui préfèrent les travées discontinues aux poutres continues sur plusieurs appuis. Ils partagent alors en parties égales l'ouverture totale à franchir. Ils ont, il est vrai, un peu plus de matière dans les fermes, mais, par contre, ils produisent des efforts un peu moindres sur les piles, et ils sont sûrs qu'il n'y a pas de renversement dans le travail des différentes parties de la construction. Enfin les ponts à travées indépendantes subissent sans inconvénient les petits tassements auxquels les culées et les piles sont exposées.

Cette solution est appliquée principalement aux ponts qu'un intérêt militaire peut amener à couper un jour. Il importe en effet alors que les travées soient indépendantes, pour que la destruction de l'une n'entraîne pas la chute des travées voisines.

202. On trouve des exemples de ponts métalliques de plusieurs travées coupés sur certains appuis sans l'être sur tous. Parmi les plus re-

marquables nous citerons le pont de Dirschau, sur la Vistule (1), comprenant six travées de 132^m,31, coupées sur les appuis de numéro impair ; le pont de Varsovie, sur le même fleuve, comprenant six travées de 80 mètres de portée, coupées sur les appuis de deux en deux (2); et le pont Victoria (3), sur le Saint-Laurent, à Montréal, composé de vingt-cinq travées, dont la travée centrale, longue de 100^m,58, est indépendante, et les vingt-quatre autres, longues chacune de 70^m,07, sont coupées sur les appuis de deux en deux, et forment douze poutres continues de deux travées, réparties symétriquement de chaque côté de la travée centrale. Cette solution mixte paraît peu recommandable, en ce qu'elle réunit les inconvénients des travées continues et des travées discontinues sans avantage spécial ; elle conduit à une grande inégalité dans les efforts sur les piles ; elle n'économise pas beaucoup de métal dans la construction des travées; enfin elle donne lieu à des renversements d'efforts dans certaines régions des poutres, quand la surcharge se déplace.

---

(1) Chemin de fer de l'Est prussien.
(2) Ce pont n'est pas destiné jusqu'ici à porter un chemin de fer.
(3) Grand trunk Canada railway.

SUPPLÉMENT AU LIVRE IV.

---

203. M. de Alzola, ingénieur espagnol, a publié en 1869, à Madrid, un mémoire sur la **théorie des poutres droites** (1). Nous extrayons ce qui suit de cet important travail.

I. ***Méthode directe de calcul des réactions des appuis quand les travées sont toutes égales.***

Considérons un appui intérmédiaire, portant le n° k. Nous aurons pour la réaction totale, F_k, de cet appui (§ 178),

$$F_k = \frac{1}{2} p_{k-1} l_{k-1} + \frac{1}{2} p_k l_k + \left[\frac{M_{k-1}}{l_{k-1}} - M_k \left(\frac{1}{l_{k-1}} + \frac{1}{l_k} \right) + \frac{M_{k-1}}{l_k} \right].$$

Supposons égales les deux travées k et $k-1$, en sorte qu'on ait $l_{k-1} = l_k$. Il viendra, en appelant l la longueur commune aux deux travées,

$$F_k = \frac{1}{2} (p_{k-1} + p_k) l + \frac{1}{l} (M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}).$$

Le théorème des trois moments, appliqué aux trois appuis $k-1$, k, $k+1$, donne d'autre part, en divisant par l,

$$M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1} = -\frac{1}{2} (p_{k-1} + p_k) l^2.$$

Cette équation permet d'éliminer la somme $M_{k-1} + M_{k+1}$, et de ramener F_k à la forme

$$F_k = \frac{1}{2} (p_{k-1} + p_k) l - \left[\frac{1}{4} (p_{k-1} + p_k) l + \frac{6M_k}{l} \right].$$

ou

$$(1) \qquad F_k = \frac{1}{4} (p_{k-1} + p_k) l - \frac{6M_k}{l}.$$

Cette équation ne s'applique qu'au cas où les deux travées $k-1$ et k sont égales; elle suppose de plus que k est au moins égal à 2, et au plus égal au nombre n des travées de la poutre.

De l'équation (1) M. de Alzola tire une relation linéaire entre les réactions sur trois appuis consécutifs, dans le cas particulier où les deux travées intermédiaires, et les deux travées contiguës à ces deux-là, ont la même longueur.

Soient $k-2$, $k-1$, k, $k+1$, les numéros des quatre travées consécutives de lon-

---

(1) *Teoria del cálculo de las vigas rectas*, por don Pablo de Alzola, ingeniero de caminos, canales y puertos (año 1869).

gueur l; nous aurons, en appliquant la formule (1) aux appuis $k-1$, k et $k+1$,

$$F_{k-1}=\frac{1}{4}(p_{k-2}+p_{k-1})l-\frac{6M_{k-1}}{l};$$

$$F_{k}=\frac{1}{4}(p_{k-1}+p_{k})l-\frac{6M_{k}}{l};$$

$$F_{k-1}=\frac{1}{4}(p_{k}+p_{k+1})l-\frac{6M_{k+1}}{l};$$

quations qui supposent $k>2$ et $<n$.

Multiplions l'équation du milieu par 4, ajoutons, et remplaçons $M_{k-1}+4M_k+4M_{k+1}$ par sa valeur $-\frac{1}{4}(p_{k-1}+p_k)l^2$. Il viendra

$$(2)\quad \begin{cases} F_{k-1}+4F_k+F_{k+1}=\left(\frac{1}{4}p_{k-2}+\frac{5}{4}p_{k-1}+\frac{5}{4}p_k+\frac{1}{4}p_{k-1}\right)l+\frac{6}{4}(p_{k-1}+p_k)l \\ =\left(\frac{1}{4}p_{k-2}+\frac{11}{4}p_{k-1}+\frac{11}{4}p_k+\frac{1}{4}p_{k+1}\right)l. \end{cases}$$

Cette équation n'est applicable ni à $k=2$, ni à $k=n$. Pour traiter ces cas particuliers, observons que l'équation (1) peut s'appliquer à la première pile et à la seconde, ce qui donne

$$F_2=\frac{1}{4}(p_1+p_2)l-\frac{6M_2}{l},$$

$$F_3=\frac{1}{4}(p_2+p_3)l-\frac{6M_3}{l},$$

et le théorème des trois moments, appliqué aux appuis 1, 2 et 3, donne entre M_2 et M_3 la relation

$$4M_2+M_3=-\frac{1}{4}(p_1+p_2)l^2.$$

Multipliant donc la première équation par 4, et ajoutant à la seconde, il viendra

$$(3)\quad 4F_2+F_3=\left(p_1+\frac{5}{4}p_2+\frac{1}{4}p_3\right)l+\frac{6}{4}(p_1+p_2)l=\left(\frac{10}{4}p_1+\frac{11}{4}p_2+\frac{1}{4}p_3\right)l.$$

De même, considérant les appuis n° $n-1$, n, $n+1$, on aurait l'équation symétrique

$$(4)\quad F_{n-1}+4F_n=\left(\frac{10}{4}p_n+\frac{11}{4}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2}\right)l.$$

De là résulte le tableau suivant de $n-2$ équations:

$$(5)\quad \begin{cases} 4F+F_3=\left(\frac{10}{4}p_1+\frac{11}{4}p_2+\frac{1}{4}p_3\right)l, \\ F_2+4F_3+F_4=\left(\frac{1}{4}p_1+\frac{11}{4}p_2+\frac{11}{4}p_3+\frac{1}{4}p_4\right)l, \\ F_3+4F_4+F_5=\left(\frac{1}{4}p_2+\frac{11}{4}p_3+\frac{11}{4}p_4+\frac{1}{4}p_5\right)l, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{n-2}+4F_{n-1}+F_n=\left(\frac{1}{2}p_{n-3}+\frac{11}{4}p_{n-2}+\frac{11}{4}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_n\right)l, \\ F_{n-1}+4F_n=\left(\frac{1}{4}p_{n-2}+\frac{11}{4}p_{n-1}+\frac{10}{4}p_n\right)l. \end{cases}$$

Ces $n-2$ équations ne contiennent ni F_1, ni F_{n+1}; elles ne renferment que les $n-1$ réactions des piles. Pour déterminer les réactions de la première culée, appliquons l'équation (1) à l'appui n° 2; il vient

$$F_2 = \frac{1}{4}(p_1 + p_2)l - \frac{6M_2}{l}.$$

Or M_2 est la somme des moments, par rapport à l'appui n° 2, des forces F_1 et $p_1 l$ qui sollicitent la première travée; donc

$$M_2 = F_1 l - \frac{1}{2}p_1 l^2,$$

$$\frac{6M_2}{l} = 6F_1 - 3p_1 l,$$

et enfin

(6) $$6F_1 + F_2 = \frac{1}{4}(p_1 + p_2)l + 3p_1 l = \left(\frac{13}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_2\right) l.$$

De même, la relation symétrique nous donnera, entre les forces F_n et F_{n+1},

(7) $$F_n + 6F_{n-1} = \left(\frac{1}{4}p_{n-1} + \frac{13}{4}p_n\right) l$$

En tout, nous avons n équations entre $n+1$ inconnues. Mais on peut y joindre les deux équations de la statique, savoir l'équation des forces $\Sigma F = \Sigma pl$, et l'équation des moments, pris, par exemple, par rapport au premier appui. La première est satisfaite d'elle-même, car si on ajoute ensemble les équations (5), (6) et (7), on trouve, dans le premier membre, six fois la somme de toutes les réactions, et dans le second, six fois la somme des poids des travées. La dernière équation à joindre aux équations (5), (6), (7), est donc l'équation des moments, à laquelle on donne la forme suivante en divisant par l:

(8) $$\left\{\begin{aligned} F_2 + 2F_3 + 3F_4 + \dots + nF_{n-1} &= p_1 l \times \frac{1}{2} + p_2 l \times \frac{3}{2} + p_3 l \times \frac{5}{2} + \dots + p_n l\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} l\,[p_1 + 3p_2 + 5p_3 + \dots + (2n-1)p_n]. \end{aligned}\right.$$

La résolution de ce système d'équations est extrêmement facile, et conduit directement à la détermination des réactions des appuis, sans passer par la recherche des moments fléchissants.

II. *Propriétés de la parabole des moments qui représente, dans la travée n°* k, *l'influence de la charge de cette travée elle-même.*

204. Cette parabole $aEdcFb$ (§ 186, fig. 180) coupe la travée AB en deux points E et F. Soit donc

$$Aa = -M_k,$$
$$Bb = -M_{k+1}.$$

Les points D et C sont ceux où l'influence, sur la travée AB, des autres travées considérées seules change de signe (§§ 184 et 185). Nous avons déterminé l'ordonnée Dd de la parabole pour le premier de ces points, et nous connaissons par conséquent les coordonnées de ce point d, savoir :

$$Dd = \frac{1}{4}p_k l_k^2 \times - \frac{\gamma_{k-2}(\gamma_{k-1} + \gamma_{k-2})}{(\gamma'_{k-1} - \gamma_{k-2})^2}, \quad AD = -\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} l_k.$$

De même, pour l'autre point, C, on trouverait

$$Cc = \frac{1}{4} p_k l_k^2 \times - \frac{\alpha_{n-k-1}(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1})}{(\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1})^2}, \quad AC = \frac{\alpha_{n-k} l_k}{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-k-1}}.$$

1° Considérons en particulier le premier point d. De la formule

$$AD = - \frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} l_k,$$

on déduit

$$DB = l - AD = \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} l_k \quad \text{et} \quad DB - AD = \frac{\gamma_{k-1} + \gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}} l.$$

Prenons le milieu I de la travée; nous aurons

$$DB = IB + ID = AI + ID, \quad \text{et} \quad AD = AI - ID.$$

Donc

$$DB - AD = 2ID,$$

et enfin

$$ID = \frac{\gamma_{k-1} + \gamma_{k-2}}{2(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})} l_k.$$

Multiplions ID par AD, il viendra

$$ID \times AD = - \frac{\gamma_{k-2}(\gamma_{k-1} + \gamma_{k-2})}{2(\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2})^2} l_k^2 = \frac{2Dd}{p_k},$$

ou autrement

$$Dd = \frac{1}{2} p_k \times ID \times AD.$$

Sous cette forme on reconnait que Dd est l'ordonnée d'une parabole à axe vertical AdI, qui passerait par les points A et I, et qui aurait pour paramètre $\frac{2}{p_k}$, comme la parabole des moments elle-même; l'équation de cette parabole est

$$y = \frac{1}{2} p_k x \left(\frac{1}{2} l_k - x\right).$$

On trouvera le point d à l'intersection de cette parabole avec la verticale élevée au point D.

De même le point c est à l'intersection de la verticale élevée au point C, avec une parabole égale, IcB, menée par les points I et B, de manière à avoir son axe vertical.

2° Les droites aD, bC, coupent la verticale du point I en un même point i, qui appartient à la parabole $aEdicFb$.

Nous avons en effet

$$Aa = - M_k = - \frac{1}{4} p_k l_k^3 \frac{\gamma_{k-2}(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1})}{l_1 \alpha_{n-1}},$$

$$Bb = - M_{k+1} = - \frac{1}{4} p_k l_k^3 \frac{\alpha_{n-k-1}(\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1})}{l_1 \alpha_{n-1}}.$$

Multiplions la première équation par $\frac{\gamma_{k-2} + \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}}$, la seconde par $\frac{\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k-1}}{\alpha_{n-k-1}}$, et

retranchons : il viendra

$$(1) \qquad Aa \times \frac{\gamma_{k-2}+\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-2}} = Bb \times \frac{\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1}}{\alpha_{n-k-1}}.$$

Mais des équations

$$ID = \frac{\gamma_{k-1}+\gamma_{k-2}}{2(\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2})} l_k \quad \text{et} \quad AD = -\frac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}} l_k,$$

on tire

$$\gamma_{k-1}+\gamma_{k-2} = \frac{2ID(\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2})}{l_k} = -\frac{2ID}{l_k} \times \frac{\gamma_{k-2}}{AD} l_k = -2\frac{ID}{AD}\gamma_{k-2}.$$

Le premier membre de l'équation (1) devient par cette substitution, en changeant le signe et en divisant par 2,

$$Aa \times \frac{ID}{AD},$$

quantité égale à Ii, à cause des triangles semblables aAD, IDi.

On prouverait de même que le second membre représente la distance du point I au point où la droite bC coupe la verticale Ii. Ces deux distances étant les mêmes, les trois droites Ii, aD, bC, concourent en un même point.

Je dis de plus que ce point appartient à la parabole $adcb$.

On a, en effet,

$$Ii = Aa \times \frac{ID}{AD} = \frac{-M_k \times \dfrac{\gamma_{k-1}+\gamma_{k-2}}{2(\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2})} l_k}{-\dfrac{\gamma_{k-2}}{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}}} = M_k \times \frac{\gamma_{k-1}+\gamma_{k-2}}{2\gamma_{k-2}}.$$

On aurait de même

$$Ii = Bb \times \frac{IC}{CB} = M_{k+1} \times \frac{\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1}}{2\alpha_{n-k-1}}.$$

Remplaçons M_k et M_{k+1} par leurs valeurs, et observons qu'au milieu I de la portée, le moment fléchissant M est donné par la formule

$$M = \frac{1}{2}(M_{k+1}+M_k) + \frac{1}{8}p_k l_k^2.$$

Il viendra, après ces substitutions,

$$Ii = \frac{1}{2}p_k l_k^3 \times \frac{(\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1})(\gamma_{k-2}+\gamma_{k-1})}{l_1\alpha_{n-1}}$$
$$= \frac{1}{8}p_k l_k^2 \times \frac{(\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1})(\gamma_{k-2}+\gamma_{k-1})}{\alpha_{n-k}\gamma_{k-1}-\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}}$$

et

$$M = \frac{1}{8}p_k l_k^3\left[\frac{\gamma_{k-2}(\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1}) + \alpha_{n-k-1}(\gamma_{-2}+\gamma_{k-1})}{l_1\alpha_{n-1}}\right] + \frac{1}{8}p_k l_k^2$$
$$= \frac{1}{8}p_k l_k\left[\frac{\gamma_{k-2}(\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1}) + \alpha_{n-k-1}(\gamma_{k-1}+\gamma_{k-1})}{\alpha_{n-k}\gamma_{k-1}-\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}} + 1\right]$$
$$= \frac{1}{8}p_k l_k^2\left[\frac{(\alpha_{n-k}+\alpha_{n-k-1})(\gamma_{k-2}+\gamma_{k-1})}{\alpha_{n-k}\gamma_{k-1}-\alpha_{n-k-1}\gamma_{k-2}}\right] = Ii.$$

Ces propriétés facilitent, comme nous l'avons dit (§ 186), le tracé de la parabole aE_1Fb, et le partage de la travée en cinq tronçons.

POUTRES D'ÉGALE RÉSISTANCE POSÉES SUR PLUSIEURS APPUIS (1).

205. Nous supposerons qu'une poutre continue, posée sur plusieurs appuis de niveau, ait une même hauteur dans toute son étendue. Ce sera, par exemple, une poutre à double T, dont l'épaisseur des tables, haute et basse, varie d'un point à l'autre, sous la condition suivante : un poids p étant uniformément réparti par unité de longueur dans toute l'étendue de la poutre, les pressions et tensions développées dans les fibres les plus éloignées de l'axe neutre doivent toutes être égales à une limite R donnée. Une poutre ainsi définie est un *solide d'égale résistance* par rapport à cette hypothèse de distribution des surcharges, et il satisfait aux conditions indiquées dans le § 144 (seconde solution).

Nous allons chercher les moments fléchissants, et la forme prise par la fibre neutre.

Soit v la distance, supposée constante, entre la fibre neutre et les points les plus fatigués d'une section quelconque ;

I, le moment d'inertie de la section par rapport à l'horizontale menée dans son plan par son centre de gravité. Cette quantité I est variable d'un point à l'autre de la portée totale ;

ρ, le rayon de courbure en un point quelconque de la fibre neutre déformée ;

E, le coefficient d'élasticité ;

M, le moment fléchissant en un point quelconque.

Nous aurons toujours la série d'égalités

$$M=\frac{RI}{v}=\frac{EI}{\rho}=EI\frac{d^2y}{dx^2}.$$

On déduit de là

$$\frac{R}{v}=\frac{E}{\rho}, \qquad \text{et par suite} \qquad \rho=\frac{Ev}{R}.$$

Les nombres E, v, R sont constants pour toutes les sections.

Donc ρ est aussi constant en valeur absolue, et la forme de la fibre neutre après déformation se compose d'une série d'arcs de cercle de même rayon, raccordés bout à bout. Le rayon ρ, dont on connait ainsi tout de suite la valeur absolue, est d'ailleurs positif ou négatif : positif, si la région comprimée de la section correspondante est au-dessus de la fibre neutre ; négatif, si elle est au-dessous.

Négligeant, comme à l'ordinaire, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ devant l'unité, nous transformons par approximation les arcs de cercle en arcs de parabole, et l'équation différentielle de la fibre neutre devient

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{1}{\rho}.$$

le signe + devant être pris pour tous les arcs dont la convexité est tournée vers le bas, le signe — pour tous ceux qui sont convexes vers le haut.

Les points d'inflexion, ou de non-flexion, de la fibre moyenne sont ceux où la courbure change brusquement de signe, et passe de la valeur $\pm\frac{1}{\rho}$ à la valeur $\mp\frac{1}{\rho}$. En général,

(1) Voir le mémoire n° 20 du tome II (5e série) des *Annales des ponts et chaussées* (1871), par M. Renoust des Orgeries, ingénieur des ponts et chaussées.

dans une travée AB, il y a deux points d'inflexion C et D, et la fibre moyenne comprend trois arcs de cercle : AC', décrit du point O comme centre avec OA = ρ pour rayon ; C'D', qui a pour centre le point O', et enfin D'B, qui a son centre en O''.

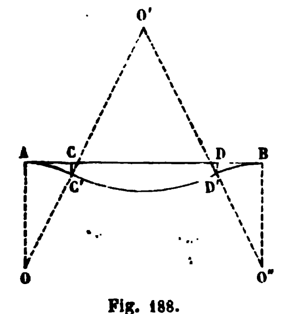


Fig. 188.

Nous appellerons d'une manière générale, pour la travée n° k, u_k, l'abscisse AC du premier point d'inflexion, et v_k l'abscisse AD du second.

Nous conserverons d'ailleurs toutes les notations adoptées dans nos précédents calculs, relativement aux poutres de section constante. Nous allons voir qu'on peut exprimer toutes les inconnues, moments fléchissants, efforts tranchants, déviations angulaires de la fibre neutre, flèches prises par les divers points de la poutre, épaisseurs des tables du double T, en fonction de ces abscisses u et v.

Recherche des moments fléchissants et des efforts tranchants en fonction de u_k *et* v_k.

206. L'équation des moments fléchissants dans la travée AB est, pour une charge p_k également répartie,

(1) $$M = M_k + A_k x - \frac{1}{2} p_k x^2.$$

Les abscisses des points de non-flexion sont données en égalant M a 0 : ce sont les racines de l'équation

$$x^2 - \frac{2A_k}{p_k} x - \frac{2M_k}{p_k} = 0.$$

Donc

$$u_k + v_k = \frac{2A_k}{p_k} \quad \text{et} \quad u_k v_k = -\frac{2M_k}{p_k}.$$

On en déduit

(2) $$\begin{cases} A_k = \frac{p_k}{2}(u_k + v_k), \\ M_k = -\frac{p_k}{2} u_k v_k. \end{cases}$$

Le moment fléchissant sur l'appui B, qui a le n° $k+1$, se déduit de l'équation (1) en y faisant $x = l_k$; mais on peut aussi observer que la seconde des équations (2) le fait connaitre ; car si le moment en A est égal à $-\frac{p_k}{2} \times AC \times AD$, le moment en B est, par la même raison, égal à $-\frac{p_k}{2} \times BC \times BD$, et on a par conséquent

(3) $$M_{k+1} = -\frac{p_k}{1}(l_k - u_k)(l_k - v_k).$$

On aurait, par une transformation semblable de la première des équations (2), l'effort tranchant en B dans la travée AB ; toutefois, il y aurait lieu de changer le signe de la formule ainsi obtenue, pour tenir compte des conventions relatives aux signes des efforts tranchants. On retrouverait alors la valeur connue $A_k - p_k l_k$.

Considérons le moment fléchissant sur un appui intermédiaire n° $k+1$. Ce moment appartient aux deux travées qui se raccordent sur cet appui ; relativement à la travée

n° k, située à gauche, nous avons l'équation (3); relativement à la travée n° $k+1$, située à droite, nous pourrons appliquer la seconde des équations (2), en y changeant k en $k+1$. Nous aurons donc ainsi

$$(4) \qquad M_{k+1} = -\frac{p_{k+1}}{2} u_{k+1} v_{k+1},$$

et par suite, nous avons l'équation générale

$$(5) \qquad p_k(l_k - u_k)(l_k - v_k) = p_{k+1} u_{k+1} v_{k+1},$$

relation qui suppose seulement la distribution égale des poids p_k et p_{k+1} dans chacune des travées.

Équations de la fibre neutre déformée.

207. Les équations différentielles de la fibre neutre sont

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{\rho}, \text{ de } x=0 \text{ à } x=u_k, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = +\dfrac{1}{\rho}, \text{ de } x=u_k \text{ à } x=v_k, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{\rho}, \text{ de } x=v_k \text{ à } x=l_k. \end{cases}$$

Intégrons ces équations : soit φ_k l'angle que fait la fibre neutre avec l'horizon sur l'appui k; il viendra, en déterminant les constantes de manière que $\frac{dy}{dx}$ ait une même valeur dans les deux tronçons voisins, aux points $x=u_k$ et $x=v_k$,

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{\rho} + \operatorname{tang}\varphi_k, \text{ pour le premier tronçon,} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\rho} - \dfrac{2u_k}{\rho} + \operatorname{tang}\varphi_k, \text{ pour le second,} \\ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{\rho} + \dfrac{2(v_k - u_k)}{\rho} + \operatorname{tang}\varphi_k, \text{ pour le troisième.} \end{cases}$$

Intégrons une seconde fois, et déterminons les constantes de telle sorte, que y soit nul pour $x=0$, et que les deux tronçons qui se réunissent aux points d'inflexion aient en ces points le même y. Il viendra en définitive

$$(8) \quad \begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{2\rho} + x \operatorname{tang}\varphi_k, \text{ pour le premier tronçon,} \\ y = \dfrac{x^2}{2\rho} - \dfrac{2u_k}{\rho} x + \dfrac{u_k^2}{\rho} + x \operatorname{tang}\varphi_k, \text{ pour le second,} \\ y = -\dfrac{x^2}{2\rho} + \dfrac{2(v_k - u_k)}{\rho} x - \dfrac{v_k^2 - u_k^2}{\rho} + x \operatorname{tang}\varphi_k, \text{pour le troisième.} \end{cases}$$

On déterminera $\operatorname{tang}\varphi_k$ en faisant $x=l_k$ et $y=0$ dans la dernière des équations (8). Il viendra

$$(9) \quad \operatorname{tang}\varphi_k = \frac{l_k}{2\rho} - \frac{2(v_k - u_k)}{\rho} + \frac{v_k^2 - u_k^2}{\rho l_k} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{l_k}{2} - 2(v_k - u_k) + \frac{v_k^2 - u_k^2}{l_k}\right).$$

La troisième des équations (7), dans laquelle on ferait $x = l_k$, donnerait de même $\tang \varphi_{k-1}$; on peut ainsi déduire $\tang \varphi_{k+1}$ de $\tang \varphi_k$, en changeant, dans (9), u_k et v_k respectivement en $(l_k - v_k)$ et $(l_k - u_k)$, et en changeant le signe de la formule.

Ces deux méthodes conduisent l'une et l'autre à l'équation

$$\tang \varphi_{k+1} = \frac{1}{p}\left(-\frac{l_k}{2} + \frac{v_k{}^2 - u_k{}^2}{l_k}\right). \tag{10}$$

Les deux travées se raccordant tangentiellement sur l'appui commun, on peut exprimer $\tang \varphi_{k+1}$ de deux manières : par l'équation (10), en fonction des abscisses u_k et v_k prises dans la travée précédente, et par l'équation (9), où l'on aurait changé k en $k+1$, en fonction des abscisses des points d'inflexion dans la travée n° $k+1$. On a donc, en supprimant le facteur $\frac{1}{p}$, l'égalité

$$\frac{l_{k+1}}{2} - 2(v_{k+1} - u_{k+1}) + \frac{v_{k+1}{}^2 - u_{k+1}{}^2}{l_{k+1}} = -\frac{l_k}{2} + \frac{v_k{}^2 - u_k{}^2}{l_k}. \tag{11}$$

Détermination des abscisses u *et* v *dans toute la poutre.*

208. Les équations (5) et (11) peuvent s'appliquer à tous les appuis intermédiaires. Faisant successivement dans ces équations, $k = 1$, $k = 2 \ldots . k = n+1$, on obtiendra le tableau suivant de $2n - 2$ équations : dans les équations (5), nous avons supprimé les facteurs p, qui sont égaux entre eux. De plus nous avons fait $u_1 = 0$ et $v_n = l_n$, puisque les extrémités libres de la poutre, posées sur les appuis, sont des points de non-flexion,

Équations (5).	*Équations* (11).
$l_1(l_1 - v_1) = u_2 v_2,$	$\frac{l_2}{2} - 2(v_2 - u_2) + \frac{v_2^2 - u_2^2}{l_2} + \frac{l_1}{2} - \frac{v_1^2}{l_1} = 0,$
$(l_2 - u_2)(l_2 - v_2) = u_3 v_3,$	$\frac{l_3}{2} - 2(v_3 - u_3) + \frac{v_3^2 - u_3^2}{l_3} + \frac{l_2}{2} - \frac{v_2^2 - u_2^2}{l_2} = 0,$
$(l_3 - u_3)(l_3 - v_3) = u_4 v_4,$	$\frac{l_4}{2} - 2(v_4 - u_4) + \frac{v_4^2 - u_4^2}{l_4} + \frac{l_3}{2} - \frac{v_3^2 - u_3^2}{l_3} = 0,$
. . . .	. . . .
. . . .	. . . .
$(l_{n-1} - u_{n-1})(l_{n-1} - v_{n-1}) = u_n l_n.$	$\frac{l_n}{2} - 2(l_n - u_n) + \frac{l_n{}^2 - u_n{}^2}{l_n} + \frac{l_{n-1}}{2} - \frac{v_{n-1}{}^2 - u_{n-1}{}^2}{l_{n-1}} = 0.$

(12)

Le nombre des inconnues, u et v, est de deux par chaque travée intermédiaire, et d'un seulement pour les travées de rive, dans lesquelles on a $u_1 = o$ et $v_n = l_n$; il y a donc en tout $2(n-2) + 2$, ou $2n - 2$ inconnues, nombre égal au nombre des équations (12).

Les deux premières équations du tableau font connaître u_2 et v_2 en fonction de v_1 ; les deux suivantes donnent de même u_3 et v_3 en fonction de u_2 et de v_2, et, par suite, en fonction de v_1, et ainsi de suite jusqu'aux deux dernières équations : l'une fait connaître u_n en fonction de v_1. L'autre doit se réduire à une identité, et fournit une équation qui fait connaître v_1. Mais ces équations sont du second degré. Les valeurs algébriques de u_{k+1} et v_{k+1} en fonction de u_k et de v_k sont donc compliquées de radicaux carrés, et le degré de l'équation finale monte de plus en plus, à mesure que le nombre n des travées est plus grand. Le problème ainsi envisagé n'est pas susceptible d'une solution algébrique générale. Il faut bien remarquer aussi que la méthode que nous avons indiquée suppose expressément que les points d'inflexion C et D sont des points réels de la travée AB, de sorte qu'elle serait en défaut si les valeurs fournies pour u_k et v_k étaient imaginaires, ou négatives, ou supérieures à la longueur l_k de la travée.

Une fois les u et les v déterminés pour chaque travée, on pourra connaître les moments et les efforts tranchants sur chaque appui par les équations (2), et tracer les paraboles des moments dans chaque travée au moyen de l'équation (1), où les coefficients sont déterminés.

Recherche de la section en chaque point de la portée.

La valeur du moment d'inertie est donnée en chaque point par l'équation

$$\frac{RI}{v} = M,$$

ou bien $I = \frac{Mv}{R}$, M étant pris en valeur absolue.

La poutre étant supposée un double T de hauteur H constante, a étant la largeur et b l'épaisseur variable des tables, on aura approximativement

$$\frac{I}{v} = abH,$$

et par suite

$$b = \frac{M}{RHa}.$$

L'épaisseur b, en toute rigueur, devrait s'annuler aux points d'inflexion pour lesquels $M = 0$. En pratique, cette détermination n'est pas admissible ; car elle supposerait l'uniformité absolue de la distribution des charges, qui n'est qu'une hypothèse très-rarement réalisée. Une inégalité dans la distribution des surcharges, en déplaçant les points d'inflexion, exigerait aux points C et D des sections capables d'une certaine résistance. On devra donc se contenter de réduire en ces points les épaisseurs b, sans descendre au-dessous d'une limite pratique convenable.

Les équations (9) font connaître les valeurs de tang φ_k sur chaque appui. Ces valeurs, substituées dans (8), permettent de tracer les arcs paraboliques dont l'ensemble constitue la nouvelle forme de la fibre moyenne.

209. Appliquons cette théorie à la poutre à deux travées égales et également chargées. A, A', A'' étant les trois appuis également espacés, on aura

$$u_1 = 0, \qquad v_1 = AD,$$
$$u_2 = A'C', \qquad v_2 = A'A'',$$

de sorte qu'en appelant l la longueur commune des deux travées, on aura pour l'équation (5)

$$l(l - v_1) = lu_2, \qquad \text{ou} \qquad u_2 + v_1 = l,$$

et pour l'équation (11),

$$\frac{l}{2} - 2(l - u_2) + \frac{l^2 - u_2^2}{l} + \frac{l}{2} - \frac{v_1^2}{l} = 0,$$

équation qui se réduit à

$$u_2^2 - 2u_2 l + v_1^2 = 0 ;$$

et, remplaçant u_2 par $l - v_1$, il vient en définitive

$$v_1 = AD = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

La même théorie s'applique à la poutre d'égale résistance encastrée sur deux appuis A et B.

A C D B

Fig. 189.

Soit μ le moment d'encastrement sur les appuis A et B; soient C et D les points d'inflexion; on aura, en vertu de l'équation (5), appliquée successivement aux deux appuis,

$$\mu = -\frac{p}{2}\,\mathrm{AC}\times\mathrm{AD} = -\frac{p}{2}\,\mathrm{BC}\times\mathrm{BD}.$$

La symétrie exige que AC = BD.

L'équation (9) doit donner $\tang\varphi = 0$ au point A, et, par conséquent,

$$\frac{\mathrm{AB}}{2} - 2\mathrm{CD} + \frac{\overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2}{\mathrm{AB}} = 0.$$

Or

$$\overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2 = (\mathrm{AD}+\mathrm{AC})(\mathrm{AD}-\mathrm{AC}) = \mathrm{AB}\times\mathrm{CD},$$

et enfin

$$\frac{\mathrm{AB}}{2} - 2\mathrm{CD} + \mathrm{CD} = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad \mathrm{CD} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AB}.$$

Donc le point C est au quart, et D aux trois quarts de la portée.

La flèche prise par la poutre au point C nous est donnée par la première des équations (8), en y faisant $\tang\varphi = 0$ et $x = \frac{1}{4}\,\mathrm{AB}$. Il vient donc, en prenant les flèches en valeur absolue,

$$f = \frac{\frac{1}{16}\,\overline{\mathrm{AB}}^2}{2\rho} = \frac{1}{32}\,\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2\times\mathrm{R}}{\mathrm{E}v} = \frac{\mathrm{R}l^2}{32\mathrm{E}v}.$$

Le moment fléchissant dans l'encastrement aux points A et B est

$$\mu = -\frac{p}{2}\times\frac{1}{4}\,\mathrm{AB}\times\frac{3}{4}\,\mathrm{AB} = -\frac{3}{32}\,pl^2.$$

Enfin, de même qu'on déduit un système de poutres équilibrées (§ 197) en coupant au point d'inflexion le plus éloigné, dans les deux travées de rive, une série de poutres égales encastrées bout à bout sur des appuis de niveau, on pourra satisfaire aux mêmes conditions avec une poutre continue d'égale résistance, en donnant aux travées de rive les $\frac{3}{4}$ de la portée l des travées centrales, et en abaissant les culées de la quantité $\frac{\mathrm{R}l^2}{32\mathrm{E}v}$ au-dessous du niveau commun des piles.



LIVRE CINQUIÈME.

PIÈCES COURBES.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE INTÉRIEUR DES PIÈCES COURBES.

INTRODUCTION.

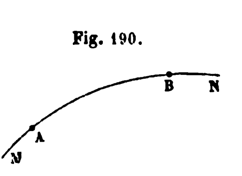
210. Les pièces courbes que l'on emploie dans les constructions ont en général un plan de symétrie dans lequel agissent les forces extérieures qui leur sont appliquées. Par exemple, les fermes en bois ou en métal d'un pont en arc de cercle sont symétriques par rapport à leur plan moyen vertical, et c'est dans ce plan que s'exercent les résultantes des actions de la pesanteur et les réactions des appuis.

La déformation de la pièce s'opère aussi dans ce plan de symétrie.

Le problème de l'équilibre intérieur et de la flexion d'une pièce courbe placée dans ces conditions, ne diffère pas essentiellement du problème de l'équilibre intérieur et de la flexion des pièces droites; il est seulement plus compliqué. La flexion des lames élastiques a été

étudiée, dès le siècle dernier, par les plus grands analystes. Euler le premier donna en 1744, dans un supplément à son célèbre ouvrage : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, une classification des courbes élastiques planes, dans laquelle il fait voir que la forme d'équilibre, c'est-à-dire celle pour laquelle la courbure prise par la fibre moyenne est en tous points proportionnelle au moment fléchissant, satisfait à une condition de minimum : parmi toutes les courbes de longueur donnée AB, qu'on peut tracer entre deux points A et B d'une courbe élastique en équilibre MN, sous la condition de les raccorder tangentiellement avec cette courbe aux points A et B, la courbe élastique est celle qui rend minimum l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho^2}$ prise entre les limites A et B (1). Euler examina, dans le même mémoire, quelques cas de flexion de lames primitivement courbes. Lagrange donna, dans les *Mémoires de Berlin*, année 1769, un mémoire sur la force des ressorts pliés.

Fig. 190.



La question avait été ainsi étudiée à plusieurs reprises au point de vue analytique; il restait à compléter ces recherches pour en rendre les résultats utiles aux constructeurs; c'est ce que fit Navier dans son cours de mécanique à l'École des ponts et chaussées; le mérite de sa méthode consiste principalement dans un choix heureux de coordonnées. Son analyse laissait de côté certains termes, qui la plupart du temps sont en effet négligeables. M. Bresse a montré plus tard que l'on pouvait achever le calcul sans supprimer les termes négligés par Navier, ce qui assure une rigueur plus grande aux formules, et il a fait voir que dans certains cas particuliers, la suppression de ces termes ne serait pas sans influence sur l'exactitude pratique des résultats.

Avant de commencer l'étude de la flexion des pièces courbes, nous rappellerons les principes suivants.

(1) Cette intégrale mesure, à un facteur constant près, le *travail de la flexion* de la lame (§ 93).

211. Une courbe plane MN est définie de grandeur et de position, à deux constantes près, par une relation entre son rayon de courbure, $\rho = AC$, en un point A quelconque, et l'angle θ de la normale AH avec un axe OY, que l'on supposera vertical, par exemple.

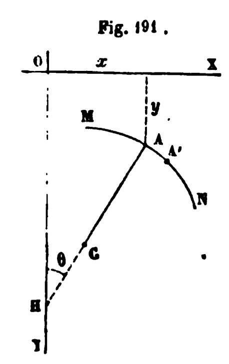


Fig. 191.

Traçons dans le plan de la courbe MN deux axes rectangulaires OX, OY ; je dis que l'on peut déduire de l'équation donnée $\rho = f(\theta)$, l'équation de la courbe MN en coordonnées rectangles x, y.

Appelons, en effet, ds l'arc infiniment petit AA', pris sur la courbe ; nous aurons $ds = \rho d\theta$. Mais $dx = ds \cos\theta$, et $dy = ds \sin\theta$; donc

$$dx = \rho \cos\theta \, d\theta,$$
$$dy = \rho \sin\theta \, d\theta;$$

d'où résulte, en intégrant,

$$x = x_0 + \int \rho \cos\theta \, d\theta,$$
$$y = y_0 + \int \rho \sin\theta \, d\theta.$$

Ces intégrations introduisent deux constantes x_0, y_0, qu'on pourra déterminer dans chaque cas particulier, connaissant un point de la courbe et la valeur correspondante de l'angle θ.

Il serait d'ailleurs facile de faire voir, par la simple géométrie, que l'équation $\rho = f(\theta)$ définit complétement la forme et la position de la courbe MN, pourvu qu'on donne un de ses points, et la direction de la tangente en ce point.

Si, au contraire, on voulait passer des coordonnées rectangles x et y aux coordonnées ρ et θ, on appliquerait les formules connues du calcul différentiel :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx},$$

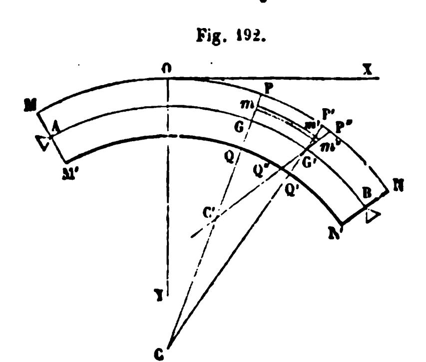
$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

212. Ces préliminaires posés, passons à la recherche de la déformation plane d'une pièce courbe.

Soit MN une pièce courbe terminée à deux sections MM', NN', et reposant en A et B sur deux appuis fixes.

Soit AB la fibre moyenne, c'est-à-dire le lieu géométrique des centres de gravité des sections transversales. On pourra concevoir la pièce comme engendrée par le mouvement d'une figure fermée, tracée dans le plan normal à la courbe AB, et qui se déplacerait de manière que son centre de gravité coïncidât toujours avec un point de la courbe directrice. Cette figure est constante de forme et d'orientation, ou si elle change, elle change par degrés insensibles. Nous supposerons ici qu'elle est invariable, et de plus, qu'elle est symétrique par rapport à une droite menée dans le plan du papier, pour donner à la pièce la symétrie que nous admettons par rapport à son plan moyen; les appuis A et B sont supposés réduits chacun à un point situé à l'extrémité de la fibre moyenne, ce qui revient à regarder les pressions exercées par la pièce sur les plans MM', NN', comme uniformément réparties dans l'étendue de ces sections.

Fig. 192.



Coupons la pièce par un plan normal PQ. Les forces extérieures qui agissent sur la portion PQNN' de la pièce, sont tenues en équilibre par les forces moléculaires développées dans la section PQ. Nous pouvons transporter toutes les forces extérieures au point G, et là, les décomposer suivant les directions rectangulaires, GG' et GC. Appelons A la somme des composantes parallèles à la section; P, la somme des composantes perpendiculaires à la section; M, la somme des moments des forces par rapport au point G.

Nous appellerons encore la force A *effort tranchant*, la force P *effort de compression* (positif s'il y a réellement compression, négatif dans le cas contraire), et le moment M *moment fléchissant* ou *moment de rupture.*

L'effort tranchant n'a qu'une influence insensible sur la flexion de la fibre moyenne AB; l'effort P tend à raccourcir les éléments de cette fibre, ou à les allonger; enfin M tend à en modifier la courbure. Nous admettrons, conformément à nos conventions, que M est positif s'il tend à augmenter la courbure, et qu'il est négatif s'il tend à la diminuer.

Cherchons d'abord quel sera l'effet du moment fléchissant sur la courbure de la fibre neutre, en faisant abstraction de l'effort P, ou en le supposant nul.

Considérons dans l'état naturel de la pièce la section normale P′Q′, infiniment voisine de la section PQ. Le point C, où se coupent les deux normales infiniment rapprochées PQ, P′Q′, est le centre de courbure de la courbe AB dans la région GG′.

Après la déformation, nous pouvons imaginer qu'on déplace la nouvelle position du tronçon PQN, de manière que la section PQ coïncide avec sa position primitive. La flexion n'altère pas l'angle droit des fibres avec les plans des diverses sections transversales; la section P′Q′ prendra donc une certaine position P″Q″, et nous admettrons que les molécules situées à l'origine dans le plan P′Q′ seront, après la déformation, dans un nouveau plan P″Q″, normal à la nouvelle fibre moyenne. Cette hypothèse est identique à celle qui nous a servi pour l'étude de la flexion des pièces droites et de la loi de répartition des efforts dans l'étendue des sections transversales. La normale déviée, P″Q″, prolongée, va couper en C′ la normale voisine PQ; C′ est donc le nouveau centre de courbure de la fibre déformée.

La fibre mm', prise dans l'état naturel, acquiert par suite de la flexion la longueur $m'm''$, et la force moléculaire développée par l'allongement de cette fibre est mesurée par l'expression

$$\frac{E\omega \times m'm''}{mm'} = \frac{E\omega \times m'm''}{GG'},$$

où ω représente l'aire transversale de la fibre projetée en m; on peut, sans erreur sensible, confondre mm' avec GG′, si l'épaisseur PQ de la pièce est une petite fraction du rayon de courbure CG. En

définitive, l'équilibre exige que l'on ait à la fois les deux équations

$$\sum \frac{E\omega \times m'm''}{GG'} = 0, \quad \sum \frac{E\omega \times m'm''}{GG'} \times m'G' = M,$$

les sommes étant étendues à tous les éléments de la section PQ ou P'Q'.

La première équation donne

$$\Sigma\omega \times m'm'' = 0,$$

ou bien

$$\Sigma\omega \times m'G' = 0,$$

en observant que dans le triangle $m'm''G'$, $m'G'$ est proportionnel à $m'm''$.

Cette équation est satisfaite d'elle-même, puisque le point G est le centre de gravité de la section P'Q'.

Reste à transformer la seconde équation.

Considérons le triangle $mm'C$, dont les trois côtés sont rencontrés par la droite $m''G'C'$. Le *Théorème de Carnot* nous donnera l'égalité :

$$m'm'' \times G'C \times C'm = mm'' \times G'm' \times CC' \text{ (1)}.$$

Remplaçons G'C par le rayon de courbure ρ de la fibre moyenne avant la déformation.

Le facteur C'C est la différence $\rho - \rho'$ des rayons de courbure avant et après la déformation.

Le facteur $C'm$ est égal à la somme $\rho' + Gm$ ou à $\rho' + G'm'$; et l'on peut négliger $G'm'$ vis-à-vis de ρ', à cause des petites dimensions transversales attribuées à la pièce. On remplacera donc $C'm$ par ρ'.

On peut de même remplacer mm'' par $mm' + m'm''$, ou par

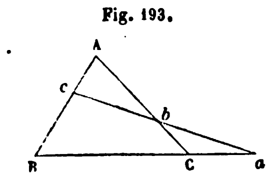


Fig. 193.

(1) Le *Théorème de Carnot*, connu aussi sous le nom de *Théorème de Ptolémée*, consiste en ce que, quand les trois côtés d'un triangle ABC sont coupés par une transversale droite *abc*, le produit des trois segments qui n'ont aucune extrémité commune est égal au produit des trois autres :

$$Ab \times Ca \times Bc = Ac \times Cb \times Ba.$$

$GG' + m'm''$, et négliger $m'm''$ vis-à-vis de GG'; car l'allongement relatif $\frac{m'm''}{GG'}$ est nécessairement très-petit.

Introduisons dans l'équation toutes ces simplifications, il viendra

$$\frac{m'm''}{GG'} = G'm' \times \frac{\rho - \rho'}{\rho \times \rho'} = G'm' \times \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right);$$

Multiplions par $E\omega \times m'G'$, et faisons la somme pour tous les éléments de la section PQ; nous aurons, en définitive,

$$E \times \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) \times \sum \left(\omega \times \overline{G'm'}^2\right) = M.$$

La somme $\Sigma\left(\omega \times \overline{G'm'^2}\right)$ est le moment d'inertie I de la section, par rapport à une droite menée dans son plan par son centre de gravité perpendiculairement au plan de symétrie.

Nous trouvons donc l'équation

$$EI\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = M.$$

L'équation de la flexion des poutres droites était

$$\frac{EI}{\rho} = M.$$

A la courbure $\frac{1}{\rho}$ prise par la poutre droite, il faut simplement, pour passer à l'équation des pièces courbes, substituer l'*augmentation de courbure*, $\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}$, prise par la pièce courbe. Cette règle a été indiquée pour la première fois par Euler.

Nous avons supposé l'effort P égal à zéro. Si cet effort n'est pas nul, il a pour effet de déplacer le plan $P''Q''$ parallèlement à lui-même; mais ce déplacement du plan $P''Q''$ n'entraîne jamais pour le point C' qu'un déplacement insignifiant; l'incertitude qui règne sur la valeur du nombre E ne permet pas d'ailleurs de l'évaluer avec exactitude. La démonstration est tout à fait semblable à celle que

nous avons donnée en traitant le problème de la flexion des pièces droites sollicitées par des forces obliques (§ 115).

Nous verrons cependant que la force P peut modifier d'une manière appréciable la forme de la pièce fléchie, parce qu'elle altère la longueur de l'élément GG'.

213. Pour avoir la répartition des pressions dans la section PQ, on observera que la force P, appliquée au centre de gravité G, perpendiculairement à la section, donne partout une pression uniforme de $\frac{\Omega}{P}$ par unité de surface (§ 34). Le moment fléchissant M produit, en tout point situé à la distance $G'm' = v$ de la fibre moyenne, une pression par unité de surface égale à

$$R = \frac{E \times m'm''}{mm'} = \frac{E \times m'm''}{GG'} = E \times G'm \times \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = Ev\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right),$$

Mais

$$EI\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = M.$$

Donc

$$\frac{RI}{v} = M,$$

comme dans une poutre droite, et par suite

$$R = \frac{Mv}{I}.$$

Ajoutant les pressions partielles dues à la force P et au couple M, il vient pour la pression totale

$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mv}{I},$$

formule toute semblable à celle des poutres droites sollicitées par des forces obliques.

Pour que cette formule soit vraie, il faut regarder R comme positif quand il représente une compression, et comme négatif quand il représente une extension; v est compté comme positif au-dessous de la fibre neutre, et comme négatif au-dessus.

RECHERCHE DE L'ÉQUATION DE LA FIBRE MOYENNE DÉFORMÉE.

214. L'équation

$$(1) \qquad EI\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}\right)=M,$$

représente, dans un système particulier de coordonnées, la forme de la fibre neutre. Il faut ramener cette équation à une relation entre les coordonnées rectangles x et y. On voit que, le rayon de courbure entrant dans l'équation (1), la relation générale entre x et y qui s'en déduit devra contenir deux constantes arbitraires.

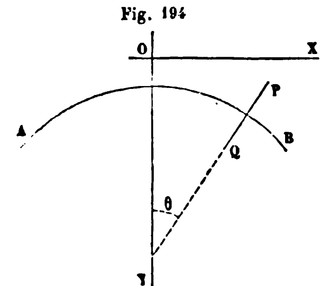
Le moment M est exprimé en fonction de x et de y, et l'on peut se borner à le prendre dans l'état naturel de la pièce, à cause de la petitesse des déformations. Nous admettrons donc que le moment M n'est pas sensiblement altéré par les déformations produites. Nous avons opéré de même dans la plupart des problèmes examinés précédemment.

Appelons x, y, les coordonnées d'un point de la fibre neutre dans l'état naturel; x', y' les coordonnées du même point, après la déformation.

Les différentielles dx, dy, ds, prises dans l'état naturel, se changeront en dx', dy', ds' après la flexion.

Appelons encore θ l'angle du plan PQ, normal à la courbe au point (x, y), avec l'axe fixe YO; cet angle étant mesuré dans l'état primitif de la pièce.

Fig. 194



θ' représentera l'angle de la position nouvelle prise par le plan PQ, par suite de la flexion, avec le même axe YO.

Il résulte de ces notations que le rayon de courbure ρ, avant la flexion, est égal

au rapport $\frac{ds}{d\theta}$, tandis qu'après la flexion il est égal au rapport $\frac{ds}{d\theta'}$.

La simplification admise par Navier consiste à regarder ds et ds' comme égaux entre eux; ce qui revient à négliger le raccourcissement produit sur la fibre moyenne par les efforts P normaux aux sections transversales, hypothèse déjà admise pour établir l'équation (1).

Nous avons donc

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{EI}\frac{d\theta' - d\theta}{ds} = \mathrm{M}.$$

D'où résulte, en intégrant, l'expression suivante

$$\text{(3)} \qquad \theta' - \theta = \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\, ds + (\theta'_0 - \theta_0).$$

L'intégrale indiquée a un sens parfaitement précis; car M peut s'exprimer en fonction de s, et le second membre représente une quadrature, prise entre l'extrémité A de la pièce et un point quelconque, le long de la courbe moyenne non déformée AB. Le premier membre donne la quantité angulaire dont chaque section normale bascule pour passer de sa première à sa dernière position. La constante $(\theta'_0 - \theta_0)$ est la variation de l'inclinaison de la tangente à l'extrémité définie par l'arc s_0, c'est-à-dire au point A.

215. Nous allons déduire de l'équation (2) les différences $x' - x$, $y' - y$, c'est-à-dire les déplacements parallèles aux axes des différents points de la fibre moyenne. Pour cela, observons que l'on a approximativement

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} \cos\theta' &= \cos\theta - (\theta' - \theta)\sin\theta, \\ \sin\theta' &= \sin\theta + (\theta' - \theta)\cos\theta. \end{aligned}$$

Ces formules sont suffisamment exactes, quand la différence $\theta' - \theta$ est très-petite, ce que l'on suppose ici.

Mais

$$\text{(5)} \qquad \cos\theta' = \frac{dx'}{ds'}, \qquad \cos\theta = \frac{dx}{ds},$$
$$\sin\theta' = \frac{dy'}{ds'}, \qquad \sin\theta = \frac{dy}{ds}.$$

Navier, conformément à la simplification déjà mentionnée, continuait à confondre ds' avec ds. M. Bresse a montré qu'on pouvait tenir compte cette fois de la variation de longueur des éléments de la fibre moyenne (1). La force P produit sur la longueur ds un raccourcissement égal à $\frac{Pds}{E\Omega}$; nous sommes convenus de regarder comme positives les forces P quand elles compriment les fibres ; la fibre ds acquerra donc, par suite de la compression, une longueur ds' donnée par l'équation :

$$ds' = ds - \frac{Pds}{E\Omega} = ds\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right).$$

Nous supposerons, de plus, avec M. Bresse, que la température ait varié d'un nombre τ de degrés depuis la pose de l'arc ; α étant le coefficient de dilatation linéaire de la matière dont se compose la pièce, l'élément de l'arc devra encore être multiplié approximativement par le binôme $(1 + \alpha\tau)$.

De sorte qu'en définitive on a

$$(6) \qquad ds' = ds\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)(1 + \alpha\tau).$$

Introduisons cette expression de ds' dans les équations (5), puis remplaçons dans (4) les cosinus et sinus par leurs valeurs données par les équations (5) ; nous aurons, en multipliant par ds',

$$dx' = dx\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)(1 + \alpha\tau) - (\theta' - \theta)dy\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)(1 + \alpha\tau),$$
$$dy' = dy\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)(1 + \alpha\tau) + (\theta' - \theta)dx\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)(1 + \alpha\tau).$$

ou bien

$$(7) \qquad dx' = \left(1 - (\theta' - \theta)\frac{dy}{dx}\right)\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)(1 + \alpha\tau)dx$$
$$dy' = \left(1 + (\theta' - \theta)\frac{dx}{dy}\right)\left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right)(1 + \alpha\tau)dy.$$

Les équations (7) peuvent se simplifier, en observant que les trois

---

(1) *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes.* Mallet-Bachelier, 1851.

binômes entre parenthèses ont pour premier terme l'unité, et que les seconds termes sont, avec le signe + ou le signe —, des nombres très-petits en valeur absolue; on a donc avec une grande approximation, en supprimant les produits des seconds termes,

$$\left(1-(\theta'-\theta)\frac{dy}{dx}\right)\left(1-\frac{P}{E\Omega}\right)(1+\alpha\tau)=1-(\theta'-\theta)\frac{dy}{dx}-\frac{P}{E\Omega}+\alpha\tau$$

$$\left(1+(\theta'-\theta)\frac{dx}{dy}\right)\left(1-\frac{P}{E\Omega}\right)(1+\alpha\tau)=1+(\theta'-\theta)\frac{dx}{dy}-\frac{P}{E\Omega}+\alpha\tau,$$

et par suite, retranchant l'unité, il vient

$$(8)\qquad dx'-dx=-(\theta'-\theta)dy-\frac{P}{E\Omega}dx+\alpha\tau dx,$$

$$(9)\qquad dy'-dy=+(\theta'-\theta)dx-\frac{P}{E\Omega}dy+\alpha\tau dy.$$

L'équation (3) nous a donné $\theta'-\theta$ par une quadrature; cette équation contient une constante arbitraire $(\theta'_0-\theta_0)$; substituant dans les équations (8) et (9), on trouvera, par de nouvelles quadratures, les valeurs de $x'-x$ et $y'-y$:

$$(10)\qquad x'-x=-\int_{s_0}^{s}(\theta'-\theta)dy-\int_{s_0}^{s}\frac{P}{E\Omega}dx+\int_{s_0}^{s}\alpha\tau dx,$$

$$(11)\qquad y'-y=+\int_{s_0}^{s}(\theta'-\theta)dx-\int_{s_0}^{s}\frac{P}{E\Omega}dy+\int_{s_0}^{s}\alpha\tau dy,$$

sans nouvelles constantes arbitraires, car $s=s_0$ correspond à l'extrémité de la pièce, c'est-à-dire à l'un des appuis A, où les coordonnées sont supposées invariables.

Navier obtenait seulement le premier terme du second membre de ces deux équations. C'est le terme qui correspond à la flexion. Le second correspond aux variations de longueur de la fibre moyenne; le troisième, aux variations de la température. La somme de ces termes indique que ces petits effets partiels se composent algébriquement pour former l'effet total. Le principe de la superposition des effets des forces aurait pu conduire directement à poser les équations (10) et (11).

Ces équations renferment la constante introduite par l'intégration dans l'équation (5) ; cette constante est généralement inconnue. De plus, on doit regarder comme inconnue l'une des composantes de la réaction de l'un des appuis. En effet, décomposons les réactions des appuis A et B en deux composantes, l'une horizontale, l'autre verticale. L'équilibre extérieur de la pièce exige trois équations, qui sont fournies par la statique ; trois des composantes peuvent donc s'exprimer en fonction de la quatrième, qui restera dans les questions, et entrera dans l'expression du moment M et de la force P. Il y a, en résumé, deux inconnues à déterminer.

On les déterminera au moyen des équations (10) et (11), en exprimant que la courbe après la déformation passe encore par son second appui fixe B. Si l'on fait s égal à sa plus grande valeur AB, on devra donc trouver

$$x'-x=0 \quad \text{et} \quad y'-y=0.$$

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DE LA COMPOSANTE INCONNUE DE LA RÉACTION, ET DE LA CONSTANTE ARBITRAIRE INTRODUITE PAR L'INTÉGRATION.

FORMULES USUELLES. — TABLES DE M. BRESSE.

216. Nous avons trouvé dans le chapitre précédent les équations :

$$(3) \qquad \theta'-\theta=\int_{s_0}^{s}\frac{M\,ds}{EI}+\beta,$$

$$(10) \qquad x'-x=-\int_{s_0}^{s}(\theta'-\theta)dy-\int_{s_0}^{s}\frac{P}{E\Omega}dx+\int_{s_0}^{s}\alpha\tau dx,$$

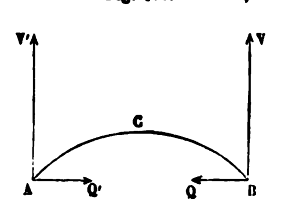
$$(11) \qquad y'-y=+\int_{s_0}^{s}(\theta'-\theta)dx-\int_{s_0}^{s}\frac{P}{E\Omega}dy+\int_{s_0}^{s}\alpha\tau dy.$$

La constante β, introduite par l'intégration dans l'équation (3), est égale à la variation, $\theta'_0 - \theta_0$, de l'angle θ correspondant à l'extrémité de la poutre, ou à $s = s_0$. Cette constante se retrouve dans les deux équations (10) et (11). Les intégrales $\int (\theta' - \theta)\, dy$, $\int (\theta' - \theta) dx$ sont des intégrales doubles; car il faut y remplacer $\theta' - \theta$ par sa valeur déduite de l'équation (3), laquelle est donnée par une intégrale $\int \frac{\mathrm{M}ds}{\mathrm{EI}}$. Mais l'intégration par parties permet de ramener ces intégrales doubles à des intégrales simples.

Outre cette constante β, il y a à déterminer une force inconnue, savoir l'une des composantes de la réaction sur un des deux appuis.

Soit ACB la fibre moyenne d'une pièce courbe contenue dans le plan vertical et posée en A et B sur deux appuis invariables. Les forces appliquées à l'arc ACB sont données de grandeur et de position; elles sont toutes dirigées dans le plan de la figure.

Fig. 195.



Les réactions des points A et B sont inconnues; mais on peut les décomposer chacune suivant deux directions, l'une verticale, l'autre horizontale. Appelons V, V' les composantes verticales, Q, Q' les composantes horizontales.

Soit X la somme des composantes des forces données projetées sur l'horizontale; Y, la somme de leurs composantes projetées sur la verticale, et μ_1, la somme des moments de ces forces par rapport au point A; la statique nous fournit entre les quatre forces inconnues les trois relations

$$\begin{aligned} \mathrm{X} + \mathrm{Q}' - \mathrm{Q} &= 0, \\ \mathrm{Y} - \mathrm{V} - \mathrm{V}' &= 0, \\ \mu_1 - \mathrm{V}l + \mathrm{Q}m &= 0. \end{aligned}$$

Les longueurs l et m représentent, dans la dernière équation, les bras de levier des forces V et Q par rapport au point A, ou les coordonnées du point B par rapport à deux axes, l'un horizontal, l'autre vertical, menés par le même point.

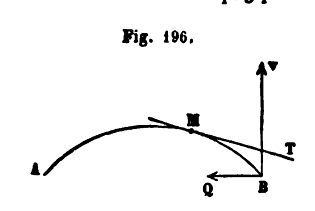
Ces équations permettent d'exprimer trois des quatre inconnues en fonction de la quatrième, qui restera seule en évidence dans l'expression du moment fléchissant M et de la force de compression P.

Il y a donc en définitive deux inconnues à déterminer : la constante β, et l'une des quatre forces V, V', Q, Q'; ces deux inconnues entreront au premier degré dans les équations (10) et (11), et on les déterminera en exprimant que le second appui B de la pièce conserve, après la déformation, la position qu'il occupait avant, ce qui annule à la fois les deux différences $x' - x$, $y' - y$.

217. On peut introduire explicitement dans les équations les composantes V et Q de la réaction de l'un B des appuis.

Soient en effet x_1, y_1 les coordonnées du point B; x, y désigneront toujours les coordonnées du point M dans l'état naturel, et θ l'angle de la tangente MT avec l'axe des x; enfin μ sera le moment par rapport à M des forces extérieures appliquées sur l'arc MB, et N la somme des composantes de ces mêmes forces projetées sur la tangente MT.

Fig. 196.



Nous aurons pour le moment fléchissant au point M

$$M = \mu + Q(y_1 - y) - V(x_1 - x),$$

et pour la pression exercée tangentiellement à l'arc au même point,

$$P = N + Q \cos \theta + V \sin \theta;$$

$y_1 - y$, $x_1 - x$, μ et N sont des fonctions connues de l'angle θ; Q et V sont des constantes inconnues, mais on peut exprimer V en fonction de Q, par l'équation

$$\mu_1 - Vl + Qm = 0,$$

qui donne

$$V = \frac{\mu_1 + Qm}{l}$$

La substitution de cette valeur donnera pour M et P des expressions de la forme :

$$M = a + bQ,$$
$$P = a' + b'Q;$$

où a, b, a', b' représentent des fonctions connues de l'angle θ, et les équations (3) (10) et (11) deviendront :

$$(3) \qquad \theta' - \theta = \int_{s_0}^{s} \frac{a\,ds}{EI} + Q\int_{s_0}^{s} \frac{b\,ds}{EI} + \beta.$$

$$(10) \quad x' - x = -\int_{s_0}^{s} (\theta' - \theta)dy - \int_{s_0}^{s} \frac{a'dx}{E\Omega} - Q\int_{s_0}^{s} \frac{b'dx}{E\Omega} + \int_{s_0}^{s} \alpha\tau dx,$$

$$(11) \quad (y' - y) = +\int_{s_0}^{s} (\theta' - \theta)dx - \int_{s_0}^{s} \frac{a'dy}{E\Omega} - Q\int_{s_0}^{s} \frac{b'dy}{E\Omega} + \int_{s_0}^{s} \alpha\tau dy.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$\int_{s_0}^{s} \frac{a\,ds}{EI} = A, \quad \int_{s_0}^{s} \frac{b\,ds}{EI} = B, \quad \int_{s_0}^{s} \frac{a'dx}{E\Omega} = C,$$
$$\int_{s_0}^{s} \frac{b'dx}{E\Omega} = D, \quad \int_{s_0}^{s} \frac{a'dy}{E\Omega} = E, \quad \int_{s_0}^{s} \frac{b'dy}{E\Omega} = F,$$

et convenons de représenter par les mêmes lettres avec l'indice 1, les valeurs prises par ces fonctions quand on étend les quadratures à l'arc total AB, ou quand on fait $s = s_1$. Observons de plus que

$$\int_{s_0}^{s} \alpha\tau dx \quad \text{et} \quad \int_{s_0}^{s} \alpha\tau dy$$

sont égaux

$$\alpha\tau\int_{s_0}^{s} dx \quad \text{et} \quad \alpha\tau\int_{s_0}^{s} dy,$$

ou à

$$\alpha\tau(x - x_0) \quad \text{et} \quad \alpha\tau(y - y_0).$$

Les intégrales $\int \beta dy$ ou $\int \beta dx$ donnent des résultats analogues.

Nous pourrons donc poser

$$x' - x = -\int_{s_0}^{s} A dy - Q\int_{s_0}^{s} B dy - \beta(y - y_0) - C - QD + \alpha\tau(x - x_0),$$
$$y' - y = +\int_{s_0}^{s} A dx + Q\int_{s_0}^{s} B dx + \beta(x - x_0) - E - QF + \alpha\tau(y - y_0),$$

et faisant $s = s_1$, ce qui rend nulles les différences $x' - x$ et $y' - y$, il vient pour déterminer Q et β les deux équations du premier degré

$$Q\left(\int_{s_0}^{s_1} B dy + D_1\right) + \beta(y_1 - y_0) = \alpha\tau(x_1 - x_0) - \int_{s_0}^{s_1} A dy - C_1,$$

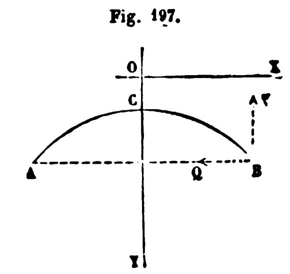
$$Q\left(\int_{s_0}^{s_1} B dx - F_1\right) + \beta(x_1 - x_0) = -\alpha\tau(y_1 - y_0) - \int_{s_0}^{s_1} A dx + E_1.$$

ARCS SYMÉTRIQUES ET SYMÉTRIQUEMENT CHARGÉS.

Dans la plupart des applications, l'arc que l'on veut étudier repose sur deux appuis de niveau, A et B, et est symétrique par rapport à la verticale OY menée à égale distance des appuis. Les équations se simplifient alors notablement, surtout si les forces appliquées à la pièce sont aussi distribuées symétriquement par rapport à la même droite OY.

Supposons donc une poutre AB, symétrique et symétriquement chargée, par rapport à la verticale OY menée à égale distance des appuis A et B. Nous pourrons nous borner à considérer la moitié CB de la pièce. Les forces V et V′ seront égales, comme aussi les forces Q, Q′; donc on pourra déterminer les forces V par l'équation :

Fig. 197.



$$Y - V - V' = 0,$$

qui se réduit alors à

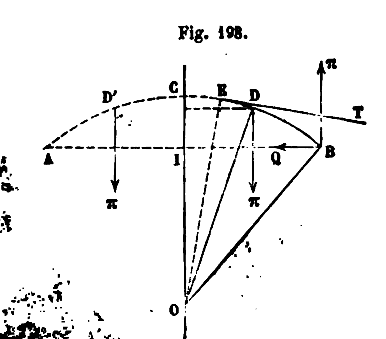
$$2V = Y.$$

Au lieu de prendre les intégrales à partir de la limite s_0, qui correspond à l'extrémité A de la pièce, on pourra les faire commencer au point C; et comme la pièce est symétrique et symétriquement chargée, on sera sûr qu'il n'y aura pas de constante à ajouter à l'équa-

tion (3); car la tangente au point le plus haut de l'arc doit rester horizontale malgré la déformation.

219. Appliquons cette méthode à un arc de cercle ACB, sollicité par deux forces verticales égales à Π, appliquées en deux points D, D', symétriquement placés par rapport à la verticale CO.

Fig. 198.



Soit O le centre, et $OC = OB = \rho$, le rayon de l'arc de cercle ACB.

La composante verticale de la réaction de l'appui B sera égale à Π : la composante horizontale est inconnue.

Prenons sur l'arc CB un point E, compris entre le point C et le point D, où est suspendu le poids Π. L'angle COE sera ce que nous avons appelé θ; l'angle COD, qui correspond au point D, est une valeur particulière de θ, que nous désignerons par la notation θ_1; enfin représentons par φ l'angle total COB. Les angles θ_1 et φ sont des données, tandis que θ est un angle variable.

Formons pour le point E les valeurs du moment M et de la force P.

Le moment M se compose du moment positif de la force Q, et du moment négatif du couple $(\Pi, -\Pi)$; ce qui donne

$$M = Q\rho(\cos\theta - \cos\varphi) - \Pi\rho(\sin\varphi - \sin\theta_1).$$

La force P s'obtient en projetant sur la tangente en E la force Q et le couple Π et $-\Pi$. Le couple ne donnant rien en projection, il reste seulement la projection de la force Q sur la droite ET, laquelle fait avec la direction BI de la force Q un angle égal à COE ou à θ. Donc

$$P = Q\cos\theta.$$

Ces équations ont lieu pour tout point E compris entre le point C et le point D, c'est-à-dire pour toutes valeurs de θ comprises entre 0 et θ_1.

Au delà du point D, les valeurs de M et de P changent, et l'on a, pour $\theta > \theta_1$ et $< \varphi$,

$$M = Q\rho(\cos\theta - \cos\varphi) - \Pi\rho(\sin\varphi - \sin\theta),$$
$$P = Q\cos\theta + \Pi\sin\theta.$$

L'expression de M substituée dans (3) permet de déterminer la variation de l'angle θ.

Pour cela remplaçons, sous le signe *somme*, ds par $\rho d\theta$, et faisons l'intégrale $\int \frac{M\rho d\theta}{EI}$ entre les limites o et θ; il y aura deux cas à distinguer, suivant que la limite supérieure θ de l'intégration est inférieure ou supérieure à la valeur θ_1, pour laquelle le moment M change d'expression analytique.

On aura d'abord entre o et θ_1, en laissant de côté les facteurs constants $\frac{\rho}{EI}$,

$$\int_0^\theta M d\theta = Q\rho \int_0^\theta (\cos\theta d\theta - \cos\varphi d\theta) - \Pi\rho \int_0^\theta (\sin\varphi - \sin\theta_1) d\theta,$$

ou bien

$$\int_0^\theta M d\theta = Q\rho(\sin\theta - \theta\cos\varphi) - \Pi\rho\theta(\sin\varphi - \sin\theta_1).$$

Au delà, c'est-à-dire pour θ compris entre θ_1 et φ, l'intégrale doit se décomposer en deux parties :

$$\int_0^\theta M d\theta = \int_0^{\theta_1} M d\theta + \int_{\theta_1}^\theta M d\theta.$$

La première partie n'est autre chose que la valeur de l'intégrale précédente, quand on y fait $\theta = \theta_1$. La seconde donne

$$Q\rho \int_{\theta_1}^\theta (\cos\theta d\theta - \cos\varphi d\theta) - \Pi\rho \int_{\theta_1}^\theta (\sin\varphi d\theta - \sin\theta d\theta).$$

L'intégrale générale est

$$Q\rho(\sin\theta - \theta\cos\varphi) - \Pi\rho(\theta\sin\varphi + \cos\theta);$$

si l'on y fait $\theta = \theta_1$, elle devient

$$Q\rho(\sin\theta_1 - \theta_1\cos\varphi) - \Pi\rho(\theta_1\sin\varphi + \cos\theta_1),$$

et il faut retrancher cette fonction de l'intégrale générale ; on aura donc, pour $\theta > \theta_1$,

$$\begin{aligned}\int_0^\theta M d\theta = {} & Q\rho(\sin\theta_1 - \theta_1\cos\varphi) - \Pi\rho\theta_1(\sin\varphi - \sin\theta_1),\\ & - Q\rho(\sin\theta_1 - \theta_1\cos\varphi) + \Pi\rho(\theta_1\sin\varphi + \cos\theta_1)\\ & + Q\rho(\sin\theta - \theta\cos\varphi) - \Pi\rho(\theta\sin\varphi + \cos\theta)\end{aligned}$$

ce qui se réduit, en définitive, à l'expression

$$\int_0^\theta M d\theta = \Pi\rho(\cos\theta_1 + \theta_1\sin\theta_1) + Q\rho(\sin\theta - \theta\cos\varphi) - \Pi\rho(\theta\sin\varphi + \cos\theta).$$

Les valeurs des intégrales obtenues doivent être multipliées par le facteur que nous avons laissé de côté tout à l'heure, et nous aurons pour valeur de la déviation angulaire des normales, $\theta' - \theta$,

$$\theta' - \theta = \frac{Q\rho^2}{EI}(\sin\theta - \theta\cos\varphi) - \frac{\Pi\rho^2\theta}{EI}(\sin\varphi - \sin\theta_1)$$

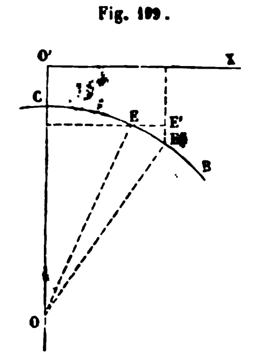
pour toutes valeurs de θ comprises entre o et θ_1, et

$$\theta' - \theta = \frac{Q\rho^2}{EI}(\sin\theta - \theta\cos\varphi) + \frac{\Pi\rho^2}{EI}(\cos\theta_1 + \theta_1\sin\theta_1 - \theta\sin\varphi - \cos\theta)$$

pour toutes les valeurs de θ comprises entre θ_1 et φ.

Si l'on fait $\theta = o$ dans la première de ces équations, on a $\theta' - \theta = o$, parce qu'au point C, à cause de la symétrie, l'arc s'élève ou s'abaisse sans éprouver de déviation angulaire ; et si l'on fait $\theta = \theta_1$ dans les deux formules, elles donnent la même valeur pour $\theta - \theta'$, ce qui doit être, puisque les deux tronçons de la pièce doivent, après comme avant la déformation, se raccorder tangentiellement au point D.

Fig. 109.



Il faut maintenant chercher la poussée horizontale Q ; pour cela, nous calculerons $x' - x$ au moyen de l'équation (10), en y remplaçant dy, ou E'E'', par $\rho \sin\theta d\theta$, et dx, ou EE', par $\rho\cos\theta d\theta$; de sorte qu'il viendra

$$x' - x = -\rho\int_0^\theta (\theta' - \theta)\sin\theta d\theta - \rho\int_0^\theta \frac{P}{E\Omega}\cos\theta d\theta + \rho\int_0^\theta \alpha\tau\cos\theta d\theta.$$

Nous n'avons pas de constante à ajouter, parce que, bien que l'origine C des intégrales ne soit pas fixe, nous savons qu'elle se déplace le long de l'axe CY, ce qui n'altère pas l'x du point de départ.

Il faudra, comme précédemment, distinguer deux cas : celui de $\theta < \theta_1$, et celui de $\theta > \theta_1$.

Dans les deux cas, le terme $\rho\int_0^\theta \alpha\tau\cos\theta d\theta$ qui correspond à la variation de température, donne pour résultat $\rho\alpha\tau\sin\theta$.

Le calcul est ramené aux quadratures suivantes :

1° Pour $\theta < \theta_1$,

$$x' - x = -\frac{Q\rho^3}{EI}\int_0^\theta (\sin\theta - \theta\cos\varphi)\sin\theta d\theta + \frac{\Pi\rho^3}{EI}\int_0^\theta \theta(\sin\varphi - \sin\theta_1)\sin\theta d\theta$$
$$- \frac{Q\rho}{E\Omega}\int_0^\theta \cos^2\theta d\theta + \rho\alpha\tau\sin\theta.$$

Si, dans cette expression, on fait $\theta = \theta_1$, on aura pour $x' - x$ une certaine valeur Θ_1 qui sera la valeur de passage du premier au second tronçon ; de sorte que l'intégrale relative à ce second tronçon doit donner cette même valeur Θ_1 pour $\theta = \theta_1$.

2° Pour $\theta > \theta_1$ et $< \varphi$, on aura donc :

$$\begin{aligned}
x' - x = & - \frac{Q\rho^3}{EI}\int_{\theta_1}^{\theta} (\sin\theta - \theta\cos\varphi)\sin\theta d\theta \\
& - \frac{\Pi\rho^3}{EI}\int_{\theta_1}^{\theta} (\cos\theta_1 + \theta_1\sin\theta_1 - \theta\sin\varphi - \cos\theta)\sin\theta d\theta \\
& - \frac{Q\rho}{E\Omega}\int_{\theta_1}^{\theta} \cos^2\theta d\theta - \frac{\Pi\rho}{E\Omega}\int_{\theta_1}^{\theta} \sin\theta\cos\theta d\theta \\
& + \rho\alpha\tau\sin\theta + \Theta_1 - \rho\alpha\tau\sin\theta_1.
\end{aligned}$$

Toutes les intégrations indiquées peuvent se faire facilement, et donnent la valeur générale de $x' - x$ pour un point quelconque de l'arc CB. On remarquera que, dans ces formules, l'inconnue Q entre au premier degré. Si dans la seconde formule on fait $\theta = \varphi$, on devra trouver la variation $x' - x$ correspondante au point B qui est supposé fixe. On égalera donc cette variation à zéro, et l'on aura une équation du premier degré qui donnera la poussée horizontale Q.

Le calcul est long, mais il ne présente aucune difficulté; nous nous bornerons à cette indication, en renvoyant à l'ouvrage de M. Bresse pour le développement des opérations.

Connaissant la poussée Q, on aura toutes les forces qui agissent sur l'arc donné; on pourra donc calculer numériquement les valeurs des efforts A, P, et du couple M; et par suite déterminer en chaque point la charge supportée par la matière, ce qui est le point le plus intéressant pour le constructeur.

220. La même méthode est applicable au cas où l'arc serait sollicité par deux forces horizontales H, H' égales, contraires, et appliquées en deux points D, D', symétriques l'un de l'autre. On pourra donc toujours trouver les valeurs de la poussée Q, dans le cas d'un arc symétrique et symétriquement chargé; car il suffit de décomposer les charges, quelles qu'en soient les directions, en deux composantes, l'une verticale, Π, l'autre horizontale H; ces composantes seront deux à deux groupées symétriquement, et si l'on calcule, par les formules convenables, les poussées partielles dues

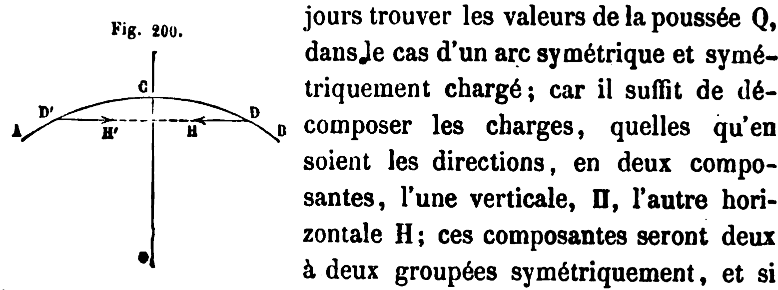


Fig. 200.

à chaque groupe de deux forces Π, et les poussées partielles dues à chaque groupe de deux forces H, la poussée totale s'obtiendra en faisant la somme algébrique des poussées partielles ainsi obtenues. Il est bien entendu que le terme relatif à la variation de température ne doit figurer qu'une fois dans cette suite d'opérations.

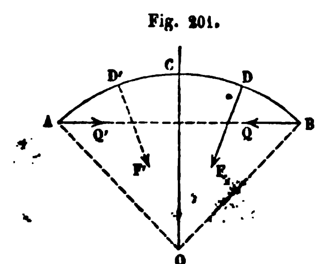
Nous n'avons pas fait usage de l'équation qui donne la variation $y - y'$; cette équation nous ferait connaître la variation de la flèche de l'arc, ou l'abaissement positif ou négatif du point C.

ARCS SYMÉTRIQUES NON SYMÉTRIQUEMENT CHARGÉS

221. Supposons que la symétrie existe dans l'arc, mais non dans la répartition des charges; alors la méthode que nous venons d'esquisser ne semble plus applicable. On peut cependant y ramener le problème.

Soit F une force appliquée en un point D; appelons Q la poussée horizontale au point B, Q' la poussée horizontale au point A, qui résultent de l'action de cette force. A cause de la non-symétrie, ces deux poussées seront généralement différentes.

Fig. 201.



Imaginons qu'au point D', symétrique de D, on applique une force F', égale à F et dirigée symétriquement; cette force F' développera au point B une poussée horizontale égale à Q', et au point A une poussée égale à Q.

L'ensemble symétrique des forces F et F' agissant simultanément produira donc en A et B deux poussées égales à la somme $Q + Q'$, et les formules des charges symétriques nous font connaître par suite cette force $Q + Q'$.

Mais la statique nous donne la différence entre Q et Q'; en effet, projetons la force F sur l'axe AB et soit X sa projection; nous aurons l'équation

$$Q' - X - Q = 0.$$

Donc

$$Q' - Q = X.$$

On connaît donc la différence $Q' - Q$, et la somme $Q + Q'$; et par suite il est aisé de calculer Q et Q'.

FORMULES APPROXIMATIVES DONNANT LA VALEUR DE LA POUSSÉE HORIZONTALE DANS LES CAS LES PLUS USUELS.

222. On trouvera, dans l'ouvrage de M. Bresse, une étude analytique complète des problèmes dont nous nous bornons ici à indiquer la solution. Après avoir obtenu les formules exactes, M. Bresse les a réduites à des formes simples et d'une facile application; il a ensuite construit des tables numériques qui dispensent de recourir aux formules. Nous allons résumer les principaux résultats obtenus dans cette partie de son travail.

L'arc ACB est un arc de cercle dont le centre est au point O. Les deux appuis A et B sont de niveau. Les données de la question sont :

Fig. 202.

la corde $AB = 2a$,
la flèche $IC = f$.

On en déduit le rayon $OC = OA = OB = \rho$.

L'angle COB, moitié de l'angle au centre correspondant à l'arc entier, est représenté par la lettre φ.

223. — 1er Cas. — L'arc est sollicité par un poids unique Π, donné de grandeur, et appliqué en un point E, défini par l'angle $COE = \theta_1$.

On demande quelle poussée horizontale Q le poids Π considéré seul produit sur l'appui B ou sur l'appui A; ces deux poussées sont égales, car leur différence est égale à la composante horizontale de la force Π, laquelle est nulle, puisque cette force est verticale.

La formule à laquelle est parvenu M. Bresse est la suivante (1) :

$$(a)\quad Q = \Pi \frac{\frac{1}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\theta_1) + \cos\varphi(\cos\theta_1 + \theta_1\sin\theta_1 - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi) - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\theta_1)}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}$$

La quantité r est le rayon de giration de la section transversale de l'arc; en d'autres termes $r^2 = \frac{I}{\Omega}$.

224. — 2° Cas. — *Poussées* Q *et* Q' *produites aux points* A *et* B, *par une force horizontale* S *appliquée en* E *à l'arc* ACB *;*

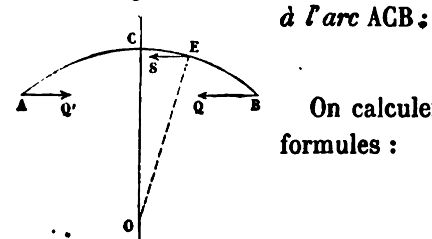


Fig. 203.

$$C'OE = \theta_1.$$

On calculera les poussées Q et Q' par les formules :

$$Q + Q' = Q_1,$$
$$Q' - Q = S.$$

Q_1 est la poussée correspondante à un groupe symétrique de deux forces égales à S, appliquées aux points E et E'. On trouve (2) pour Q_1 la valeur suivante

$$(b)\quad Q_1 = 2S \frac{\frac{1}{2}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cos\varphi + \theta_1\cos\theta_1\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi(\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_1)}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}$$

225. — 3° Cas. — *Poussée due à un changement de température.* Cette poussée est d'autant plus importante que l'arc est plus surbaissé (3).

$$(c)\quad Q = \frac{2E\Omega\alpha\tau\sin^2\varphi\,\frac{r^2}{a^2}}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi + \frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)};$$

---

(1) *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, chapitre IV, page 160, formule (13).

(2) *Ibid.* page 161, formule (14).

(3) *Ibid.* page 163, formule (16). Au lieu du produit EΩ, M. Bresse introduit dans la formule une lettre ε qui représente la somme ΣEω, étendue à tous les éléments de la section, pour comprendre le cas où l'élasticité varierait d'un point à l'autre.

α est le coefficient de dilatation, τ le nombre de degrés qui mesure la variation de température, E est le coefficient d'élasticité. La même formule s'applique à toute autre variation de longueur de la pièce, produite, par exemple, par le calage; il suffirait d'y remplacer le produit $\alpha\tau$ par l'allongement relatif de la fibre moyenne.

226. — 4° Cas. — *Poussée due à une charge continue, répartie uniformément suivant la longueur de l'arc* (1).

Soit p le poids appliqué à l'unité de longueur de la fibre moyenne. La poussée correspondante Q sera donnée par la formule

$$(d)\quad Q = 2p\rho\varphi\,\frac{\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\cos^2\varphi-\varphi\sin\varphi\cos\varphi+\frac{9}{4}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi-\frac{1}{2}\frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi\left(\sin^2\varphi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi\right)}{\varphi+2\varphi\cos^2\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi+\frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)}$$

227. — 5° Cas. — *Poussée produite par une charge également répartie en projection horizontale* (2).

p, poids également réparti.

$$(e)\quad Q = 2pa\,\frac{-\frac{1}{4}+\frac{7}{12}\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi-\frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi-\frac{1}{3}\frac{r^2}{a^2}\sin^4\varphi}{\varphi+2\varphi\cos^2\varphi-3\sin\varphi\cos\varphi+\frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)}.$$

228. M. Bresse a repris ces diverses formules, pour les réduire à une forme pratique; le § III du chapitre IV de ses *Recherches analytiques* est consacré à ces réductions, dont nous ne pouvons ici que faire connaître les résultats définitifs.

Formule (a).

La formule (a), relative à la poussée due à un poids isolé, peut se mettre sous la forme :

$$Q = \Pi\,\frac{A}{B}\times\frac{1-\lambda\frac{r^2}{a^2}}{1+\lambda'\frac{r^2}{a^2}},$$

(1) *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, chapitre IV, p. 167, formule (17).

(2) *Ibid.* p. 168, formule (18).

en posant

$$A = \frac{1}{2}(\sin^2\varphi - \sin^2\theta_1) + \cos\varphi(\cos\theta_1 + \theta_1 \sin\theta_1 - \cos\varphi - \varphi\sin\varphi),$$
$$B = \varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\varphi(\sin^2\varphi - \sin^2\theta_1)}{A},$$
$$\lambda' = \frac{\sin^2\varphi(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)}{B}.$$

Cette dernière expression est une fonction de la variable unique φ.

Le rapport $\frac{r^2}{a^2}$ étant toujours très-petit, on regardera l'équation approximative

$$Q = \Pi \times \frac{A}{B}$$

comme donnant la portion principale de la force Q, et l'autre facteur comme un coefficient de correction d'une importance secondaire.

M. Bresse a développé en série diverses valeurs du rapport $\frac{A}{B}$, et a construit une table à double entrée, donnant les valeurs de ce rapport, pour les valeurs du rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$, de centièmes en centièmes, depuis 0,12 jusqu'à l'unité; et pour les valeurs du rapport $\frac{\theta_1}{\varphi}$, de 0,05 en 0,05, depuis 0 jusqu'à l'unité; le rapport $\frac{A}{B}$ s'annule pour $\theta_1 = \varphi$ (1).

Le résultat donné par l'équation approximative $Q = \Pi \times \frac{A}{B}$, doit être multiplié par la fraction

$$\frac{1 - \lambda\frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda'\frac{r^2}{a^2}}.$$

(1) Nous donnons, planche I, fig. 1, un tableau graphique qui peut tenir lieu de cette table.

La discussion des valeurs de λ et de λ' a conduit M. Bresse à reconnaître :

1° Que l'on pouvait substituer au numérateur de la fraction la différence

$$1 - \left(\frac{\sin\varphi}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)}\right)^2 \frac{r^2}{a^2};$$

ou, plus simplement encore, l'unité;

2° Que la valeur moyenne du dénominateur

$$1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$$

est égale à

$$1 + \frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2},$$

et que cette valeur moyenne diffère peu des valeurs extrêmes. Il résulte de là que la formule pratique peut être ramenée à la forme simple :

$$Q = \Pi \times \frac{A}{B} \times \frac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2}}.$$

L'omission du dernier facteur pourrait, dans certains cas, entraîner à des erreurs sensibles.

La table III de M. Bresse, donne d'ailleurs des valeurs approximatives des coefficients λ et λ' pour les diverses valeurs du rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$ (1). Le coefficient λ contenant l'angle θ_1, on n'a pu introduire dans la table que la moyenne des valeurs de λ correspondante à chaque angle φ. Ce coefficient est d'ailleurs toujours très-petit, et il est loin d'avoir l'importance du coefficient λ' qui entre dans le dé-

---

(1) Voir planche II, courbes des λ et des λ'.

nominateur. Une autre table, la table IV (1), donne les valeurs du rapport

$$\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$$

en fonction des rapports $\frac{2\varphi}{\pi}$ et $\frac{r^2}{a^2}$.

Formule (*b*). — Cette formule, qui est relative aux actions horizontales, est peu utile dans les applications, et M. Bresse ne l'a pas réduite en table.

Formule (*c*). — La formule (*c*) donne la poussée partielle due à une variation de température de τ degrés centigrades, α étant le coefficient de dilatation de la matière de l'arc.

M. Bresse l'a réduite à la forme très-simple

$$Q = \frac{\alpha\tau E\Omega r^2}{r^2 + \frac{8}{15} f^2}.$$

L'emploi de cette formule approximative, pour des arcs en fer ou en fonte, ne peut entraîner une erreur plus grande que $0^{kil},02$ par millimètre carré, ce qui est négligeable.

On remarquera que cette formule contient le coefficient d'élasticité E.

L'emploi des tables peut suppléer à cette formule. La quatrième colonne de la table II fournit, en fonction du rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$, une valeur que M. Bresse appelle le coefficient F de la partie principale de la poussée (2) ; on doit multiplier ce coefficient par le produit $E\Omega\alpha\tau \times \frac{r^2}{a^2}$, puis ensuite par la fraction $\frac{1}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$, que la table III

(1) Le tableau graphique figure 2 de la planche I peut en tenir lieu.

(2) Voir planche II, courbe des F.

permet de calculer, ou que la table IV fait approximativement connaître.

Formule (*d*). — Poids également réparti suivant la longueur de l'arc.

La formule peut se mettre sous la forme :

$$Q = 2p\rho\varphi \times m = 2p\rho\varphi \times F' \times \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}.$$

La fraction

$$\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}},$$

qui peut se réduire approximativement à

$$\frac{1}{1 + \frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2}},$$

peut aussi se calculer, soit au moyen de la table III, soit à l'aide de la table IV.

Le facteur F', réduit en série par M. Bresse, a été calculé et introduit dans la seconde colonne de la table II (1).

Formule (*e*). — Poids également réparti suivant l'horizontale. On peut mettre la formule sous la forme :

$$Q = 2pa \times n = 2pa \times F'' \times \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}.$$

et le facteur F'' se trouve calculé en fonction du rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$ dans la seconde colonne de la table II (2).

M. Bresse a calculé en tout cinq tables. Nous avons défini les trois

(1) Planche II, courbe des F'.
(2) Planche II, courbe des F''.

premières; la table IV donne, comme nous l'avons vu, les coefficients de correction

$$\frac{1-\lambda\frac{r^2}{a^2}}{1+\lambda'\frac{r^2}{a^2}},$$

en fonction du rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$, et des valeurs de $\frac{r^2}{a^2}$; celles-ci varient de 0,0005 à 0,0025.

La dernière table, ou la table V, donne les éléments du calcul de la pression maximum dans un arc circulaire à section constante, uniformément chargé suivant l'horizontale. Elle est à double entrée; les arguments de la table sont le rapport $\frac{2\varphi}{\pi}$, et le rapport $\frac{h}{a}$ de la hauteur de la section à la demi-portée de l'arc.

Les formules (d) et (e) sont les plus utiles de toutes; on peut les ramener à une forme très-simple, qui donne des résultats suffisamment approximatifs pour de petites valeurs du rapport $\frac{f}{a}$.

(d). *Poussée produite par une charge également répartie le long de la fibre moyenne :*

$$Q=p\rho\varphi\times\frac{a}{2f}\times\frac{1-\frac{3}{7}\frac{f^2}{a^2}}{1+\frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2}}.$$

(e) *Poussée produite par une charge également répartie en projection horizontale :*

$$Q=\frac{pa^2}{2f}\times\frac{1-\frac{1}{7}\frac{f^2}{a^2}}{1+\frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2}}.$$

Abstraction faite du second facteur, cette formule est celle qui donne la tension horizontale dans la chaîne d'un pont suspendu, ayant une portée égale à $2a$ et une flèche égale à f. La poussée horizontale d'un arc rigide est donc moindre que la tension horizontale d'une chaîne flexible dans les mêmes conditions de poids, de flèche et de portée totale.

229. Les formules qu'on vient de poser permettent de déterminer les valeurs de la poussée horizontale d'un arc courbe, et cette donnée suffit pour achever l'étude de la distribution des efforts dans la matière. On peut en effet déterminer pour chaque point de la fibre moyenne les valeurs des forces P, A, et du couple M; la charge de la matière sera donnée ensuite, en un point quelconque de la section correspondante, par les formules

$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mv}{I},$$
$$R' = \frac{A}{\Omega},$$

en désignant par R la pression normale à la section transversale, et par R' la résistance moyenne à l'effort tranchant.

Ces formules se prêtent à une représentation géométrique. Pour cela, on développera en ligne droite la fibre moyenne de l'arc à étudier; on prendra cette droite pour axe des abscisses, et on élèvera perpendiculairement des ordonnées proportionnelles aux valeurs correspondantes de R; il convient d'attribuer à v ses deux valeurs extrêmes, l'une positixe, l'autre négative. Si de plus on emploie la valeur $v = o$, on aura la courbe des valeurs de $\frac{P}{\Omega}$, ou la courbe des pressions moyennes réalisées tout le long de la fibre neutre. Une quatrième courbe donnera les valeurs de $\frac{A}{\Omega}$.

Ces courbes tracées, on y découvrira sans peine les points où les ordonnées sont les plus grandes; les abscisses de ces points donneront les positions des sections transversales où les efforts atteignent leurs plus hautes valeurs.

On peut aussi traiter la question par le calcul, en étudiant dans les limites convenables les variations des fonctions R et R', qui sont exprimées au moyen de l'angle θ ou de l'arc s. Dans cette discussion il ne faut pas perdre de vue que les valeurs limites cherchées ne correspondent pas nécessairement à des *maxima* ou des *minima* analytiques des fonctions R et R', lesquelles ne sont définies, en effet, qu'entre des valeurs déterminées de la variable indépen-

dante, et ne sont pas nécessairement continues dans ces intervalles. Pour un arc symétrique, par exemple, les limites de θ sont $-\varphi$ et $+\varphi$, et tout ce que donne l'analyse en dehors de ces limites est étranger à la question particulière qu'on veut traiter. Il résulte de là que les *maxima* ou les *minima* des R peuvent correspondre aux valeurs extrêmes de θ, ou bien à des points anguleux de la ligne qui en représente les valeurs successives, c'est-à-dire à des points où la tangente à la courbe de R n'est pas parallèle à l'axe des abscisses. La construction des courbes met, du reste, en évidence toutes ces particularités (1).

Le dernier chapitre des *Recherches analytiques* de M. Bresse est consacré à la détermination des sections les plus fatiguées dans un arc circulaire. La table V facilite les calculs à faire pour résoudre la question.

Enfin, connaissant la force Q et la constante β, on aura tout ce qu'il faut pour calculer les différences $\theta' - \theta$, $x' - x$, $y' - y$, c'est-à-dire pour chercher la déformation de l'arc sous l'action des forces données.

RÉSUMÉ DES MÉMOIRES DE M. ALBARET.

230. Dans un mémoire inséré au tome II des *Annales des ponts et chaussées*, année 1861, M. Albaret a étudié avec beaucoup de soin l'influence de la variation de section des arcs métalliques. Voici les principales conclusions de son travail.

1° Dans les arcs à section constante, le point le plus fatigué est situé à l'extrados à la clef, toutes les fois que le rapport, $\frac{f}{2a}$, de la flèche à l'ouverture, est inférieur à $\frac{1}{8}$; il est situé, soit à l'extrados à la clef, soit à l'intrados vers les reins, lorsque le rapport $\frac{f}{2a}$ est com-

(1) Sur la *recherche des tensions maxima produites dans un arc métallique par un poids uniformément réparti suivant la corde*, V. dans les *Annales des ponts et chaussées*, septembre 1876, article n° 41, une note de M. Vigan, ingénieur des ponts et chaussées.

pris entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{5}$; enfin, il est toujours situé à l'intrados vers les reins lorsque $\frac{f}{2a}$ est supérieur à $\frac{1}{5}$.

2° L'emploi de sections variables d'un point à l'autre de l'arc permet, à l'égalité de résistance, d'économiser un certain poids de métal. Pour les arcs surbaissés, il y a lieu de reporter vers l'extrados une partie du métal de l'intrados, en détruisant la symétrie de la section par rapport à l'horizontale menée par son centre de gravité; l'excès de matière doit être au contraire porté vers l'intrados pour les arcs se rapprochant du plein cintre. Du reste, les applications numériques montrent que l'économie réalisée par la substitution de sections variables aux sections constantes est moins importante pour les poutres en arc que pour les poutres droites; résultat qui doit être attribué à ce que la forme en arc répartit les efforts dans les diverses sections de la poutre plus également que ne le fait la forme droite.

3° M. Albaret a comparé entre eux trois types principaux d'arcs métalliques : le premier est un arc dont la hauteur est constante et la section partout la même; le second a la même hauteur partout, mais la section est renforcée des naissances vers la clef; le troisième a une hauteur graduellement décroissante des naissances à la clef, avec une section croissante. Le second type est le plus avantageux pour les arcs dans lesquels le rapport $\frac{f}{2a}$ est inférieur à $\frac{1}{8}$; le troisième convient particulièrement aux arcs dans lesquels $\frac{f}{2a}$ est plus grand que $\frac{1}{5}$, et l'adoption de ce type peut conduire alors à une économie d'une certaine importance. Enfin, pour les arcs dont le surbaissement $\frac{f}{2a}$ est compris entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{5}$, la forme de l'arc paraît à peu près indifférente.

Tous ces résultats supposent que les charges qui pèsent sur l'arc sont également réparties dans toute l'étendue de la portée. M. Al-

baret ne s'est pas contenté de cette première hypothèse : il a publié, dans le tome IV des *Annales* (année 1862), un second mémoire où il apprécie l'influence des charges incomplétement réparties. Nous ne pouvons que renvoyer ici à cet important travail. Les résultats sont très-significatifs ; les surcharges appliquées à la totalité de la portée ne correspondent pas au plus grand effort subi par la matière, et, pour prévoir les cas les plus défavorables, il faut calculer les valeurs de R en différents points de l'arc pour des surcharges incomplétement réparties. Dans la pratique, on peut supposer ordinairement que ces surcharges incomplètes s'étendent à toute une moitié de la portée. L'emploi des sections variables, loin de corriger les inégalités d'efforts produites par la distribution des charges, peut, dans certains cas, accroître ces inégalités. A ce point de vue, l'uniformité de la section paraît une règle assez sage à suivre.

Une fois la section calculée dans l'hypothèse d'une charge complète, on l'augmentera de 15 à 20 p. 100, pour tenir compte de l'influence des charges inégales, sauf à vérifier ensuite, par le calcul et la construction des épures, si la section ainsi amplifiée suffit aux efforts qu'elle peut être appelée à supporter.

Dans un troisième mémoire, qui a paru dans le cahier des *Annales* de décembre 1870, M. Albaret a rendu compte des études auxquelles il s'était livré à l'occasion des ponts en arcs surbaissés construits sur la ligne d'Alger à Oran. Les conclusions de ce dernier travail font ressortir la grande influence de la hauteur de la section de l'arc sur la raideur de la construction, et l'influence non moins considérable de la rigidité des tympans. M. Albaret conseille d'observer les déformations des arcs sous les charges d'épreuve plutôt aux reins qu'à la clef : méthode déjà proposée par M. Darcel. Enfin le mémoire contient une comparaison instructive des arcs en fer avec les arcs en fonte. Contrairement à l'opinion qui dominait il y a une trentaine d'années, M. Albaret n'hésite pas à préférer le fer, qui donne plus de raideur que la fonte, même à poids plus faible.

Ce mémoire contient des formules empiriques qui font connaître le poids propre des divers ponts étudiés par l'auteur. Ces for-

mules rentrent toutes dans la forme

$$P = Al^3 + Bl^2 + Cl + D,$$

P étant le poids total du pont en kilogrammes, l la portée en mètres, et A, B, C, D, des coefficients variables suivant les cas. Voici le résumé de cette partie du travail de M. Albaret :

I. Ponts à poutres droites :
1° à deux voies, travées isolées,
- au-dessous de 4 mèt., $P = 950l + 700$,
- de 4 à 10 mèt., $P = 120l^2 + 650l$,
- de 10 à 25 mèt., $P = 103l^2 + 820l$,
- de 25 à 80 mèt., $P = 0,32l^3 + 40l^2 + 2200l$,

travées solidaires, de 25 à 80 mèt., $P = 0,30l^3 + 37l^2 + 2200l$,
(*l*, *portée moyenne*);

2° à une voie, travées isolées,
- au-dessous de 4 mèt., $P = 540l + 410$,
- de 4 à 10 mèt., $P = 68l^2 + 370l$,
- de 10 à 25 mèt., $P = 61l^2 + 440l$,
- de 25 à 80 mèt., $P = 0,19l^3 + 37l^2 + 930l$,

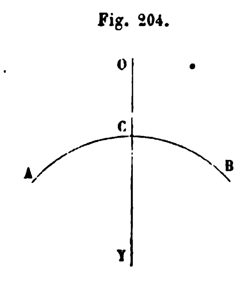
travées solidaires, de 25 à 80 mèt., $P = 0,17l^3 + 35l^2 + 930l$,
(*l*, *portée moyenne*).

II. Ponts en arc de cercle, à une voie,
- en fer, de 25 à 50 mèt., $P = 33l^2 + 790l$.
- en fonte, *idem* $P = 44l^2 + 1330l$.

MÉTHODE RAPIDE POUR LE CALCUL DES PIÈCES COURBES.

231. Supposons qu'il s'agisse de construire un arc qui franchisse un débouché AB, et qu'on veuille donner à la fibre moyenne une forme ACB déterminée. On simplifiera le problème en admettant que, dans la section transversale moyenne, c'est-à-dire dans la section faite par le plan vertical OY, mené perpendiculairement à la courbe ACB, le moment fléchissant soit nul. Cette hypothèse revient à admettre que les deux parties AC, CB de l'arc reposent l'une sur l'autre au point C, en se comprimant mutuellement, et sont comme articulées l'une avec l'autre (1). La relation mutuelle des deux parties AC, CB, sera donc

Fig. 204.



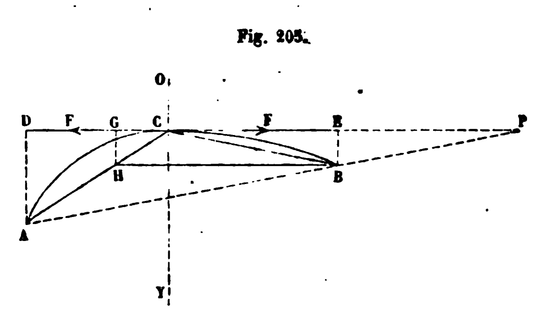
(1) Dans certains ponts récemment construits, on a introduit une articulation à la

une force dirigée suivant une certaine droite passant par le point C; les réactions des appuis sont des forces passant par les points A et B; si l'on connaît la distribution des forces appliquées à l'arc, de A en C et de C en B, on peut déterminer par la simple géométrie les réactions inconnues.

Nous supposons ici, pour plus de généralité, qu'il n'y ait symétrie ni dans le tracé de l'arc, ni dans l'application des surcharges.

Par le point C menons une droite DE, pour représenter la direction des réactions mutuelles des deux parties de la pièce courbe. La direction DE est jusqu'ici inconnue.

Fig. 205.



Considérons les forces données appliquées sur la partie AC de l'arc; les moments de ces forces, pris par rapport au point A, donneront une certaine somme connue, M; et comme il y a équilibre par hypothèse entre les forces extérieures de A en C, la réaction de la seconde partie de l'arc, dirigée suivant CD, et la réaction de l'appui A, qui passe en ce point A, on a, en appelant F la force inconnue dirigée suivant CD, et en abaissant la perpendiculaire AD du point A sur la droite DE,

$$F \times AD = M.$$

Appelons M' la somme des moments des forces appliquées sur la partie CD, par rapport au point B; nous aurons de même, en abaissant du point B une perpendiculaire BE sur CE,

$$F \times BE = M'.$$

Donc

$$\frac{AD}{BE} = \frac{M}{M'}.$$

---

clef, de manière à supprimer tout moment fléchissant dans cette section. On en voit des exemples sur le chemin du Nord, et sur la rigole d'alimentation du canal de l'Aisne à la Marne.

La question est donc ramenée à mener par le point C une droite telle, que le rapport de ses distances AD, BE, à deux points donnés A et B, soit égal à un rapport donné $\frac{M}{M'}$.

Il suffit, pour résoudre le problème, de mener la droite AB, et de prendre sur son prolongement un point P tel que $\frac{PA}{PB} = \frac{M}{M'}$, puis de joindre PC, qui sera la droite cherchée. Mais cette construction sera en général peu commode, parce que le point P est trop éloigné. Il faut alors recourir à la construction suivante.

Joignons AC, puis déterminons sur cette droite un point H, tel qu'on ait la proportion

$$\frac{CH}{CA} = \frac{M'}{M}.$$

Du point H, abaissons HG perpendiculairement sur CD ; nous aurons

$$\frac{HG}{AD} = \frac{CH}{CA} = \frac{M'}{M},$$

Mais, par hypothèse,

$$\frac{EB}{AD} = \frac{M'}{M}.$$

Donc HG=EB, et par suite la droite DE est parallèle à la droite BH, qui est connue de position.

On pourra donc tracer la droite DE; alors la distance AD sera connue, et on en déduira la valeur de la réaction F par l'équation

$$F \times AD = M.$$

La force F, décomposée en C suivant l'horizontale et suivant la verticale, donnera les valeurs de la force de compression P et de l'effort tranchant A dans le plan de la clef de l'arc.

S'il y a symétrie géométrique et symétrie des charges par rapport

au plan vertical OY, les moments M, M′ étant égaux, et les droites CB, CA égales, le point H coïncide avec le point A, et la réaction à la clef de l'arc est horizontale.

Dans ce cas, si on ajoute que les charges se réduisent à des poids également répartis suivant l'horizontale, à raison de p unités de poids par unité de longueur, la force F sera égale à $\frac{pa^2}{2f}$, en appelant $2a$ la portée AB, et f la flèche de l'arc, ou la quantité CI. C'est la tension horizontale dans la chaîne des ponts suspendus. Nous avons vu que l'analyse conduisait pour les arcs surbaissés à la formule

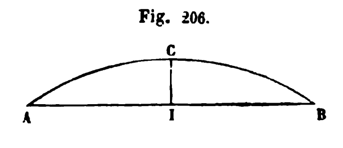


Fig. 206.

$$Q = \frac{pa^2}{2f} \frac{1 - \frac{1}{7}\frac{f^2}{a^2}}{1 + \frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2}}.$$

La méthode rapide que nous venons d'indiquer, et qui consiste à admettre qu'il n'y a pas de moment fléchissant pour le point C, nous donne le facteur $\frac{pa^2}{2f}$, en laissant de côté le facteur correctif

$$\frac{1 - \frac{1}{7}\frac{f^2}{a^2}}{1 + \frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2}}.$$

En donnant à un arc surbaissé la forme parabolique, on peut faire en sorte que le moment fléchissant soit nul en tout point, pour une charge également répartie par unité de longueur horizontale. La résistance à la flexion n'est alors mise en jeu que pour des charges incomplètes ou discontinues.

La méthode de recherche que nous venons d'employer nous servira plus tard à l'étude de l'équilibre des voûtes.

CALCUL SOMMAIRE DE LA SECTION D'UN ARC SYMÉTRIQUE ET SYMÉTRIQUEMENT CHARGÉ.

232. Le calcul de l'établissement d'un arc métallique suppose connu le poids propre de cet arc, tandis que ce poids ne peut être déterminé avec exactitude que lorsqu'on a fixé la section de la pièce d'après les efforts auxquels elle est soumise. Après avoir pris arbitrairement une première valeur de la section, et en avoir déduit le poids de l'arc, qu'on fait entrer dans le calcul de la poussée, on applique les formules de répartition des efforts, et on reconnaît si la section doit être modifiée en plus ou en moins. On abrége ces tâtonnements en partant d'une valeur de la section voisine de sa valeur définitive. Pour trouver cette valeur, voici quelle marche on peut suivre.

Soit Ω la surface de la section, supposée uniforme; occupons-nous seulement de la compression produite dans les diverses sections par la composante P normale à leur plan; le maximum de cette compression a lieu aux naissances. Appelons φ le demi-angle au centre de la pièce courbe. La réaction de l'appui se décompose en deux forces : l'une, Q, est la poussée horizontale, qui fait, avec la normale à la section d'appui, un angle égal à φ; l'autre, pa, est verticale et égale au poids du demi-arc; elle fait avec la normale à la section d'appui un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$. La compression normale sur l'appui est donc

$$Q \cos \varphi + pa \sin \varphi,$$

et, par suite, la pression moyenne sur l'unité de surface correspondante à cette action a pour valeur

$$R'' = \frac{Q \cos \varphi + pa \sin \varphi}{\Omega}.$$

Cette quantité R″ peut être fixée d'avance; en effet, elle s'ajoute algébriquement dans les diverses sections à la pression variable $\frac{Mv}{I}$, produite par le moment fléchissant; mais l'influence de ce second terme peut être réduite à volonté, en disposant convenablement de la forme de la section, d'où dépend le dénominateur I, sans altérer d'ailleurs la surface Ω.

On peut donc admettre, au moins à titre provisoire, que l'arc sera dans de bonnes conditions de résistance, si l'on fixe d'avance la limite R″, à une certaine fraction, les $\frac{2}{3}$, par exemple, de la limite R; on fera donc $R'' = 4\,000\,000$, si $R = 6\,000\,000$ est la limite adoptée pour la résistance du métal. On aura alors pour déterminer Ω l'équation

$$R''\Omega = Q\cos\varphi + pa\sin\varphi,$$

dans laquelle R″ est supposé connu.

Pour trouver la valeur de Q, on prendra la formule approximative $Q = \frac{pa^2}{2f}$, qui correspond à une charge p uniformément répartie le long de la corde, et cette hypothèse donnera

$$R''\Omega = pa \times \frac{a\cos\varphi + 2f\sin\varphi}{2f}.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer le poids p, ou plutôt le poids $2pa$, qui représente la charge complète.

Or ce poids comprend : 1° le poids de l'arc, qu'on peut représenter par le produit $\Omega \times 2S \times q$, en appelant 2S la longueur de la fibre moyenne et q le poids spécifique du métal ; à la vérité, ce poids n'est pas réparti également suivant la corde, comme le suppose la formule $Q = \frac{pa^2}{2f}$; mais l'erreur qui résulte de cette fausse supposition est peu importante, surtout si le rapport $\frac{f}{2a}$ est très-petit.

2° le poids des accessoires de l'arc, tympans, contreventement,

entretoisement, tablier, qu'on peut supposer connu d'avance. En général le poids des tympans est sensiblement proportionnel à l'aire comprise entre la fibre moyenne, la tangente menée en son sommet, et les verticales passant par les points d'appui;

3° Le poids de la surcharge accidentelle, qu'on évaluera, par exemple, à 4,000 kilogrammes par mètre courant de voie simple, s'il s'agit d'un pont de chemin de fer de grande ouverture, ou à 400 kilogrammes par mètre carré de tablier, s'il s'agit d'un pont pour route.

Ces deux derniers poids donnent en bloc un poids p', qu'on supposera également réparti par unité de longueur horizontale, et qui est connu d'avance; le poids total correspondant est $p'a$. On pourra donc remplacer pa par

$$p'a + \Omega S q,$$

et l'on aura pour déterminer Ω l'équation

$$R''\Omega = (p'a + \Omega S q)\frac{a\cos\varphi + 2f\sin\varphi}{2f}.$$

D'où l'on déduit

$$\Omega = \frac{p'a \times \dfrac{a\cos\varphi + 2f\sin\varphi}{2f}}{R'' - Sq \times \dfrac{a\cos\varphi + 2f\sin\varphi}{2f}},$$

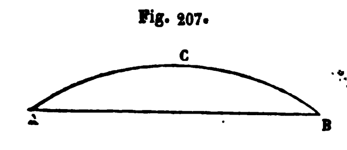
valeur de la section qui peut servir de point de départ aux calculs. En la multipliant par $2Sq$, on aura le poids propre de l'arc.

EMPLOI DES TENDEURS POUR ÉQUILIBRER LA POUSSÉE HORIZONTALE DES ARCS.

233. Un arc ACB chargé de poids et reposant sur deux appuis A et B, exerce sur ces appuis des poussées horizontales qui peuvent en

certains cas nuire à leur stabilité propre. On empêche cet effet en les réunissant par un tirant métallique AB, dont la tension tient en équilibre la poussée de l'arc, de manière que les appuis n'aient plus à supporter que des actions verticales. C'est le même artifice qu'on emploie pour détruire les actions latérales d'une toiture sur les murs qui la supportent.

Fig. 207.

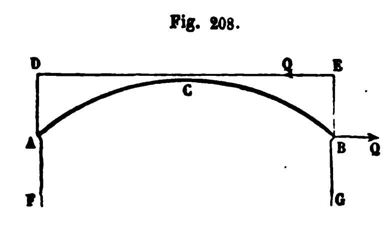


Le calcul rigoureux de la poussée d'un arc muni d'un tendeur subit alors une légère modification. Supposons qu'il y ait symétrie dans l'arc et dans les charges. On reprendra les deux équations qui donnent $\theta' - \theta$ et $x' - x$, en faisant commencer les intégrales définies à partir de $\theta = 0$. La constante β sera encore nulle. Mais pour déterminer la force Q, on ne peut plus supposer que $x' - x$ soit nul au point B; car le point B se déplace latéralement d'une quantité égale à la moitié de l'allongement pris par le tendeur AB sous l'action de la force Q; $2a$ représentant la portée totale AB, cet allongement est égal à $\frac{Qa}{E\omega}$, E étant le coefficient d'élasticité du tendeur, et ω sa section, supposée constante. On aura donc $x' - x = \frac{Qa}{E\omega}$ pour le point B, au lieu de $x' - x = 0$.

L'équation qui détermine la force Q est encore du premier degré, mais elle contient un terme de plus, relatif à l'élasticité du tendeur (1).

234. On ne place pas toujours le tendeur à la hauteur de la corde de l'arc AB; cette position serait inadmissible, en général, dans un pont jeté sur une rivière, parce qu'elle réduirait l'espace libre laissé entre l'intrados de l'arc et le niveau de l'eau. Dans ce cas, on peut reporter le tendeur au-

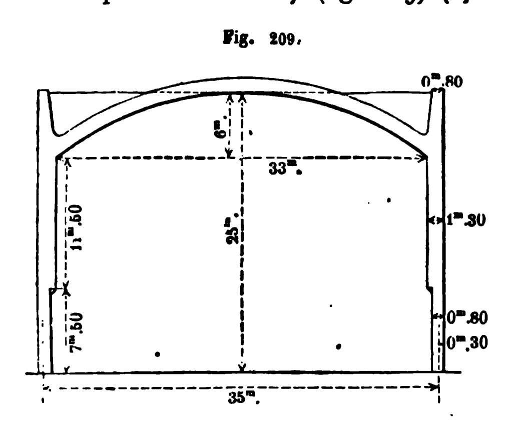
Fig. 208.



(1) En toute rigueur, un terme pareil devrait toujours figurer dans les équations générales; car il est impossible d'admettre la fixité absolue des appuis A et B, qui subissent nécessairement un tassement latéral variable avec la force Q.

dessus de l'arc. Tantôt on le formera d'une ou de plusieurs tiges métalliques, DE (fig. 208), entretoisant les piliers verticaux DF, EG, sur lesquels l'arc ACB vient, aux points A et B, exercer une action latérale. Le pilier doit être alors considéré comme une pièce droite, sollicitée en B par une force égale à Q, et en E par une force égale et contraire, qui représente la tension de la tige DE. Cette disposition a été adoptée pour la toiture de la galerie des machines au Palais de l'Exposition de 1867 (fig. 209) (1). Tantôt l'arc métallique se réunit à son point le plus haut à un longeron horizontal, avec lequel il est entretoisé par les diverses pièces entrant dans la composition des tympans, et c'est le prolongement du longeron qui s'attache aux massifs sur lesquels l'arc repose. Cette solution, applicable aux ponts en arc de cercle, a été adoptée dans plusieurs cas, et notamment au pont de la Theiss à Szégédin (Hongrie) ; dans ce pont, les arcs métalliques reposent sur des piles tubulaires (2).

Fig. 209.



235. Enfin, les types *Bow-strings*, imaginés par Brunel et appliqués par lui aux ponts de Chepstow et de Saltash, constituent une application sur très-grande échelle des tendeurs destinés à équilibrer la poussée horizontale des arcs. Nous nous arrêterons à décrire sommairement ces deux grands ouvrages.

Le pont de Chepstow, construit sur la Wye, à son embouchure

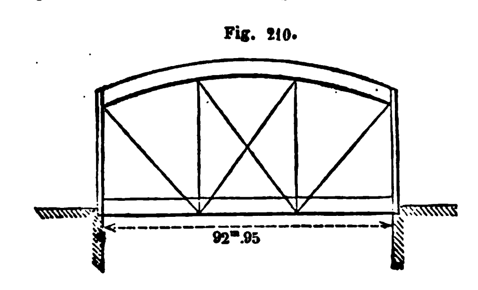
---

(1) V. *Mémoire sur les épreuves des arcs métalliques de la galerie des machines, faites par ordre de la commission impériale*, par G. Eiffel. 1867. — Ces expériences, faites dans les ateliers de MM. Ernest Gouin, à Paris, par MM. Fouquet et Eiffel, ont confirmé très-sensiblement les résultats de l'application des formules de M. Bresse.

(2) V. *Annales des ponts et chaussées*, 1859, mémoire n° 241, par E. Cézanne.

dans la Severn, sur la ligne du sud du pays de Galles, a une portée de 92^{m},95 (fig. 210). La poutre pleine qui supporte le tablier repose sur les deux culées; de plus, en deux points de sa longueur, elle est soutenue par des haubans attachés à une poutre tubulaire cylindrique franchissant la même ouverture. Cette poutre tubulaire a une légère courbure dans le plan vertical. Elle pose sur deux appuis, à l'aplomb des deux culées, et elle y exercerait une certaine poussée horizontale, sans les haubans inclinés qui, des extrémités du tube, vont rejoindre le tiers de la portée totale de la poutre inférieure, et dont la tension fait équilibre à la poussée de l'arc tubulaire. Le pont de Chepstow n'est en définitive qu'une poutre droite armée d'une manière particulière; la grande hauteur de l'armature suffit pour expliquer la raideur que cette construction possède. Le pont pèse plus de 5 tonnes par mètre courant.

Fig. 210.



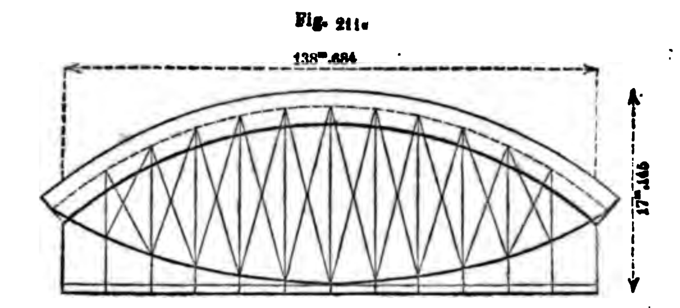
236. Le *Pont de Saltash* (Royal Albert) (fig. 211), a deux portées de 138^{m},684 chacune; la distance du tube elliptique à la chaîne, au centre de la portée, est d'axe en axe, de 17^{m},145.

Dimensions de l'ellipse formant la section du tube.	grand axe (horizontal) 5^{m},102 petit axe. . . . . . . 3^{m},657

Il existe un montant vertical au milieu de la portée; les autres sont distribués symétriquement à des distances qui varient de 11^{m},963 à 12^{m},039; il y en a cinq de chaque côté du montant central.

Le poids total du pont est d'environ 10 tonnes par mètre courant de simple voie.

Fig. 211.



Le pont de Saltash, jeté sur un bras de mer qui sépare le comté de Cornouailles du Devonshire, est le type du véritable bow-string, tel que nous l'entendons ici (1). Il se compose de deux travées de 139 mètres chacune; elles portent toutes deux sur un appui central pour la construction duquel on a employé un caisson à air comprimé. Le tablier est à plus de 30 mètres au-dessus des hautes mers. Un arc tubulaire en tôle, à section elliptique, a sa poussée équilibrée par la tension d'un polygone funiculaire analogue à la chaîne des ponts suspendus. Ces deux parties forment une poutre armée, solidement entretoisée par des liens diagonaux.

Le tablier est une poutre droite, pleine, formant garde-corps sur la voie; il est soutenu par un certain nombre de tiges accrochées les unes au câble, les autres à l'arc tubulaire. L'assemblage d'une même tige avec les deux parties principales de la construction, tube et câble, ne permet pas de savoir exactement comment se répartit la tension des tiges entre les deux pièces qui contribuent à les soutenir.

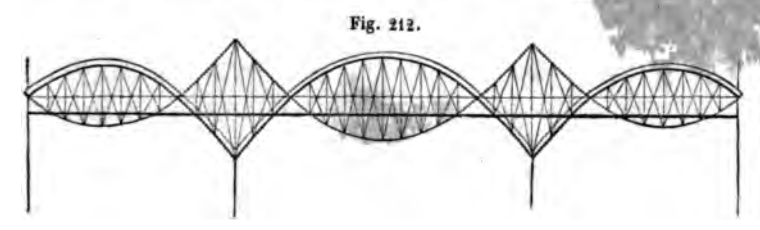
Le calcul des efforts développés dans une construction de cette forme serait très-difficile, si l'on voulait tenir compte de la résistance de l'arc métallique à la flexion. Ordinairement on en fait abstraction, et l'on considère les divers éléments de la poutre comme réunis

(1) Le nom de *bow-string* (corde de l'arc) s'applique, en Angleterre, aux ponts à poutre droite, lorsque l'arête supérieure des poutres a la forme d'un arc de cercle, et que l'arête inférieure dessine la corde de cet arc.

les uns aux autres par des articulations sans raideur. Le problème se simplifie alors et rentre dans les questions relatives aux systèmes articulés, que nous examinerons plus tard.

237. Les ponts du système Pauli, dont on voit de nombreuses applications en Allemagne, appartiennent à la même classe d'ouvrages. On a depuis perfectionné ce type, en y introduisant une disposition qui permet de réaliser l'encastrement de la travée sur ses appuis, et de faire profiter les poutres à plusieurs travées des avantages de la continuité au-dessus des piles : l'artifice à employer consiste à croiser les courbes inférieures et supérieures, comme l'indique la figure 181 (1). Ces systèmes se résument dans la réunion, en un seul et même ouvrage, d'une pièce courbe avec un câble de pont suspendu : la composante horizontale de la pression dans l'arc, et celle de la tension dans le câble étant sensiblement constantes et égales en tous les points, l'ensemble peut être assimilé à une poutre droite de hauteur variable ; la forme de la poutre est donnée par les paraboles des moments fléchissants dans l'hypothèse d'une surcharge également répartie sur toute son étendue.

Fig. 212.



COMPARAISON DES PONTS EN ARC AVEC LES PONTS A POUTRES DROITES ET LES PONTS SUSPENDUS.

238. Les divers systèmes de ponts métalliques peuvent se ramener à trois types généraux :

(1) Voyez *Nouveau système de ponts métalliques de grandes portées*, par Charles de Ruppert. Vienne, 1867, chez J. Bartelmus. Le même système se prête à l'établissement des poutres d'une seule travée encastrées sur leurs appuis.

Ponts à poutre droite,

Ponts en arc courbe,

Ponts suspendus.

Dans les ponts à poutre droite, le tablier est porté par deux ou plusieurs fermes, posées sur un certain nombre de points d'appui, culées et piles, sur lesquels elles exercent des efforts à peu près verticaux. Toute section transversale de la poutre se décompose en deux régions, l'une où les fibres métalliques sont étendues, l'autre où elles sont comprimées.

Les ponts en arc de cercle reposent sur des arcs en fer ou en fonte, qui exercent sur leurs appuis une poussée horizontale en même temps qu'une pression verticale. Autant que possible, la section entière des arcs doit être soumise partout à un effort de compression.

Les ponts suspendus sont ceux où le tablier est attaché par des tiges à un certain nombre de câbles portés directement par les appuis. Généralement les câbles exercent une traction sur des points fixes extérieurs à la construction. Les ponts *bow-strings*, dont nous venons de donner une description sommaire, ont, avec les ponts suspendus une grande analogie, en ce que le tablier est soutenu par l'intermédiaire d'un câble; mais la traction du câble est contre-balancée par la compression de l'arc métallique; en réalité, le tablier est suspendu en plusieurs points, mais le système de suspension repose sur ses appuis sans y exercer d'effort latéral.

Les ponts en arc et les ponts suspendus sont les seuls systèmes dans lesquels le métal subisse ou puisse subir partout un effort de même nature, une pression dans les uns, une tension dans les autres, et les seuls où l'on emprunte à des points fixes extérieurs la réaction nécessaire pour équilibrer une poussée horizontale. Il résulte de là que, de tous les systèmes, ce sont ceux qui permettent d'économiser le plus de matière, et ceux qui se prêtent le mieux à la construction d'un ouvrage de peu de valeur. Cette économie, propre au type en lui-même, est encore accrue par l'emploi de la fonte pour les ponts en arc, et du fil de fer pour les ponts suspendus. La fonte, à la compression, a autant et plus de résistance que le fer, 6 à 7 kilogrammes par millimètre carré, et elle s'obtient à un prix bien infé-

rieur; le fil de fer peut, dans un pont suspendu, supporter sans danger une tension de 12 kilogrammes par millimètre carré, à cause de l'excès de résistance que possède toujours, relativement à une pièce plus grosse, un fil de petit diamètre. Parfois on a porté la limite à 18 kilogrammes; mais cette extension paraît peu prudente. Les avantages des ponts en arc et des ponts suspendus sont d'ailleurs rachetés par des inconvénients qui restreignent beaucoup l'application de ces types.

1° Ils commandent une position particulière pour le tablier, au haut de la construction pour les ponts en arc, au-dessous des câbles dans les ponts suspendus (1). Dans certaines situations, les naissances des arcs pourront donc être baignées par les hautes eaux (2). D'un autre côté, la construction d'un pont suspendu exige la plupart du temps l'érection de points d'appui en maçonnerie d'une hauteur à peu près proportionnelle à l'ouverture des travées.

2° Les poussées ou les tractions horizontales, lorsqu'elles ne sont pas reportées sur des points suffisamment résistants, peuvent compromettre la stabilité de l'ouvrage. Ainsi, dans un pont en arc à plusieurs ouvertures, les charges en se déplaçant poussent successivement en sens opposés les divers appuis intermédiaires. Pour prévenir les oscillations des piles sous ces efforts alternatifs, on peut, comme on l'a fait au pont de la Theiss, relier l'une à l'autre deux piles consécutives par un longeron droit qui touche en son sommet l'extrados de l'arc compris entre ces deux appuis. Les piles tubulaires se prêtent parfaitement à cette addition; mais en même temps le pont perd son caractère de pont en arc, car tout le métal ne travaille plus à la compression.

L'inconvénient des actions horizontales est plus grave encore dans les ponts suspendus. Ici deux effets sont à craindre : la culée peut

---

(1) Il y a cependant des exceptions. A Newcastle-on-Tyne, on a placé au-dessous des arcs du pont sur lequel passe le chemin de fer, un pont pour route de terre. A Genève, le pont qui traverse le Rhône en touchant l'île Jean-Jacques-Rousseau est un pont suspendu à petites portées : le tablier est *posé* sur des câbles qui n'ont qu'une faible flèche.

(2) Cela arrive, par exemple, au pont d'Arcole à Paris, dans les crues de la Seine.

être insuffisante pour équilibrer la traction qui s'exerce sur elle, et l'oxydation du métal, dans les régions humides où s'enfoncent les câbles, peut aller jusqu'à la destruction des fils et à la chute du pont tout entier.

L'attache des câbles est en effet une difficulté des plus sérieuses; c'est par là qu'un grand nombre de ponts suspendus ont péri.

Il est utile qu'on puisse visiter le câble dans les puits où il est amarré; cette condition, qui est loin d'être remplie dans la plupart des ponts suspendus construits avec trop de parcimonie à une certaine époque, n'a pas été négligée pour les grands ponts établis plus tard. Dans le pont Saint-Christophe, sur le Scorf, à Lorient, par exemple, les câbles, au lieu d'être attachés, font partie d'un seul et même écheveau; un seul fil, non interrompu, suit chaque câble en particulier, et fait le tour de chaque culée, en passant dans des galeries d'un facile accès.

3° Les trépidations sont nuisibles à la résistance de la fonte; aussi convient-il, dans les projets d'arcs destinés aux passages des trains et des charges en mouvement, de remplir les tympans de manière à contrarier les oscillations que tend à prendre l'arc métallique (1). La masse du pont est à cet égard une garantie de stabilité. Néanmoins le fer est aujourd'hui généralement préféré à la fonte pour la construction des arcs, bien qu'il conduise à des ouvrages moins lourds.

Les ponts suspendus, tels qu'on les construisait encore il y a peu d'années, constituent un système très-déformable. Les charges agissent sur un point unique des câbles, qui ont, dans des directions normales à leur longueur, une résistance insignifiante. La forme parabolique qu'ils prennent ne permet pas de les réunir au tablier par des liens diagonaux. On peut gêner un peu les oscillations en plaçant de biais les poutrelles; les deux extrémités d'une

(1) Comme exemple de rigidité, on peut étudier, à Paris, le pont de Solferino sur la Seine. Voyez *Annales des ponts chaussées*, les Ponts de Paris, par M. Féline Romany, 1864. — *Annales des conducteurs des ponts et chaussées*. 1860-61, Compte rendu sommaire des épreuves et dessins du pont. — Dans les ponts de Grenelle et de l'Ile-Saint-Louis (ponts Sully), construits en 1875, on a employé des fers Zorès pour entretoises, et obtenu une très-grande rigidité, en évitant les assemblages à queue d'aronde du pont de Solferino, qui avaient souffert de nombreuses avaries.

même poutrelle n'agissent plus alors à la fois sur des points dont les oscillations soient entièrement concordantes. On obtient aussi par ce moyen une répartition des charges locales sur une longueur un peu plus grande de tablier (1). Les garde-corps en croix de Saint-André sont destinés de même à donner au tablier une certaine raideur; mais généralement les assemblages à mi-bois pratiqués dans les croix de Saint-André réduisent beaucoup l'utilité de cette addition. Pour lui donner toute son efficacité, il faudrait pour ainsi dire doubler le pont suspendu d'une véritable poutre américaine. On a imaginé récemment de donner de la rigidité aux câbles eux-mêmes. Pour cela on emploie le fer en barres au lieu du fil de fer, et l'on pose deux câbles parallèles que l'on entretoise l'un avec l'autre par des barres découpant leur intervalle en triangles à peu près égaux. Ce système est appliqué à Vienne pour le passage de la voie qui joint la gare du Nord aux gares des lignes de Raab et de Trieste.

Les ponts suspendus sont, en somme, des ouvrages qu'il importe de surveiller très-attentivement, et sur lesquels le passage des charges doit se faire à très-petite vitesse. L'économie de la construction est donc rachetée par un très-grave inconvénient, et malgré quelques exceptions, plutôt apparentes que réelles, ils ne conviennent point aux chemins de fer (2).

4° Les variations de température altèrent la poussée des arcs en même temps que leurs flèches, et dans certains cas elles peuvent amener les arcs à ne plus poser sur leurs appuis que par une arête de la surface des naissances; la construction chargée par en haut peut n'avoir plus alors toute l'assiette qui lui est nécessaire.

Dans les ponts suspendus, la température fait varier la longueur des câbles, les fait glisser sur leurs appuis, et déforme le tablier, tant par suite des variations de longueur des câbles que par suite des altérations inégales de la longueur des tiges de suspension.

(1) Voyez *Annales des ponts et chaussées*, 1859, mémoire n° 250, par M. Noyon.

(2) Quelques ponts suspendus que l'on trouve en Angleterre doivent leur rigidité à un excès de matière. Le système n'a plus alors le mérite de l'économie, le seul qu'on puisse lui accorder. Il est juste d'observer pourtant que *le système des ponts suspendus est celui qui permet de franchir les plus grandes portées.* Le pont de Brooklyn, aux États-Unis, a une portée de 493 mètres.

5° Le montage d'un pont en arc de cercle se fait généralement de la manière suivante : les arcs, assemblés à plat sur le chantier, sont transportés à proximité des appuis, enlevés et déposés à leur place. Le montage des ponts à poutre droite se fait d'un plus grand nombre de manières, et laisse plus de latitude au constructeur pour profiter de toutes les circonstances locales.

Le montage d'un pont suspendu se fait, soit en composant le câble sur place, soit en le formant dans un chantier spécial pour le poser ensuite. Dans l'un et l'autre cas, c'est une opération délicate, dans laquelle il y a toujours lieu de craindre des malfaçons.

SUPPLÉMENT AU LIVRE V.

RECHERCHE DE LA DÉFORMATION D'UNE PIÈCE COURBE.

239. Les équations générales de la déformation sont au nombre de deux :

$$EI\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{\rho}\right)=M,$$

$$ds-ds'=\frac{Pds}{E\Omega}.$$

Le moment M est positif quand il tend à augmenter la courbure; la force P est positive quand elle tend à raccourcir la fibre moyenne.

La première équation fait connaître les changements de courbure de la fibre moyenne produits par le moment fléchissant M; la seconde donne les raccourcissements produits par la compression P.

Les fonctions M et P contiennent, outre les forces données directement, les composantes et les moments de la réaction de l'un des appuis de la pièce. Les réactions des deux appuis sont généralement inconnues. On peut les décomposer en deux composantes, l'une verticale et l'autre horizontale; chaque réaction sera déterminée par ses deux composantes, de sorte que le problème renferme quatre inconnues. Mais la statique établit entre ces quatre inconnues les trois équations de l'équilibre extérieur, savoir : les deux équations des composantes et l'équation des moments, de sorte qu'on peut en général exprimer trois inconnues en fonction de la quatrième. Les fonctions M et P renferment, en définitive, une force qui ne sera connue qu'à la fin du calcul.

Nous supposerons M et P exprimés en fonction de s, ou de toute autre variable liée avec l'arc s.

Si la pièce était soumise à une variation de température, il faudrait modifier en conséquence la seconde équation, et, au lieu de poser

$$ds-ds'=\frac{Pds}{E\omega},$$

écrire l'équation

$$ds-ds'=\left(\frac{P}{E\Omega}-\alpha\tau\right)ds,$$

en appelant α le coefficient de dilatation et τ la différence de température. Dans tous les cas nous supposerons que M et le coefficient de ds dans le second membre de cette dernière équation sont des fonctions connues, $F(s)$ et $f(s)$, de l'arc s, ces fonctions contenant d'ailleurs explicitement la composante inconnue de l'une des réactions des appuis.

Pour simplifier la notation, nous ferons usage de la caractéristique δ, empruntée au calcul des variations, pour exprimer d'une manière brève la différence entre les deux valeurs successives d'une même quantité quand la pièce passe de l'état naturel à l'état déformé. Soit u une quantité quelconque relative à l'état naturel de la pièce, u' la valeur que

prend cette quantité dans l'état déformé. Nous poserons, d'après cette notation,

$$u' - u = \delta u;$$

δu représentera une quantité finie, mais généralement très-petite, et dont on pourra négliger les puissances. La caractéristique δ peut s'appliquer aux différentielles comme aux quantités finies. On aura, par exemple,

$$\delta du = du' - du = d(u' - u) = d\delta u,$$

équation qui montre qu'on peut permuter les deux caractéristiques d et δ. L'opération représentée par la nouvelle caractéristique est une sorte de différentiation analogue à celle que Leibnitz appelait *differentiatio de curvâ in curvam;* seulement nos δ sont des quantités finies que nous proposons de calculer, tandis que les δ du calcul des variations sont des quantités auxiliaires infiniment petites, que la suite du calcul doit forcément éliminer, et dont la solution définitive du problème ne conserve plus aucune trace.

Au lieu des équations

$$\text{EI}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right) = \text{M},$$

$$ds - ds' = \frac{\text{P}ds}{\text{E}\Omega},$$

nous poserons donc, en employant notre nouvelle notation, et en faisant

$$\frac{\text{M}}{\text{EI}} = \text{F}(s) \quad \text{et} \quad \frac{\text{P}}{\text{E}\Omega} = f(s),$$

(1) $$\left\{\begin{aligned} &\delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \text{F}(s), \\ &\delta ds = -f(s)ds. \end{aligned}\right.$$

De cette seconde équation on tire

$$\delta ds = d\delta s = -f(s)ds,$$

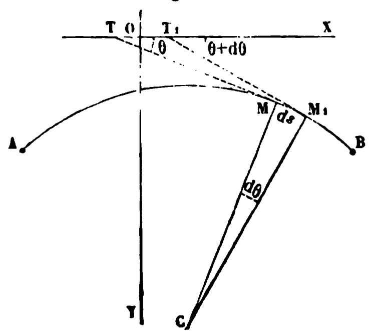
puis, en intégrant,

(2) $$\delta s = -\int_{\text{A}}^{\text{M}} f(s)ds,$$

l'intégrale étant prise depuis l'extrémité A de la pièce jusqu'au point M défini par une valeur particulière de l'arc s.

Soit θ l'angle que fait la tangente MT à la courbe au point M avec l'axe OX; nous aurons

Fig. 213.



$$\rho = \frac{ds}{d\theta},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds};$$

donc

$$\delta\frac{1}{\rho} = \delta\frac{d\theta}{ds}.$$

Nous pouvons appliquer ici par approximation les règles de la différentiation; cela revient en effet à négliger des termes infiniment plus petits que ceux que l'on conserve; il viendra alors

(3) $$\delta\frac{1}{\rho}=\frac{ds\delta d\theta - d\theta\delta ds}{ds^2}=F(s).$$

Résolvons cette équation par rapport à $\delta d\theta$; il vient

$$\delta d\theta = d\delta\theta = F(s)ds + \frac{d\theta}{ds}\delta ds = \left(F(s) - \frac{d\theta}{ds}f(s)\right)ds,$$

équation qui, intégrée entre les points A et M, nous donne

(4) $$\delta\theta = \int_A^M F(s)ds - \int_A^M \frac{d\theta}{ds}f(s)ds + \beta.$$

Nous ajoutons une constante β, qui représente l'angle dont tourne la section extrême autour de son point d'appui A par suite de la déformation.

On peut donner une autre forme à l'équation (4). Reprenons l'équation précédente

$$d\delta\theta = F(s)ds + \frac{d\theta}{ds}\delta ds,$$

et intégrons sans remplacer δds par sa valeur déduite de la seconde équation (1); il viendra

$$\delta\theta = \int F(s)ds + \int \frac{d\theta}{ds}\delta ds.$$

Le second terme peut être intégré par parties :

$$\delta\theta = \int F(s)ds + \frac{d\theta}{ds}\delta s - \int \delta s d\frac{d\theta}{ds},$$

ou bien, en faisant commencer les intégrales au point A, et en observant que δs est nul en ce point,

(5) $$\delta\theta = \beta + \int_A^M F(s)ds + \frac{d\theta}{ds}\delta s - \int_A^M \delta s d\frac{d\theta}{ds}.$$

Toutes les intégrales indiquées pourront être prises le long de la fibre moyenne dans son état naturel. On voit que la formule (5) se prête à une simplification lorsque l'arc AB est circulaire. On a alors, en effet, $\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho}=$ constante. Donc $d\frac{d\theta}{ds}=0$, et le second membre de l'équation (5) se réduit à

(5 *bis*) $$\delta\theta = \beta + \int_A^M F(s)ds + \frac{\delta s}{\rho}.$$

Dans cette équation (5), entre une nouvelle constante β, qui, jointe à la composante inconnue, porte à deux le nombre des quantités qui restent à déterminer.

240. Cherchons les variations δx et δy des coordonnées des points de la fibre moyenne. Nous avons à la fois

(6) $$\left\{\begin{array}{l} dx^2+dy^2=ds^2, \\ \text{et arc tang}\,\frac{dy}{dx}=\theta, \quad \text{car} \quad \tan\theta=\frac{dy}{dx}. \end{array}\right.$$

Différentions par δ ces deux équations. Il vient

$$(7)\quad \begin{cases} dx\delta dx + dy\delta dy = ds\delta ds, \\ dx\delta dy - dy\delta dx = ds^2\delta\theta, \end{cases}$$

cette dernière étant multipliée par ds^2. Résolvons les équations (7) par rapport à δdx et δdy. Nous aurons

$$(8)\quad \begin{cases} \delta dx = \frac{dx}{ds}\delta ds - dy\delta\theta, \\ \delta dy = \frac{dy}{ds}\delta ds + dx\delta\theta. \end{cases}$$

Intégrons à partir du point A. Les premiers termes du second membre s'intègrent par parties :

$$(9)\quad \begin{cases} \delta x = \frac{dx}{ds}\delta s - \int_A^M \delta s d\frac{dx}{ds} - \int_A^M dy\delta\theta, \\ \delta y = \frac{dy}{ds}\delta s - \int_A^M \delta s d\frac{dy}{ds} + \int_A^M dx\delta\theta. \end{cases}$$

On n'ajoute pas de constantes, puisque $\frac{dx}{ds}\delta s$ et $\frac{dy}{ds}\delta s$ s'annulent tous deux au point A.

Le facteur δs est connu par l'équation (2), $\delta\theta$ est donné par l'équation (5), et les équations (9) indiquent pour chaque point les composantes, δx et δy, du déplacement subi par ce point; δx et δy sont exprimés en fonction de la composante de la réaction et de la constante β. On déterminera ces deux inconnues en exprimant que pour $s = s_1$, longueur primitive de l'arc AB, le δx et le δy sont nuls à la fois, car l'appui B est supposé fixe. Cela fournira deux équations qui feront connaître ces inconnues.

Si la pièce était encastrée en A, on aurait une inconnue de plus, à savoir, le moment d'encastrement en ce point. Mais la constante β serait alors nulle, de sorte que le problème n'aurait pas un plus grand nombre d'inconnues.

Si elle était encastrée en A et en B, on aurait une inconnue de plus, le couple d'encastrement en B; mais on aurait en même temps une relation de plus, car $\delta\theta$ devrait être nul au point B.

Posons pour abréger

$$(10)\quad \begin{cases} \int_A^M \left(dy\delta\theta + \delta s d\frac{dx}{ds}\right) = U, \\ \int_A^M \left(dx\delta\theta - \delta s d\frac{dy}{ds}\right) = V. \end{cases}$$

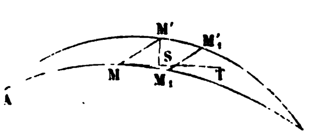
Les équations (9) prendront la forme très-simple

$$(11)\quad \begin{cases} \delta x = \frac{dx}{ds}\delta s - U, \\ \delta y = \frac{dy}{ds}\delta s + V. \end{cases}$$

Les fonctions U et V vont se retrouver dans la détermination de certaines quantités qu'il peut être utile de connaître.

La déformation de la pièce transporte le point M en M', le point M_1 en M_1', etc. Faisons $MM'=u$, cette quantité u étant supposée très-petite. Au point M menons la tangente MT, et projetons le point M' en S sur cette droite.

Fig. 214.



Faisons

$$MS=t,$$
$$SM'=n;$$

t et n seront les composantes, tangentielle et normale, du déplacement $MM'=u$. Soit encore $M'MT=\alpha$ l'angle que fait le déplacement total avec la tangente à la fibre moyenne dans son état naturel. Nous aurons

$$t=u\cos\alpha,$$
$$n=u\sin\alpha.$$

La direction MT a pour coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$; la direction MM' a de même pour coefficient angulaire $\frac{\delta y}{\delta x}$; et par suite

$$\tang\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{\delta y}{\delta x}}{1+\frac{dy}{dx}\frac{\delta y}{\delta x}}=\frac{\delta x dy-dx\delta y}{dx\delta x+dy\delta y}.$$

De là on déduit

$$\cos\alpha=\frac{dx\delta x+dy\delta y}{\sqrt{(dx\delta x+dy\delta y)^2+(\delta x dy-dx\delta y)^2}}=\frac{dx\delta x+dy\delta y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)(\delta x^2+\delta y^2)}}=\frac{dx\delta x+dy\delta y}{uds}.$$

On aurait de même

$$\sin\alpha=\frac{\delta x dy-dx\delta y}{uds}.$$

Donc

$$t=u\cos\alpha=\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y,$$
$$n=u\sin\alpha=\frac{dy}{ds}\delta x-\frac{dy}{ds}\delta y.$$

Remplaçant enfin δx et δy par leurs valeurs, il viendra

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned} t&=\delta s+\frac{Vdy-Udx}{ds},\\ n&=-\frac{Udy+Vdx}{ds}.\end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que nds représente l'aire $MM_1M'_1M'$ engendrée par l'élément MM. dans son déplacement, de sorte qu'en appelant ω l'aire comprise entre les deux courbes, somme algébrique de tous ces éléments, on aura $d\omega=nds=-(Udy+Vdx)$.

Application à l'arc de cercle. Calcul des fonctions U *et* V.

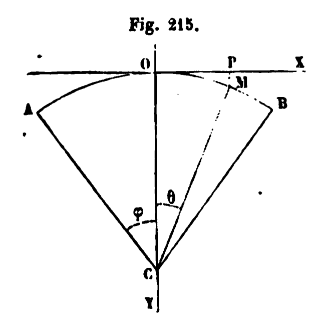


Fig. 215.

241. R étant le rayon du cercle, supposé tangent au point O à l'axe OX, nous aurons, en remarquant que l'angle MCO est égal à l'angle θ, que fait la tangente en M avec l'axe OX,

$$x = R\sin\theta, \qquad dx = R\cos\theta d\theta,$$
$$y = R(1-\cos\theta), \qquad dy = R\sin\theta d\theta,$$
$$ds = R d\theta.$$
$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \qquad d\frac{dx}{ds} = -\sin\theta d\theta,$$
$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta, \qquad d\frac{dy}{ds} = \cos\theta d\theta.$$

$$U = \int_A^M (R\sin\theta d\theta\delta\theta - \delta s\sin\theta d\theta) = \int_A^M (R\delta\theta - \delta s)\sin\theta d\theta,$$
$$V = \int_A^M (R\cos\theta d\theta\delta\theta - \delta s\cos\theta d\theta) = \int_A^M (R\delta\theta - \delta s)\cos\theta d\theta.$$

Ces deux intégrales se fondent en une seule si l'on introduit les exposants imaginaires. On a, en effet, $V+U\sqrt{-1} = \int_{-\varphi}^{\theta} (R\delta\theta - \delta s)e^{\theta\sqrt{-1}}d\theta.$

La fonction $R\delta\theta - \delta s$ est donnée par l'équation (5 *bis*). Nous avons, en faisant $\rho = R$,

$$R\delta\theta - \delta s = R\left(\beta + \int_A^M F(s)ds\right).$$

Soit H cette fonction de l'angle θ. Nous aurons à intégrer la fonction $He^{\theta\sqrt{-1}}d\theta$ entre les limites $-\varphi$ et θ; on peut intégrer par parties, ce qui donne pour l'intégrale indéfinie

$$\int He^{\theta\sqrt{-1}}d\theta = \frac{He^{\theta\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{\sqrt{-1}}\int e^{\theta\sqrt{-1}}dH,$$

et entre les limites, en appelant H_0 la valeur particulière de H au point A, ou pour $\theta = -\varphi$,

$$\int_{-\varphi}^{\theta} He^{\theta\sqrt{-1}}d\theta = \left(\frac{He^{\theta\sqrt{-1}} - H_0e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_{-\varphi}^{\theta} e^{\theta\sqrt{-1}}dH.$$

Or

$$dH = RF(s)ds = \frac{MR}{EI}ds = \frac{MR^2}{EI}d\theta,$$

et enfin

$$V+U\sqrt{-1} = \frac{He^{\theta\sqrt{-1}} - H_0e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{R^2}{EI}\int_{-\varphi}^{\theta} e^{\theta\sqrt{-1}}Md\theta,$$

quadrature facile à faire dès qu'on connaît M en fonction de θ.

Calcul de la poussée dans un cas particulier.

242. Prenons, par exemple, un arc de cercle symétrique par rapport à la verticale, et chargé de poids uniformément répartis suivant sa corde $AB = 2a$.

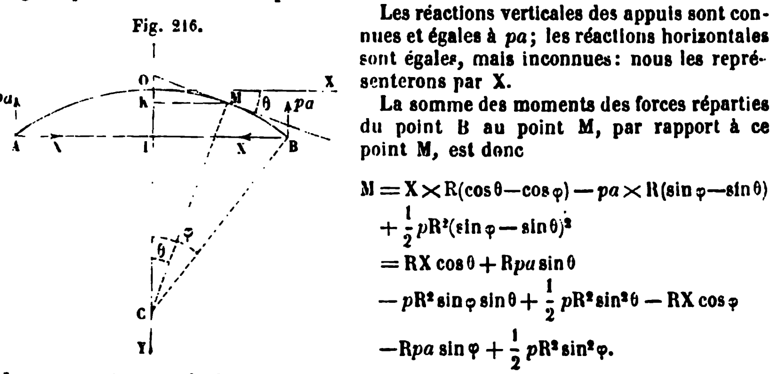


Fig. 216.

Les réactions verticales des appuis sont connues et égales à pa; les réactions horizontales sont égales, mais inconnues: nous les représenterons par X.

La somme des moments des forces réparties du point B au point M, par rapport à ce point M, est donc

$$
\begin{aligned}
M &= X \times R(\cos\theta - \cos\varphi) - pa \times R(\sin\varphi - \sin\theta) \\
&\quad + \frac{1}{2} pR^2 (\sin\varphi - \sin\theta)^2 \\
&= RX\cos\theta + Rpa\sin\theta \\
&\quad - pR^2 \sin\varphi\sin\theta + \frac{1}{2} pR^2 \sin^2\theta - RX\cos\varphi \\
&\quad - Rpa\sin\varphi + \frac{1}{2} pR^2 \sin^2\varphi.
\end{aligned}
$$

La compression se calcule de même :

$$
P = X\cos\theta + pa\sin\theta - pR(\sin\varphi - \sin\theta)\sin\theta.
$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
E\Omega\delta s &= -RX\int_{-\varphi}^{\theta}\cos\theta d\theta - Rpa\int_{-\varphi}^{\theta}\sin\theta d\theta + pR^2\sin\varphi\int_{-\varphi}^{\theta}\sin\theta d\theta - pR^2\int_{-\varphi}^{\theta}\sin^2\theta d\theta \\
&= -RX(\sin\theta + \sin\varphi) + Rpa(\cos\theta - \cos\varphi) - pR^2\sin\varphi(\cos\theta - \cos\varphi) \\
&\quad - pR^2\left[\frac{\theta+\varphi}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi + \sin 2\theta)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\theta &= \beta + \frac{\delta s}{R} + \frac{R}{EI}\int_{-\varphi}^{\theta} M d\theta \\
&= \beta - \frac{X(\sin\theta + \sin\varphi)}{E\Omega} + \frac{pa}{E\Omega}(\cos\theta - \cos\varphi) - \frac{pR}{E\Omega}\sin\varphi(\cos\theta - \cos\varphi) \\
&\quad - \frac{pR}{E\Omega}\left[\frac{\theta+\varphi}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \sin 2\varphi)\right] + \frac{R^2X}{EI}\left(\int_{-\varphi}^{\theta}\cos\theta d\theta - \cos\varphi\int_{-\varphi}^{\theta} d\theta\right) \\
&\quad + \frac{R^2pa}{EI}\left(\int_{-\varphi}^{\theta}\sin\theta d\theta - \sin\varphi\int_{-\varphi}^{\theta} d\theta\right) \\
&\quad - \frac{pR^3}{EI}\sin\varphi\left(\int_{-\varphi}^{\theta}\sin\theta d\theta - \frac{1}{2}\sin\varphi\int_{-\varphi}^{\theta} d\theta\right) + \frac{1}{2}\frac{pR^3}{EI}\int_{-\varphi}^{\theta}\sin^2\theta d\theta \\
&= \beta - \frac{\sin\theta + \sin\varphi}{E\Omega}X + \frac{pa}{E\Omega}(\cos\theta - \cos\varphi) - \frac{pR}{E\Omega}\sin\varphi\cos\theta + \frac{pR}{E\Omega}\sin\varphi\cos\varphi \\
&\quad - \frac{pR}{E\Omega}\left[\frac{\theta+\varphi}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \sin 2\varphi)\right] \\
&\quad + \frac{R^2X}{EI}\left(\sin\theta + \sin\varphi - \cos\varphi(\theta+\varphi)\right) - \frac{R^2pa}{EI}\left[\cos\theta - \cos\varphi + \sin\varphi(\theta+\varphi)\right] \\
&\quad + \frac{pR^3}{EI}\sin\varphi\left[\cos\theta - \cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi(\theta+\varphi)\right] + \frac{1}{2}\frac{pR^3}{EI}\left[\frac{\theta+\varphi}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \sin 2\varphi)\right].
\end{aligned}
$$

La fonction U est égale à $\int_{-\varphi}^{\theta}(R\delta\theta - \delta s)\sin\theta d\theta$.

Or

$$R\delta\theta - \delta s = \beta R + \frac{R^2}{EI}\int_{-\varphi}^{\theta} M d\theta$$

$$= \beta R + \frac{R^2 X}{E}\left[\sin\theta + \sin\varphi - \cos\varphi(\theta+\varphi)\right] - \frac{R^3 pa}{EI}\left[\cos\theta - \cos\varphi + \sin\varphi(\theta+\varphi)\right]$$

$$+ \frac{pR^4}{EI}\sin\varphi\left[\cos\theta - \cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi(\theta+\varphi)\right] + \frac{1}{2}\frac{pR^4}{EI}\left[\frac{\theta+\varphi}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \sin 2\varphi)\right].$$

Multiplions par $\sin\theta d\theta$, et intégrons entre les limites $-\varphi$ et θ : il vient

$$U = \beta R\int_{-\varphi}^{\theta}\sin\theta d\theta + \frac{R^3 X}{EI}\int_{-\varphi}^{\theta}[\sin^2\theta d\theta + \sin\varphi\sin\theta d\theta - \cos\varphi(\theta+\varphi)\sin\theta d\theta)]$$

$$- \frac{R^3 pa}{EI}\int_{-\varphi}^{\theta}[\cos\theta\sin\theta d\theta - \cos\varphi\sin\theta d\theta + \sin\varphi(\theta+\varphi)\sin\theta d\theta)]$$

$$+ \frac{pR^4}{EI}\sin\varphi\int_{-\varphi}^{\theta}\left[\cos\theta\sin\theta d\theta - \cos\varphi\sin\theta d\theta + \frac{1}{2}\sin\varphi(\theta+\varphi)\sin\theta d\theta)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{pR^4}{EI}\left[\int_{-\varphi}^{\theta}\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\theta d\theta - \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \sin 2\varphi)\sin\theta d\theta\right],$$

ou bien

$$U = -\beta R(\cos\theta - \cos\varphi) + \frac{R^3 X}{EI}\left[\frac{\theta+\varphi}{2} - \frac{1}{4}(\sin 2\theta + \sin 2\varphi)\right] - \frac{R^3 X}{EI}\sin\varphi(\cos\theta - \cos\varphi)$$

$$- \frac{R^3 X}{EI}\cos\varphi(\sin\theta + \sin\varphi - \theta\cos\theta - \varphi\cos\varphi) - \frac{R^3 pa}{EI}\frac{1}{2}(\sin 2\theta - \sin 2\varphi)$$

$$- \frac{R^3 pa}{EI}\cos\varphi(\cos\theta - \cos\varphi) - \frac{R^3 pa}{EI}\sin\varphi(\sin\theta + \sin\varphi - \theta\cos\theta - \varphi\cos\varphi)$$

$$+ \frac{R^3 pa}{EI}\varphi\sin\varphi(\cos\theta - \cos\varphi) + \frac{pR^4}{EI}\sin\varphi\frac{1}{2}(\sin 2\theta - \sin 2\varphi)$$

$$+ \frac{pR^4}{EI}\sin\varphi\cos\varphi(\cos\theta - \cos\varphi)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{pR^4}{EI}\sin\varphi(\sin\theta + \sin\varphi - \theta\cos\theta - \varphi\cos\varphi) - \frac{1}{2}\frac{pR^4}{EI}\varphi\sin\varphi(\cos\theta - \cos\varphi)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{pR^4}{EI}\left[\frac{1}{2}(\sin\theta + \sin\varphi - \theta\cos\theta - \varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi(\cos\theta - \cos\varphi)\right]$$

$$- \frac{1}{8}\frac{pR^4}{EI}\left[\frac{2}{3}(\sin^3\theta + \sin^3\varphi) - \frac{1}{3}\frac{pR^4}{EI}\sin 2\varphi(\cos\theta - \cos\varphi)\right].$$

Les deux inconnues β et X se détermineront en exprimant que $\delta\theta = 0$ pour $\theta = 0$, à cause de la symétrie de la pièce et de la distribution des charges, et que $\delta x = 0$ au point B, c'est-à-dire que $\frac{dx}{ds}\delta s - U = 0$ pour $\theta = \varphi$.

On aura donc à la fois les deux équations :

$$0 = \beta - \frac{\sin\varphi}{E\Omega}X + \frac{pa}{E\Omega}(1-\cos\varphi) - \frac{pR}{E\Omega}\sin\varphi + \frac{pR}{E\Omega}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{pR}{E\Omega}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)$$

$$+ \frac{R^2 X}{EI}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) - \frac{R^2 pa}{EI}(1 - \cos\varphi + \varphi\sin\varphi) + \frac{pR^3}{EI}\sin\varphi\left(1 - \cos\varphi + \frac{\varphi\sin\varphi}{4}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{pR^3}{EI}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right),$$

et

$$X=\frac{-\frac{pR^3}{EI}\left[(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\left(\frac{1}{2}+\sin\varphi\right)-\frac{1}{6}\sin^3\varphi\right]-\frac{2p\alpha R^2}{EI}(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\sin\varphi-\frac{pR}{E\Omega}\cos\varphi\left(\varphi-\frac{\sin}{}\right.}{\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{E\Omega}+\frac{R^2}{EI}\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}+2\varphi\cos\varphi-2\varphi\cos^2\varphi\right)}$$

Cette dernière équation fait connaître la poussée horizontale de l'arc, et la valeu ainsi trouvée, substituée dans l'équation précédente, donne la valeur de la constante β

Comparaison avec les équations de M. Bresse.

243. L'équation (5) coïncide avec celle de M. Bresse et celle de Navier, en négligeant tous les termes contenant δs. Il vient alors simplement

$$\delta\theta=\beta+\int_A^M F(s)ds,$$

ou bien, si l'on rétablit la notation ordinaire,

$$\theta'-\theta=\beta+\int_A^M \frac{M}{EI}ds \qquad \text{(équation (3) du § 214).}$$

Les équations (8) se ramènent aux équations qui donnent $x'-x$, $y'-y$. Pour cel remplaçons dans les équations (8) le rapport $\frac{\delta ds}{ds}$ par $-f(s)=-\frac{P}{E\Omega}+\alpha\tau$. Il viend

$$\delta dx=dx\left(-\frac{P}{E\Omega}+\alpha\tau\right)-dy\delta\theta,$$

$$\delta dx=dy\left(-\frac{P}{E\Omega}+\alpha\tau\right)+dx\delta\theta,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\delta x=-\int_A^M dy\delta\theta-\int_A^M\frac{P}{E\Omega}dx+\int_A^M\alpha\tau dx,$$

$$\delta y=+\int_A^M dx\delta\theta-\int_A^M\frac{P}{E\Omega}dy+\int_A^M\alpha\tau dx,$$

ou bien

$$x'-x=-\int_{s_0}^s dy(\theta'-\theta)-\int_{s_0}^s\frac{P}{E\Omega}dx+\int_{s_0}^s\alpha\tau dx,$$

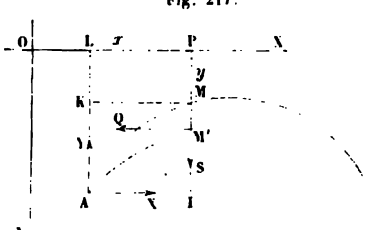
$$y'-y=+\int_{s_0}^s dx(\theta'-\theta)-\int_{s_0}^s\frac{P}{E\Omega}dy+\int_{s_0}^s\alpha\tau dx,$$

équations identiques aux équations (10) et (11) du § 215. En résumé, la seule modi cation introduite par la nouvelle méthode est celle qui consiste à compléter la vale de $\theta'-\theta$ par l'intégrale $\int\frac{d\theta}{ds}d(s'-s)$.

PIÈCES COURBES. — MÉTHODE DE M. BELL (1).

244. Soit AB la fibre moyenne d'un arc élastique, que nous supposerons posé en A et en B sur deux appuis. Appelons X et Y les composantes, l'une horizontale, l'autre verticale, de la réaction du point A, et considérons sur l'arc un second point M quelconque. L'arc AM sera en équilibre sous l'action des forces X et Y, des forces données réparties de A en M, et des forces développées dans la section M. Ces dernières forces sont équivalentes à la résultante changée de sens des premières. Nous pouvons les réduire en général à une force unique, appliquée en un point M' situé sur la verticale du point M, et telle que l'on ait, en décomposant cette force suivant l'horizontale et la verticale,

Fig. 217.



$$Q = X + H,$$
$$S = Y - V,$$
$$Q \times MM' = X \times MI - Y \times MK + \mu,$$

H étant la somme des composantes horizontales des forces données,
V la somme des composantes verticales, positives quand elles agissent de haut en bas,
et μ la somme de leurs moments par rapport au point M.

Soient $OP = x, \quad PM = y, \quad PM' = y',$

et soient $OL = m$, $LA = n$, les coordonnées du point A. On aura les trois équations :

(1) $$Q = X + H,$$
(2) $$S = Y - V,$$
(3) $$Q(y' - y) = X(n - y) - Y(x - m) + \mu.$$

X, Y, sont des constantes, ainsi que m et n. H, V, μ sont des fonctions de x et de y. D'ailleurs, y et x sont liés entre eux par l'équation de la courbe AMB. Éliminons y et Q entre l'équation (1), l'équation (3) et l'équation de la courbe. L'équation finale entre y' et y sera l'équation du lieu du point M'. Le tracé de cette courbe auxiliaire, que M. Bell appelle *courbe d'équilibre*, aidera à trouver le moment fléchissant en un point quelconque de l'arc. Il suffira, en effet, de faire le produit de la force Q, composante horizontale de la poussée au point M, par l'intervalle MM' compris sur la verticale entre les deux courbes.

Il y a un cas particulier très-important pour la pratique, celui où toutes les forces extérieures appliquées à l'arc sont verticales. Dans ce cas, H = 0, et Q est une quantité constante. Alors le moment fléchissant est proportionnel à l'intervalle des deux courbes.

La courbe d'équilibre passe par les points A et B si l'arc est simplement posé sur ses appuis; car en ces points le moment fléchissant doit être nul.

M. Bell a déduit de cette remarque une méthode de calcul des pièces courbes. Dans les formules qui donnent $\delta\theta$, δx, δy, certains termes contiennent les variations de lon-

(*) *On the stresses of rigid arches*, etc., by William Bell (Institution des Ingénieurs civils de Londres séance du 5 décembre 1871, vol. XXXIII, n° 1507).

gueur δs de l'arc moyen, et expriment l'effet du raccourcissement ou de l'allongement de la fibre moyenne, dû à la force P normale à la section, ou à la variation de la température; d'autres termes, et ce sont les plus importants, expriment l'effet dû au moment fléchissant. M. Bell ne conserve que ces derniers dans ses calculs. Les formules se réduisent alors aux suivantes :

$$\delta\theta = \beta + \int_A^M \frac{M}{EI} ds,$$
$$\delta x = -\int_A^M \delta\theta dy,$$
$$\delta y = +\int_A^M \delta\theta dx.$$

Les deux dernières équations se prêtent à l'intégration par parties. On a, en effet,

$$\int \delta\theta dy = y\delta\theta - \int y d\delta\theta.$$

Mais $d\delta\theta = \frac{M}{EI} ds$, en vertu de la première équation différentiée.

Donc

$$\delta x = -\left[y\delta\theta\right]_A^M + \int_A^M \frac{My}{EI} ds,$$

et de même

$$\delta y = \left[x\delta\theta\right]_A^M - \int_A^M \frac{Mx}{EI} ds.$$

Appliquons ces équations à l'arc entier AB, nous aurons

$$\delta\theta = \beta + \int_A^B \frac{M}{EI} ds,$$
$$\delta x = -\left[y\delta\theta\right]_A^B + \int_A^B \frac{My}{EI} ds = 0,$$
$$\delta y = \left[x\delta\theta\right]_A^B - \int_A^B \frac{Mx}{EI} ds = 0.$$

Ces équations se simplifient dans les cas particuliers suivants.

1° Si l'arc est encastré en A, on aura en ce point $\delta\theta = 0$; donc la constante β est nulle;

2° Si, en outre, l'arc est encastré en B, la valeur de $\delta\theta$ est aussi zéro pour le point β, et, par suite, on a la relation

$$\int_A^B M ds = 0,$$

en faisant sortir le facteur constant $\frac{1}{EI}$ du signe somme.

3° Les termes $\left[y\delta\theta\right]_A^B$ et $\left[x\delta\theta\right]_A^B$ sont nuls quand la pièce est encastrée sur ses deux appuis, car alors $\delta\theta$ est nul aux limites.

Dans ce cas, on a les deux relations

$$\int_A^B Myds = 0,$$
$$\int_A^B Mxds = 0.$$

4° Dans le cas particulier où l'arc est symétrique par rapport à une verticale, les ordonnées n des deux points A et B étant les mêmes,

$$\left[y\delta\theta\right]_A^B = n\left[(\delta\theta)_B - (\delta\theta)_A\right] = n\int_A^B \frac{M}{EI}ds,$$

et la seconde équation prend la forme

$$n\int_A^B \frac{M}{EI}ds = \int_A^B \frac{My}{EI}ds.$$

Dans toutes ces formules, où nous supposons I constant, entrent les intégrales suivantes :

$$\int Mds, \quad \int Myds, \quad \int Mxds,$$

dont l'interprétation est immédiate. Supposons qu'on attribue à l'arc ds de la fibre moyenne un poids spécifique, positif ou négatif, égal à M. La somme $\int Mds$ sera le poids d'un arc fini, et $\int Myds$, $\int Mxds$ seront les moments de ce poids par rapport aux axes coordonnés.

Dans le cas des arcs encastrés sur les deux appuis, les poids (positifs ou négatifs) des divers éléments de la fibre moyenne se font équilibre.

Dans le cas d'un arc symétrique par rapport à la verticale, le centre de gravité des poids (positifs et négatifs) des divers éléments de la fibre moyenne est situé sur la corde AB.

Or, si l'on se reporte au tracé de la courbe d'équilibre, on verra que le poids spécifique M est représenté en chaque point par l'intervalle vertical MM' compris entre les deux seules courbes, dans l'hypothèse où la pièce n'est sollicitée que par des poids.

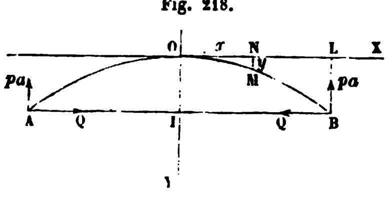
Ces remarques ont conduit M. Bell à une méthode graphique très-simple pour la recherche des moments fléchissants dans les pièces courbes. Ayant déterminé la poussée d'une manière arbitraire, on en déduit une courbe auxiliaire AM', au moyen de laquelle on essaye de vérifier les équations de condition; on modifie la poussée de manière que ces conditions soient satisfaites, et l'on arrive au résultat cherché après un petit nombre d'essais, que l'emploi du compas de proportion peut éviter, ainsi que l'a fait observer M. le major Brown (page 25 du mémoire précité).

Nous renverrons au mémoire de M Bell pour le développement de cette méthode, et l'application qu'on peut en faire à divers cas particuliers.

ARCS PARABOLIQUES.

245. Supposons un arc rigide AOB, posé en A et B sur deux appuis, et symétrique par rapport à la verticale OY qui passe à égale distance de ces deux appuis. Supposons d'abord que cet arc soit uniformément chargé, en projection horizontale, à raison de p unités de poids par unité de longueur. Soit $2a$ la portée AB, f la flèche IO.

Fig. 218.



Proposons-nous de déterminer la forme à donner à cet arc pour que le moment fléchissant M soit nul en tout point de la fibre moyenne.

Soient $x = \mathrm{ON}$, $y = \mathrm{NM}$ les coordonnées d'un point quelconque M.

Appelons Q la poussée horizontale, qui est la même aux points A et B, puisque l'arc n'est sollicité que par la pesanteur.

La composante verticale des réactions des appuis sera égale à pa.

On aura donc pour le moment fléchissant en M

$$\mathrm{M} = \mathrm{Q} \times (\mathrm{LB} - \mathrm{NM}) - pa \times \mathrm{LN} + p \times \mathrm{NL} \times \frac{\mathrm{NL}}{2},$$

ou bien

$$\mathrm{M} = \mathrm{Q}(f - y) - pa(a - x) + p\,\frac{(a - x)^2}{2}.$$

Pour que M soit nul en tous points, il faut qu'on ait identiquement

$$\mathrm{Q}f - \mathrm{Q}y + \frac{px^2}{2} - \frac{pa^2}{2} = 0.$$

On satisfait à ces équations en posant

$$\mathrm{Q}f = \frac{pa^2}{2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{Q} = \frac{pa^2}{2f},$$

et

$$\mathrm{Q}y = \frac{px^2}{2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{y}{f} = \frac{x^2}{a^2},$$

équation d'une parabole à axe vertical, passant par les trois points A, O, B.

La poussée horizontale, $\frac{pa^2}{2f}$ est égale en valeur absolue à la tension horizontale d'un câble parabolique de pont suspendu.

Dans ces conditions le moment fléchissant est nul en tous points, et la résultante des forces, y compris la réaction de l'un des appuis, est la force P de compression tangente à la fibre neutre; elle est égale à $\sqrt{\mathrm{Q}^2 + p^2x^2}$. Sa valeur maximum a lieu au point B. Elle est alors égale à $\sqrt{\mathrm{Q}^2 + p^2a^2}$.

Le rayon de courbure au point O est égal à $\frac{a^2}{2f}$.

Les moments fléchissants ne prennent une valeur différente de zéro que quand les charges sont inégalement réparties. Cherchons, par exemple, ce que deviennent les moments lorsqu'on enlève la charge sur la moitié de la portée.

Dans ce cas, les deux poussés horizontales Q', Q' des appuis A et B sont encore égales, et conformément à une remarque faite par M. Bresse sur les charges non symétriques (§ 221), Q' est la moitié de la poussée Q correspondante à la charge complète. On a donc $Q = \frac{pa^2}{4f}$. Les réactions verticales des appuis sont inégales. Leur somme est pa, et comme le centre de gravité de la charge est situé sur la verticale du milieu de la demi-corde AI, l'appui A porte $\frac{3}{4}pa$, et l'appui B, $\frac{1}{4}pa$.

Fig. 219.

Nous pouvons donc tracer sans tâtonnement la courbe d'équilibre de M. Bell. Cette courbe se composera de deux lignes distinctes. Du point B au point O, portion où l'on suppose qu'il n'y a aucune charge appliquée, la courbe ne sera autre chose que la direction de la résultante des forces Q' et $\frac{1}{4}pa$. Ce sera donc une droite, et cette droite passera au point O; car le rapport des composantes $\frac{\frac{1}{4}pa}{\frac{pa^2}{4f}}$ est égal au rapport $\frac{f}{a} = \frac{OI}{IB}$.

Le moment fléchissant est donc nul encore au point O.

Du point O au point B, la courbe est une parabobe tangente en O à la direction BO prolongée. Prenons, en effet, un point M quelconque, défini par ses coordonnées

$$x = -OP,$$
$$y = PM.$$

Le moment M, par rapport à ce point, des forces qui agissent sur l'arc MOB, est égal à la somme algébrique

$$M = Q' \times (f - y) - \frac{1}{4}pa \times (a - x) + \frac{1}{2}px^2.$$

Divisant par $Q' = \frac{pa^2}{4f}$, on aura, en grandeur et en signe, la longueur MM' de l'intervalle compris entre la courbe d'équilibre et la fibre neutre. Appelons y' l'ordonnée de la courbe d'équilibre. Nous aurons, en divisant par Q',

$$y' - y = (f - y) - f + \frac{fx}{a} + \frac{2fx^2}{a^2},$$

équation qui se réduit à

$$y' = \frac{fx}{a}\left(1 + \frac{2x}{a}\right).$$

C'est l'équation d'une parabole tangente en O à la direction $\frac{y'}{x} = \frac{f}{a}$, c'est-à-dire à OB;

elle passe au point A, car $x=a$ donne $y'=f$. Enfin elle coupe le prolongement de l'axe OX en K, au quart de la portée.

Le moment fléchissant est positif de B en O, et négatif de O en A. Il est nul aux trois points A, O, B. Il est maximum en valeur absolue en deux points, l'un situé dans la moitié de droite, l'autre dans la moitié de gauche. Conformément à la théorie de M. Bell, les valeurs des moments fléchissants sont représentées sur l'épure par les intervalles des deux courbes AMOB, AKOB, et la recherche du plus grand moment revient à celle du plus grand intervalle des deux lignes. Pour la moitié de droite, le point cherché est celui où la tangente à l'arc donné est parallèle à la corde BO. Prenons sur IO prolongée une quantité OH = OI, et joignons HB. Cette droite sera tangente en B à la parabole. Elle coupe OX au point R, au quart de la portée; menant par ce point RR' parallèle à OY, on obtient sur la parabole un point S où la tangente est parallèle à la corde OB. Donc S est le point cherché; il se trouve sur la verticale du quart de la portée, au milieu de la moitié non chargée. L'intervalle SS' est le quart de OH, c'est-à-dire le quart de la flèche f; donc le maximum des moments positifs, $Q' \times SS'$, est égal à $\frac{pa^2}{4f} \times \frac{1}{4} f = \frac{pa^2}{16}$.

Du côté gauche, le maximum s'obtiendra en égalant à zéro la dérivée de $y - y'$, ou de

$$y - \frac{f}{a} x - \frac{2fx^2}{a^2}.$$

On aura donc au point cherché

$$dy = \frac{f}{a} dx \left(1 + \frac{4x}{a}\right).$$

On a d'ailleurs

$$y = \frac{fx^2}{a^2} \qquad \text{et} \qquad dy = \frac{2fx}{a^2} dx;$$

divisant membre à membre, il vient

$$1 = \frac{1 + \frac{4x}{a}}{\frac{2x}{a}} = \frac{a}{2x} + 2,$$

et enfin, $x = -\frac{a}{2}$, ce qui correspond au point K.

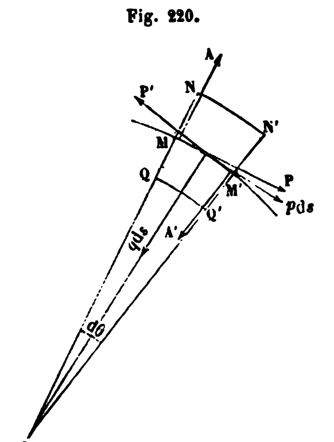
En ce point, l'ordonnée y' est nulle, et l'intervalle entre les deux courbes prend la valeur $KL = \frac{1}{4} f$, ce qui donne encore $\frac{pa^2}{16}$ pour la valeur absolue maximum du moment fléchissant négatif dans la moitié chargée.

On peut regarder $\frac{pa^2}{16}$ comme la limite pratique des moments fléchissants dans un arc parabolique reposant sur deux appuis.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA TRANSMISSION DES EFFORTS DANS LES PIÈCES COURBES.

246. Exprimons les conditions d'équilibre d'un fragment NQQ'N' de la pièce, compris entre deux plans transversaux perpendiculaires à la fibre moyenne MM'. Soit $d\theta$ l'angle des deux plans qui se coupent suivant l'arête C.

Fig. 220.



La force extérieure appliquée à l'élément considéré est du même ordre de grandeur que cet élément; nous pouvons la décomposer en deux forces, l'une pds, tangente à la fibre moyenne, l'autre qds, dirigée vers le centre de courbure. Les forces moléculaires dans le plan NQ se réduisent à une composante A dans le plan de la section, à une autre P, normale à ce plan, enfin à un couple M.

Les mêmes forces se rencontrent en A', P' et M' dans la section N'Q', changées de sens et augmentées de leurs différentielles.

Les équations d'équilibre sont au nombre de trois :

1° Composantes suivant la direction CM :

Appelons $d\varphi$ l'angle de la direction qds avec CM. Nous aurons :

$$A + P' \sin d\theta = A' \cos d\theta + pds \sin \varphi + qds \cos d\varphi,$$

équation qui, en remplaçant $\sin d\theta$ par $d\theta$, $\cos d\theta$ et $\cos d\varphi$ par l'unité, A' par $A + dA$ et P' par $P + dP$, et en supprimant les infiniment petits du second ordre, se réduit à

$$(1) \qquad dA = Pd\theta - qds.$$

2° Composantes suivant une direction normale à CM :

$$P + pds \cos d\theta = P' \cos d\theta + A \sin d\theta + qds \sin d\varphi;$$

cette équation se réduit de même à

$$(2) \qquad dP = pds - Ad\theta.$$

3° Moments par rapport à l'axe C. Appelons ρ le rayon de courbure CM; nous aurons

$$M' - M + (P - P' + pds)\,\rho = 0,$$

ou bien

$$dM - (dP - pds)\,\rho = 0.$$

Remplaçons dP par sa valeur (2); il vient

$$(3) \qquad dM + A\rho d\theta = dM + Ads = 0.$$

Cette dernière équation montre que $\frac{dM}{ds} = -A$, c'est-à-dire qu'en valeur absolue, l'effort tranchant est la dérivée du moment fléchissant par rapport à l'arc. On a ensuite

$$P = \frac{dA}{ds} + q\frac{ds}{d\theta} = \rho\left(\frac{dA}{ds} + q\right) = \rho\left(q - \frac{d^2M}{ds^2}\right).$$

Ces équations s'étendraient sans difficulté au cas où il y aurait des forces discontinues.

LIVRE SIXIÈME.

RÉSISTANCE DES SURFACES.

CHAPITRE PREMIER.

RÉSISTANCE DES ENVELOPPES DE CHAUDIÈRES.

---

247. Après avoir étudié les lois de la flexion et de la torsion des pièces prismatiques, droites ou courbes, c'est-à-dire des solides dont les dimensions transversales sont petites par rapport à la longueur, et qu'à certains égards on peut assimiler aux lignes géométriques, il conviendrait d'étudier l'équilibre élastique des solides analogues aux surfaces dont l'épaisseur seule est petite, et qui ont de grandes dimensions dans les deux sens. Le problème de la déformation des surfaces élastiques a depuis longtemps attiré l'attention des physiciens et des géomètres, et nous pouvons citer les travaux analytiques d'Euler, de Lagrange d'un Jacques Bernoulli, petit-fils du célèbre Jean de Bernoulli, de Mlle Sophie Germain, de Poisson, les recherches expérimentales de Chladni, les études plus récentes de Navier, de Cauchy, de Lamé (1), de M. Kirchhoff..... Tous ces travaux ont pour but principal la recherche des lois de la vibration des

---

(1) *Leçons de l'élasticité*, 14me, 15me, 16me leçon.

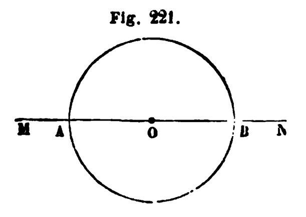
plaques et des membranes élastiques. Les équations générales contiennent à la fois les deux courbures de la surface vibrante; ce sont des équations aux différences partielles, qui ne peuvent s'intégrer que dans quelques cas particuliers.

Le problème de la résistance des enveloppes de chaudières est beaucoup plus élémentaire, et c'est la seule question que l'ingénieur ait à étudier. En général, les chaudières ont une forme cylindrique; elles sont terminées dans la longueur par des parois de forme courbe, et il s'agit de déterminer quelle tension se développe dans le métal lorsque la pression de la vapeur contenue dans l'enveloppe atteint sa limite extrême. Nous examinerons successivement les cas principaux qui peuvent se présenter, en nous bornant aux plus simples.

248. 1[er] Cas. — *Enveloppe cylindrique indéfinie à profil circulaire, soumise à des pressions normales uniformément réparties.*

Par l'axe O du cylindre, faisons passer un plan quelconque MN qui coupe l'enveloppe suivant deux génératrices A et B. Les efforts développés dans la matière suivant ces deux génératrices sont égaux entre eux, et indépendants de la direction du plan MN, à cause de la symétrie du profil et de l'égale répartition des pressions.

Fig. 221.



Supposons d'abord l'enveloppe soumise à une pression intérieure égale à p unités de poids par unité de surface; appelons ρ le rayon de la surface intérieure de l'enveloppe et e l'épaisseur du métal. Soit enfin R l'effort moyen par unité de surface développé dans le métal.

En ne considérant qu'une longueur de cylindre égale à l'unité, on voit sur-le-champ que les sections faites par le plan MN suivant les deux génératrices A et B doivent développer une résistance totale $2Re$, égale à la résultante des pressions exercées sur l'une des moitiés du cylindre. Or la somme de ces composantes est égale au produit de la pression p par le diamètre intérieur 2ρ de la chaudière. On a donc $Re = p\rho$, équation qui détermine la tension R.

Si la pression p s'exerce à l'extérieur de la chaudière, la même équation détermine encore la compression R de la matière par unité de surface, en ayant soin de prendre pour ρ le rayon *extérieur* de l'enveloppe, parce que c'est sur la surface extérieure que s'exerce la pression.

Si la pression p existe à l'intérieur, et qu'une pression p' existe à l'extérieur, on aura, en appelant ρ le rayon de la surface interne et ρ' le rayon de la surface externe,

$$Re = p\rho - p'\rho',$$

équation où les valeurs positives de R correspondent à des tensions, et les valeurs négatives à des pressions dans la matière de l'enveloppe.

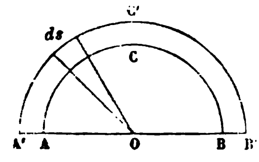
En général, la différence $\rho' - \rho$ est assez petite par rapport à ρ pour que l'on puisse remplacer ρ' par ρ dans le second membre de l'équation, ce qui donne :

$$(1) \qquad Re = \rho(p - p').$$

Ce résultat suppose que la tension R est également répartie dans l'épaisseur des parois A et B de l'enveloppe. Il est facile de remarquer que cette répartition égale n'est admissible qu'approximativement, et seulement lorsque l'épaisseur e est très-petite.

En effet, chaque arc infiniment petit, ds, pris sur une circonférence quelconque A'C'B', se trouvant soumis à une tension égale à R par unité de section, subit un allongement égal à $R \times \frac{ds}{E}$. L'allongement total pris par la circonférence extérieure A'C'B' est donc égal à $2\pi\rho' \times \frac{R}{E}$, et l'allongement total pris par la circonférence intérieure est de même égal à $2\pi\rho \times \frac{R}{E}$. Les deux circonférences, dont les rayons sont ρ et ρ' dans l'état naturel, doivent donc, par suite de l'ex-

Fig. 222.



tension, prendre des rayons respectivement égaux à $\rho\left(1+\frac{R}{E}\right)$, et à $\rho'\left(1+\frac{R}{E}\right)$, et l'épaisseur primitive $\rho'-\rho$ devient égale à $(\rho'-\rho)\left(1+\frac{R}{E}\right)$, c'est-à-dire qu'elle augmente dans le même rapport que les éléments de fibre.

Or nous avons vu (§ 15) qu'une tige, tirée par une force dans le sens de sa longueur, subit, en même temps qu'une extension, une contraction latérale. La paroi entière de la chaudière, étant soumise à un tel effort, doit diminuer d'épaisseur, tandis que l'hypothèse de la répartition égale des pressions sur toute l'épaisseur a pour conséquence géométrique et nécessaire un accroissement d'épaisseur : cette hypothèse conduit donc à une contradiction.

Lorsque l'épaisseur $\rho'-\rho$ est très-petite par rapport au rayon, l'inégalité des tensions dans les diverses fibres de la paroi est peu accentuée, et l'on peut sans erreur considérer la tension en un point quelconque comme sensiblement égale à la pression moyenne. Il n'en est plus de même lorsque l'épaisseur est très-forte; alors l'inégalité devient plus grande, et les fibres intérieures subissent une tension beaucoup plus élevée que les fibres extérieures. La paroi tend à se déchirer en commençant par les fibres du dedans.

Cet exemple nous montre que la solidité des chaudières ne croît pas proportionnellement aux épaisseurs ou aux quantités de matière. Si l'on double la pression de la vapeur dans une chaudière, il ne suffit pas, pour assurer la même résistance à l'enveloppe, d'en doubler l'épaisseur; il vaudrait mieux changer la matière de la paroi et adopter des matériaux plus résistants, pour avoir toujours une épaisseur moindre, et pour produire la répartition de tension la plus égale possible (1).

249. *Répartition des efforts dans les chaudières cylindriques*

---

(1) Cf § 69.

indéfinies à base circulaire. — Un prisme soumis à une extension subit une contraction latérale dont le coefficient peut être déterminé, soit par la théorie mathématique de l'élasticité, soit par l'expérience. Supposons ici ce coefficient connu.

Soit, par exemple, un prisme rectangulaire de longueur égale à l'unité, d'épaisseur très-petite et de largeur indéfinie; s'il est sollicité par une force uniformément répartie sur sa base, à raison de R unités de poids par unité de surface, sa longueur primitive, 1, deviendra sous cet effort $1 + \frac{R}{E}$, et son épaisseur décroîtra de la fraction $m\frac{R}{E}$ de sa valeur primitive, E étant le coefficient d'élasticité de la matière, m le coefficient de contraction, égal à $\frac{1}{2}$, d'après M. de Saint-Venant; d'autres auteurs, Wertheim, par exemple, le font égal à $\frac{1}{3}$; d'autres encore le font égal à $\frac{1}{4}$ (Cf. § 15).

Appliquons ces données à une chaudière indéfinie, cylindrique, à base circulaire et infiniment mince; soient p et $p' = p + dp$, les pressions par unité de surface à l'intérieur et à l'extérieur; r le rayon intérieur OA, $r' = r + dr$ le rayon extérieur OA'; soit enfin R la tension par unité de surface, développée dans la matière suivant les sections diamétrales AA', BB'.

Fig. 223.

La tension R nous sera donnée par l'équation d'équilibre de la demi-chaudière :

$$2R\,dr = 2pr - 2p'r' = 2pr - 2(p + dp)(r + dr)$$
$$= -2d(pr),$$

donc

$$(1) \qquad R = -\frac{d(pr)}{dr}.$$

La circonférence de la chaudière, subissant cette tension en tous

points, s'allonge dans le rapport de 1 à $1 + \frac{R}{E}$, ce qui donne au rayon r un allongement

$$(2) \qquad \delta r = r \times \frac{R}{E};$$

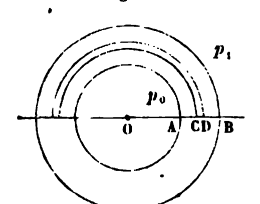
mais en même temps la contraction s'opère, et l'épaisseur dr varie de la quantité δdr,

$$(3) \qquad \delta dr = -mdr \times \frac{E}{R}.$$

Ces résultats sont applicables à chacun des anneaux concentriques infiniment petits dans lesquels on peut concevoir décomposée la couronne annulaire formant la section transversale d'une chaudière d'épaisseur finie AB (fig. 224).

Soient $OC = r$, $OD = r + dr$, le rayon intérieur et le rayon extérieur d'un tel anneau CD. Appelons p la pression (rapportée à l'unité de surface) des anneaux intérieurs sur l'anneau CD; $p + dp$ la pression des anneaux extérieurs.

Fig. 224.



Les équations (1), (2), (3) seront applicables.

Différentions l'équation (2); il viendra

$$d\delta r = dr \times \frac{R}{E} + r \times \frac{dR}{E};$$

mais

$$d\delta r = \delta dr = -mdr \frac{R}{E},$$

donc

$$(4) \qquad (1 + m)Rdr + rdR = 0,$$

et par suite

$$\frac{dR}{R} = -(1 + m)\frac{dr}{r},$$

ou bien

(5) $\qquad R = \frac{A}{r^{1+m}}$, A désignant une constante arbitraire.

Substituant cette valeur de R dans l'équation (1), il viendra une équation qui fera connaître p en fonction de R. On a en effet

$$d(pr) = -\mathrm{R}dr = -\frac{\mathrm{A}dr}{r^{1+m}},$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$pr = \mathrm{C} + \frac{\mathrm{A}}{mr^m},$$

et

(6) $$p = \frac{\mathrm{C}}{r} + \frac{\mathrm{A}}{mr^{m+1}},$$

C étant une nouvelle constante.

Les constantes A et C se détermineront en exprimant que, pour $r = \mathrm{OA} = r_0$, rayon intérieur de la chaudière, $p = p_0$, pression intérieure, et que, pour $r = \mathrm{OB} = r_1$ rayon extérieur, $p = p_1$.

On a donc à la fois

$$p_0 = \frac{\mathrm{C}}{r_0} + \frac{\mathrm{A}}{mr_0^{m+1}},$$
$$p_1 = \frac{\mathrm{C}}{r_1} + \frac{\mathrm{A}}{mr_1^{m+1}};$$

donc

(7) $$\mathrm{A} = m\frac{p_0r_0 - p_1r_1}{\frac{1}{r_0^m} - \frac{1}{r_1^m}},$$

et la répartition des tensions sera donnée par la formule (5), où l'on mettra pour A la valeur (7) :

$$\mathrm{R} = \frac{m(p_0r_0 - p_1r_1)}{\left(\frac{1}{r_0^m} - \frac{1}{r_1^m}\right)} \times \frac{1}{r^{m+1}} = \frac{m(p_0r_0 - p_1r_1)(r_0r_1)^m}{r_1^m - r_0^m} \times \frac{1}{r^{m+1}}.$$

R est nul lorsqu'on a à la fois $p_0 = 0$, $p_1 = 0$, et plus généralement, quand $p_0r_0 = p_1r_1$. On voit qu'il n'est pas nul si l'on a simplement $p_0 = p_1$. Si $p_0r_0 > p_1r_1$, R décroît de l'intérieur à l'extérieur. La pression p, exercée par un anneau sur l'anneau voisin, est donnée

par l'équation (6), qui devient, en substituant à A et à C leurs valeurs définitives,

$$p = \frac{p_0 r_0^{m+1} - p_1 r_1^{m+1}}{r_0^m - r_1^m} \times \frac{1}{r} + \frac{(p_0 r_0 - p_1 r_1)(r_0 r_1)^m}{r_1^m - r_0^m} \times \frac{1}{r^{m+1}}.$$

Si l'on fait $m = \frac{1}{2}$, la formule (8) devient

$$R = \frac{(p_0 r_0 - p_1 r_1)\sqrt{r_0 r_1}}{2(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_0})} \times \frac{1}{r\sqrt{r}}.$$

Ces formules supposent que l'enveloppe est en équilibre; elles seraient fausses si on les appliquait à des enveloppes soumises à des vibrations faisant intervenir les forces d'inertie. On ne doit pas, par exemple, les employer pour calculer la tension du métal d'une pièce de canon pendant le tir.

On trouvera dans les *Annales des ponts et chaussées* (septembre 1876, n° 40), un article de M. Brune où la même question est traitée d'une manière un peu différente (1).

250. 2ᵉ Cas — *Enveloppe cylindrique à profil circulaire, limitée dans la longueur à deux couvercles de forme indéterminée. Recherche de la tension ou pression longitudinale.*

Appelons encore p la pression intérieure, p' la pression extérieure par mètre carré de surface; R' étant l'effort développé dans la matière suivant les génératrices du cylindre, on a pour l'équilibre l'équation

$$R' \times 2\pi\left(\frac{\rho + \rho'}{2}\right) \times e = \pi\rho^2 p - \pi\rho'^2 p'.$$

Cette équation se simplifie lorsque la petitesse de l'épaisseur par rapport à ρ permet de confondre ρ et ρ', et elle devient

$$R'e = \frac{1}{2}\rho(p - p'),$$

(1) Cet article renferme aussi une théorie de la plaque circulaire symétriquement chargée, et une solution du problème de la plaque circulaire d'égale résistance.

En comparant l'équation (2) à l'équation (1), on voit que $R' = \frac{1}{2}R$, c'est-à-dire que dans une chaudière cylindrique la tension longitudinale est la moitié de la tension transversale.

Nous chercherons plus loin quelle forme il est préférable de donner aux couvercles d'une chaudière cylindrique à section circulaire.

CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DES CHAUDIÈRES.

251. On calcule en France l'épaisseur à donner à une chaudière cylindrique de machine à vapeur, par une formule contenue dans l'ordonnance royale du 22 mai 1843 :

$$e = 0{,}0018\,nd + 0^{m}{,}003.$$

Cette formule s'applique seulement aux chaudières à pression intérieure; e est, en mètres, l'épaisseur à donner à la paroi; d est, en mètres, le diamètre de la chaudière, et n le nombre net d'atmosphères auquel la pression intérieure peut s'élever. Ce nombre s'obtient en retranchant une unité du nombre d'atmosphères indiquant la pression totale de la vapeur dans la chaudière. Une atmosphère équivaut, comme on sait, au poids d'une colonne de mercure de 760 millimètres, soit à environ $1^{k}.03$ par centimètre carré. Pour les chaudières à basse pression, le premier terme de la formule est nul ou négligeable; dans ce cas, on peut donner telle forme qu'on voudra au profil de l'enveloppe, elle sera toujours en équilibre entre les pressions exercées sur ses deux faces. Le tracé du profil s'exécute alors d'après d'autres considérations. Le terme $0^{m}.003$ de la formule est destiné à donner un surcroît de garantie pour la résistance et la durée de la chaudière. Le calcul des tensions qui correspondent aux épaisseurs assignées par cette formule démontre que la tension transversale s'élève au plus à $2^{k},80$ par millimètre carré. Cette faible limite se justifie en observant que les fortes pressions ne s'obtiennent dans les chaudières que sous de hautes températures,

et que l'élévation de la température réduit la résistance du métal. Pour les chaudières des locomotives, qui reçoivent le feu intérieurement, on diminue d'un tiers les résultats fournis par la formule.

Lorsque la chaudière doit supporter une pression extérieure, l'ordonnance du 22 mai 1843, complétée par une instruction ministérielle du 17 décembre 1848, prescrivait d'ajouter moitié en sus à l'épaisseur indiquée par la formule, et en outre de consolider le profil par des anneaux en fer forgé destinés à prévenir les déformations. Cette précaution est nécessaire lorsque la pression est extérieure, parce que les moindres déformations du profil tendent à s'accroître sous l'action des forces qui compriment l'enveloppe; elle est entièrement inutile lorsque la pression est intérieure, ces déformations tendant au contraire à s'effacer. En d'autres termes, la forme circulaire est pour les enveloppes une forme d'équilibre; mais l'équilibre est stable si la plus grande pression est intérieure à l'enveloppe, et il est instable dans le cas contraire.

L'ordonnance de 1843 est aujourd'hui remplacée par un décret du 25 janvier 1865, qui supprime toutes les mesures préventives, sauf l'épreuve préalable de la chaudière. Cette épreuve se fait avec la presse hydraulique; la pression d'épreuve, autrefois fixée au triple de la pression nette de la vapeur dans la chaudière en service, a été réduite au double par le même décret (1).

Les chaudières à basse pression n'ont pas besoin de recevoir une forme particulière d'équilibre, et en général, on leur donne le profil qui leur assure le contact le plus étendu avec le feu. Aussi, lorsque la pression augmente accidentellement, l'enveloppe est exposée à se déchirer. Contrairement à un préjugé fort répandu, les chaudières à basse pression présentent en somme moins de sécurité que les chaudières à haute pression ou à pression moyenne; la forme d'équilibre et les épreuves donnent pour celles-ci de précieuses garan-

(1) Voir dans les *Annales des ponts et chaussées*, juin 1876, Mémoire n° 29, la circulaire du *Board of trade*, contenant les instructions pour les contrôleurs chargés de l'inspection des chaudières en Angleterre.

ties, et d'ailleurs les augmentations subites de tension y sont beaucoup moins à craindre.

Une surface métallique, mince et plane, soumise à un excès de pression sur l'une de ses faces, fléchirait nécessairement si l'on ne lui donnait de la rigidité transversale au moyen d'armatures. Ainsi les parois de la boîte à feu d'une locomotive, lesquelles sont planes et soumises à une pression extérieure de 8 à 10 atmosphères, doivent être renforcées, en haut, par des barres fixées de champ, et latéralement, par un entretoisement qu'on opère à l'aide de boulons, pour les réunir invariablement aux parois voisines de la chaudière.

On comprend d'après tous ces détails quelles difficultés on rencontre pour augmenter notablement la pression de la vapeur dans les chaudières des locomotives. Il serait tout à fait conforme à la théorie mécanique de la chaleur de pousser plus loin la pression, jusqu'à 16 atmosphères par exemple ; mais pour y parvenir, il faudrait changer la matière de l'enveloppe, substituer à la tôle de fer un métal plus résistant, comme la tôle d'acier. On l'a essayé, mais les expériences n'ont pas encore donné de résultats bien satisfaisants (1).

252. 3ᵉ Cas. — *Enveloppe sphérique.*

Appelons toujours e l'épaisseur uniforme de l'enveloppe, ρ et ρ' les rayons des faces internes et externes, p et p' les pressions par unité de surface à l'intérieur et à l'extérieur. Nous aurons

$$R'(\rho + \rho')\,e = \rho^2 p - \rho'^2 p',$$

ou, en négligeant e par rapport à ρ,

$$R'e = \frac{1}{2}\,\rho(p - p'). \quad (3)$$

(1) On commence à employer l'acier pour les parois des chaudières des machines marines, mais on limite en général cet emploi aux parties qui ne sont pas vues directement par le feu.

La tension dans une enveloppe sphérique est donc la moitié de la tension transversale d'une enveloppe cylindrique de même diamètre : elle est égale à la tension longitudinale (§ 250).

253. *Répartition des tensions dans l'épaisseur des chaudières sphériques.* Nous admettrons comme un fait d'expérience qu'une plaque élastique d'épaisseur ε, soumise dans tous les sens à une tension R par unité de section, subisse une réduction d'épaisseur $\delta\varepsilon$ proportionnelle au produit $\frac{\varepsilon R}{E}$, E étant le coefficient d'élasticité de la matière, de sorte qu'on puisse poser

$$\delta\varepsilon = -m\frac{\varepsilon R}{E},$$

m étant un coefficient constant, positif et moindre que l'unité. Cette loi étant admise, on peut appliquer aux surfaces sphériques soumises à une pression intérieure la méthode que nous avons suivie pour les tuyaux cylindriques indéfinis.

Considérons d'abord une enveloppe sphérique infiniment mince; soient r et $r + dr$ les rayons des surfaces qui la limitent à l'intérieur et à l'extérieur; p et $p + dp$ les pressions par unité de surface exercées normalement sur toute l'étendue de ces deux surfaces.

L'équation d'équilibre de l'hémisphère nous donne

$$(1)\qquad R \times 2\pi r dr = p \times \pi r^2 - (p + dp) \times \pi (r + dr)^2 = -\pi d(pr^2),$$

donc

$$R = -\frac{d(pr^2)}{2rdr}.$$

La tension R par unité de section produit un allongement proportionnel $\frac{R}{E}$ sur tous les éléments de longueur tracés sur la sphère; le rayon r subit aussi cet allongement ; donc

$$(2)\qquad \delta r = r\frac{R}{E};$$

mais en même temps l'épaisseur dr subit une contraction donnée par l'équation

$$\delta dr = -mdr\frac{R}{E}. \quad (3)$$

Si de là nous passons à une épaisseur finie, en appelant p la pression exercée par la couche de rayon r sur la couche de rayon $r+dr$, r_0 et r_1 le rayon interne et le rayon externe, p_0 et p_1 les pressions correspondantes, nous aurons d'abord, comme pour une chaudière cylindrique,

$$R = \frac{A}{r^{1+m}}, \quad (4)$$

A étant une constante; cette équation se déduit des équations (2) et (3). Substituant dans l'équation (1), il vient

$$d(pr^2) = -\frac{2Ardr}{r^{1+m}} = -\frac{2Adr}{r^m},$$

et, en intégrant,

$$pr^2 = C + \frac{2A}{(m-1)r^{m-1}}, \quad \text{ou bien} \quad p = \frac{C}{r^2} + \frac{2A}{(m-1)r^{m-3}}.$$

Pour déterminer les constantes, nous exprimerons que pour $r=r_0$, $p=p_0$, et que pour $r=r_1$, $p=p_1$.

Il vient

$$\frac{C}{r_0^2} + \frac{2}{(m-1)r_0^{m-3}}A = p_0,$$
$$\frac{C}{r_1^2} + \frac{2}{(m-1)r_1^{m-3}}A = p_1.$$

On en déduit

$$A = \frac{p_0r_0^2 - p_1r_1^2}{\frac{2}{m-1}\left(\frac{1}{r_0^{m-1}} - \frac{1}{r_1^{m-1}}\right)},$$

et enfin

$$R = \frac{m-1}{2} \frac{p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2}{\frac{1}{r_0^{m-1}} - \frac{1}{r_1^{m-1}}} \times \frac{1}{r^{m+1}}.$$

254. Pour terminer les chaudières cylindriques dans le sens de la longueur, il serait rationnel de placer à chaque extrémité deux enveloppes demi-sphériques se raccordant suivant un grand cercle à la surface convexe du cylindre. La tension dans chaque hémisphère serait la même que la tension longitudinale du reste de la chaudière. L'usage est de substituer à ces deux demi-sphères des calottes sphériques d'un rayon plus grand, qui, au lieu de se raccorder avec la chaudière, en coupent la paroi sous un certain angle. Cet angle est soumis à des variations d'amplitude, par suite de l'extension du métal sous l'action des pressions supportées par l'enveloppe. Mais la cornière qui assemble les deux surfaces nourrit assez l'angle pour restreindre ces variations entre de faibles limites.

Le danger des couvercles plats a été mis en évidence par un accident arrivé pendant le levage du pont de Britannia au moyen de presses hydrauliques (1).

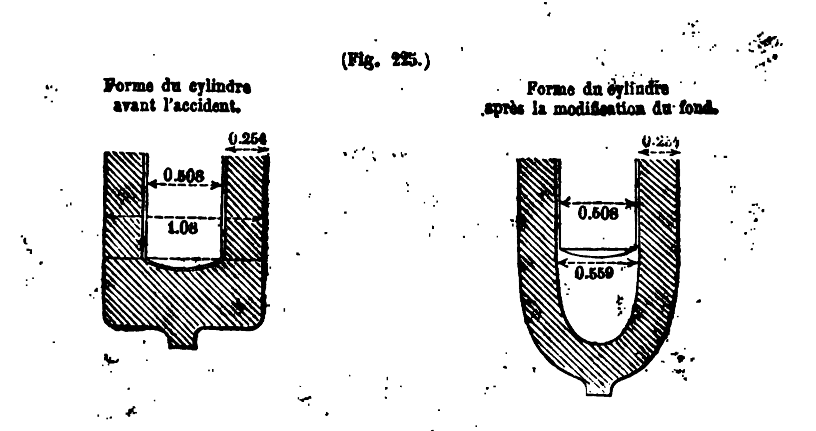
Un cylindre en fonte, de $0^m.559$ de diamètre intérieur, de $2^m.748$ de hauteur totale, de $0^m.254$ d'épaisseur, pesant 13 tonnes 1/2, servait de corps de pompe à un piston plongeur de $0^m.508$ de diamètre et de $1^m,83$ de course. Le fond du cylindre, au lieu d'être profilé suivant une courbe circulaire raccordée avec les parois latérales, était à peu près plat. Les tensions moyennes n'étaient pas très-grandes, bien que le poids soulevé par le piston fût de 1.164 tonnes : mais l'inégalité de distribution des tensions due à la grande épaisseur de la fonte, et l'incompatibilité des déformations simultanées du fond presque plat et des parois latérales, causèrent un accident qui

(1) Voyez *Annales des mines*, 1851, t. XX, p. 433, article de M. Ch. Couche.

faillit avoir de très-graves conséquences. On levait avec cette presse une travée du pont tubulaire, qui a 137 mètres de longueur; elle était arrivée à $7^m.30$ de hauteur, quand le fond du cylindre se détacha tout à coup; la travée abandonnée par le piston qui devait la soutenir, fut heureusement retenue sur ses appuis de sûreté.

Pour continuer le levage on modifia la forme du corps de pompe et l'on substitua aux fonds plats des fonds ayant la forme ellipsoïdale commandée par la théorie.

(Fig. 225.)



255. — 4° Cas. — *Enveloppe cylindrique à profil faiblement elliptique.*

Dans les profils circulaires, nous n'avons eu à constater que des tensions, soit longitudinales, soit transversales, mais toujours tangentes à la surface. Ici se développent non-seulement des tensions, mais encore des moments fléchissants, comme dans une poutre soumise à l'action de forces transversales. Pour que ce phénomène puisse se produire, il est nécessaire que l'enveloppe ait une certaine raideur, car si elle était éminemment flexible, le profil circulaire conviendrait seul pour l'équilibre; de plus, l'équilibre serait instable si la pression s'exerçait de dehors en dedans.

La recherche de la déformation d'une enveloppe à profil elliptique est une application des formules de la flexion des pièces courbes; le calcul se simplifie quand on suppose à l'ellipse une faible excentricité.

Soit ABA'B' la fibre moyenne de l'enveloppe; nous supposerons que le cylindre ait, perpendiculairement au plan de la figure, une longeur égale à l'unité. Menons par le centre O de l'ellipse les axes A'A, BB'.

Fig. 226.

Soit p la pression nette qui s'exerce intérieurement au vase, c'est-à-dire l'excès de la pression intérieure sur la pression extérieure.

Coupons le vase par le plan AA'; les résultantes des forces élastiques développées dans chacune des deux sections A et A' font équilibre à la résultante des pressions exercées sur tout le périmètre intérieur de l'ellipse; or cette résultante est aussi la résultante des pressions exercées sur le diamètre AA', qui pris avec l'arc A'BA, achève de fermer le contour A'BA; il résulte de là, et de la symétrie de la figure par rapport au plan AA', que la somme des forces élastiques développées dans la section A est égale à pa, si l'on désigne par a le demi grand axe OA. La résultante, d'ailleurs, ne passe pas nécessairement au point A lui-même; appelons k la distance du point A à son point d'application C. Nous compterons la distance k positivement de A vers O, négativement en sens contraire. On voit que les actions moléculaires developpées au sommet A de l'ellipse se réduisent en définitive à une force appliquée en A, perpendiculairement à AA', et à un couple, dont le moment est égal au produit de cette force par la distance AC.

Considérons une section transversale M, et cherchons le moment fléchissant qui s'exerce dans cette section.

Soient x, y les coordonnées du point M. La somme des moments des pressions exercées de A en M est égale à la somme des moments des pressions exercées sur les deux droites PM, PA qui forment avec l'arc AM un contour fermé; il y a de plus à tenir compte du moment, par rapport à M, de la réaction mutuelle des deux parties de l'enveloppe qui se réunissent au point A. Le moment de la force pa, appliquée en C, est positif, puisque cette force tend à augmenter la courbure de l'arc au point M; les moments des pressions élémen-

taires réparties le long de MA, ou réparties le long des droites MP, PA, tendent à redresser l'arc et sont négatifs. Nous aurons donc

$$M = pa \times PC - \frac{1}{2} p \times \overline{MP}^2 - \frac{1}{2} p \times \overline{PA}^2,$$

ou bien

$$M = pa \times (a - x - k) - \frac{1}{2} p [y^2 + (a - x)^2].$$

Si l'on fait dans cette équation

$$x = a,$$

il vient

$$M = -pak,$$

de sorte que *pak* est la valeur changée de signe du moment fléchissant au point A ; appelons ce moment M_0, et nous aurons

$$M = M_0 + pa(a - x) - \frac{1}{2} p(a - x)^2 - \frac{1}{2} py^2 = M_0 + \frac{1}{2} p(a^2 - x^2 - y^2).$$

On peut chasser y de cette équation au moyen de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où b désigne le demi petit axe OB.

On en déduit

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Substituant et réduisant, il viendra

$$M = M_0 + \frac{1}{2} p \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Dans cette équation, on ne connaît pas encore M_0; pour le déterminer considérons l'arc AB comme une pièce courbe, soumise en chacun de ses points au moment fléchissant M.

La loi de déformation de l'arc sera exprimée par l'équation

$$\theta' - \theta = \int \frac{\mathrm{M}ds}{\mathrm{EI}} + \beta,$$

où E désigne le coefficient d'élasticité, I le moment d'inertie, ds l'élément de l'arc, β une constante [§ 214, éq. (3)]. Prenons l'intégrale entre les points A et B, et observons qu'en ces points extrêmes, la déviation angulaire des normales est nulle à cause de la double symétrie de la figure; on en conclut

$$\beta = 0 \quad \text{et} \quad \int_{x=o}^{x=a} \mathrm{M}ds = 0.$$

Cette équation achève de déterminer le moment inconnu M_o.

Nous avons donc l'équation

$$\mathrm{M}_o \int_{x=o}^{x=a} ds + \frac{1}{2} p \frac{a^2 - b^2}{a^2} \int_{x=o}^{x=a} (a^2 - x^2) ds = 0.$$

La première intégrale représente la longueur S de l'arc AB, qu'on peut supposer connue.

La seconde se décompose en deux termes, dont le premier est

$$\frac{1}{2} p(a^2 - b^2) \times \mathrm{S};$$

le second,

$$-\frac{1}{2} p \frac{a^2 - b^2}{a^2} \int_o^a x^2 ds,$$

peut s'obtenir approximativement lorsque l'excentricité de l'ellipse est très-petite. En effet, $\int x^2 ds$ est la somme des moments d'inertie de l'arc AB par rapport à l'axe des y. Si cet arc AB appartenait à une circonférence de rayon égal à a, on aurait

$$\int_{x=o}^{x=a} x^2 ds = \frac{1}{2} \left(\int_{x=o}^{x=a} x^2 ds + \int_{x=o}^{x=a} y^2 ds \right) = \frac{1}{2} \int a^2 ds = \frac{1}{2} a^2 \mathrm{S}.$$

Lorsque les demi-axes a et b sont peu différents l'un de l'autre,

on peut continuer à faire usage de cette formule, dans laquelle S représente le quart du périmètre de l'ellipse AB.

L'équation précédente devient ainsi

$$M_0 S + \frac{1}{2} p(a^2 - b^2) S - \frac{1}{4} p(a^2 - b^2) S = 0.$$

Supprimons le facteur S et réduisons; il viendra

$$M_0 = -\frac{1}{4} p(a^2 - b^2).$$

Par suite, le moment fléchissant en un point quelconque M, défini par son abscisse x, est donné par la relation

$$M = \frac{1}{4} p \frac{a^2 - b^2}{a^2} (a^2 - 2x^2).$$

Si $a = b$, ou si le profil était circulaire, on aurait en tous points $M = 0$. Si a est différent de b, M change de signe au point

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

On peut se servir de cette valeur de M pour calculer les limites de la charge de la matière, en appliquant la formule générale

$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mv}{I},$$

dans laquelle P doit recevoir une valeur négative, parce que cette force représente un effort d'extension; P varie d'ailleurs en valeur absolue entre deux limites assez étroites, pa au point A, pb au point B. Soit e l'épaisseur de l'enveloppe; nous aurons pour une longueur égale à l'unité

$$\Omega = e,$$
$$= \frac{1}{12} e^3;$$

es limites de v seront

$$+\frac{e}{2} \text{ et } -\frac{e}{2},$$

et la plus grande valeur absolue de la tension s'obtiendra en faisant

$$v=+\frac{e}{2}.$$

Appliquons cette formule au point A; nous aurons

$$P=-pa,$$
$$M=M_0=-\frac{1}{4}p(a^2-b^2),$$
$$v=+\frac{e}{2}.$$

Donc, en prenant R en valeur absolue,

$$R=\frac{pa}{e}+\frac{3}{2}p\frac{(a^2-b^2)}{e^2}=\frac{pa}{e}\left(1+\frac{3}{2}\frac{a^2-b^2}{ae}\right).$$

Pour employer cette formule, on doit y introduire les valeurs des demi-axes a et b pris après la déformation. On les trouvera en fonction des demi-axes dans l'état naturel, en appliquant aux points A et B les formules de la déformation des pièces courbes, c'est à-dire en calculant au moyen des formules (10) et (11) de la page 392, les valeurs des variations $x'-x$, $y'-y$, relatives à l'arc total AB. Nous nous bornerons ici à donner les résultats approximatifs de ces calculs. qui ne présentent aucune difficulté.

Appelons a, b, les valeurs des demi-axes après les déformations, a_0, b_0 les valeurs primitives de ces mêmes demi-axes; nous aurons

$$a-a_0=-\frac{1}{2}(a+b)\frac{pa}{Ee}\left(\frac{a^2-b^2}{e^2}-1\right),$$
$$b-b_0=+\frac{1}{2}(a+b)\frac{pb}{Ee}\left(\frac{a^2-b^2}{e^2}+1\right).$$

La somme $a+b$ est sensiblement égale à a_0+b_0, et mesure le diamètre moyen de la chaudière, qui reste à peu près constant.

La discussion de ces formules démontre :

1° Que sous l'action d'une pression intérieure, l'excentricité tend à diminuer, tandis que sous l'action d'une pression extérieure, elle tend au contraire à augmenter;

2° Que la tension R au sommet du grand axe augmente très-rapidement avec l'excentricité du profil.

Enfin, dans le cas où la pression est extérieure, l'analyse assigne une limite inférieure à l'épaisseur e, pour que l'enveloppe ait par elle-même une raideur suffisante. Pour obtenir cette limite, cherchons le rapport de l'excentricité de l'ellipse après la déformation à l'excentricité primitive, c'est-à-dire le rapport de $\sqrt{\frac{a-b}{a}}$ à $\sqrt{\frac{a_0-b_0}{a_0}}$, puisque l'on confond ensemble $a+b$ et a_0+b_0. Ce rapport est sensiblement égal à

$$\sqrt{\frac{1}{1+\frac{p(a+b)^2}{2Ee^2}}}.$$

Il sera réel ou imaginaire suivant que le dénominateur sera positif ou négatif. Lorsque p est positif, c'est-à-dire lorsque la pression est intérieure, le dénominateur est aussi positif, et l'excentricité nouvelle est réelle comme l'excentricité primitive; dans ce cas, les formules sont applicables, et si l'on a $a_0 > b_0$, on aura aussi $a > b$, bien que a soit $< a_0$ et $b > b_0$. Lorsque p est négatif, il faut pour que le rapport des excentricités soit réel, que l'on ait l'inégalité

$$2Ee^2 + p(a+b)^2 > 0;$$

autrement la déformation du profil n'est pas limitée à une figure voisine de la figure primitive, et l'enveloppe, à moins qu'on ne la renforce par des armatures, s'écrase sous la pression qu'elle supporte de dehors en dedans (1).

256. Belanger, dans le § 12 de sa *Théorie de la résistance*

(1) V. Bresse, *Cours de mécanique appliquée*, 1re partie, chap. v, § 133.

et la flexion plane des solides (1), donne un exemple du calcul de la résistance d'une chaudière elliptique, qui montre bien l'influence de l'excentricité.

Une chaudière à foyer intérieur, dont le diamètre moyen est d'un mètre, supporte du dehors en dedans une pression de 4 atmosphères, ou d'environ 40 000 kilogr. par mètre carré. L'épaisseur est de 15 millimètres. On trouve que la chaudière ayant pour demi-axes primitifs les quantités

$$a_0 = 0^m,507,$$
$$b_0 = 0^m,493,$$

prend par suite de la déformation les demi-axes

$$a = 0,510,$$
$$b = 0,490,$$

de sorte que son excentricité augmente ; la pression maximum, qui a lieu au sommet du grand axe, a pour valeur

$$R = 1\,360\,000\,(1 + 3,92) = 6\,691\,200.$$

Si le profil de la chaudière était rigoureusement circulaire, la pression s'élèverait seulement à $1^k,36$ par mill. carré ; la faible excentricité qui lui a été donnée rend quintuple la pression-limite. Si l'on avait déduit R des valeurs $0^m,507$ et $0^m,493$ des demi-axes primitifs, on aurait trouvé

$$R = 1352000\,(1 + 2,77) = 5\,097\,040 \text{ kil.},$$

résultat trop faible d'un tiers environ. Lorsqu'au contraire la pression agit de dedans en dehors, l'excentricité diminuant, on peut employer dans la formule les valeurs primitives des demi-axes, a_0 et b_0, et elle donnera une limite supérieure de la résistance par unité de surface.

(1) Paris, Mallet-Bachelier, 1858.

CHAPITRE II.

RÉSISTANCE DES PORTES D'ÉCLUSE.

257. Aux problèmes sur la résistance des surfaces, on peut annexer certaines questions relatives aux planchers, aux toitures, aux portes d'écluse. Nous choisissons les portes d'écluse comme un des exemples les plus intéressants d'une étude de cette nature. Le problème est extrêmement complexe quand on veut le traiter en toute rigueur (1) ; mais la méthode que nous allons exposer est une méthode simplifiée, que l'on peut suivre dans les applications.

Les écluses sont, en général, munies d'une paire de portes symétriques et symétriquement placées, qui, mobiles autour de leurs *poteaux-tourillons*, ferment le passage en s'arc-boutant l'une contre l'autre, ou bien le laissent libre en s'effaçant dans les *enclaves* réservées dans les bajoyers. Chaque porte consiste essentiellement en un cadre rectangulaire ; les côtés verticaux de ce cadre sont formés par le poteau-tourillon et le *poteau busqué*, et les côtés horizontaux par la traverse supérieure et la traverse inférieure. Les portes fermées dessinent en plan un chevron ; leurs traverses inférieures portent sur la *saillie du busc*, leurs poteaux-tourillons sur la maçonnerie du *chardonnet*, enfin leurs poteaux busqués sont en contact, et se fournissent un mutuel appui. L'intérieur du cadre est garni de pièces horizontales appelées *entretoises*, ou bien de pièces verticales appelées *aiguilles ;* les premières rattachent le poteau-tourillon au poteau busqué ; les secondes rattachent la traverse haute à la traverse basse ; d'autres pièces, que nous indiquerons plus loin, sont destinées à donner de la rigidité aux assemblages des éléments principaux de l'ossature ; enfin le *bor-*

(1) Voir *Annales des ponts et chaussées*, année 1867, n° 152, t. XIII, un mémoire de M. Lavoinne *sur la flexion des entretoises et du bordage dans les portes d'écluse.*

dage recouvre toute cette charpente, et reçoit directement la pression de l'eau.

On peut considérer la porte d'écluse dans deux situations principales, quand elle est fermée, et quand elle est ouverte. Quand elle est fermée, elle supporte sur la face d'amont une pression supérieure à la pression qui s'exerce sur la face d'aval, et elle se trouve dans les conditions les plus défavorables de résistance lorsque la différence du niveau de l'eau dans les deux biefs est la plus grande possible. Lorsque la porte est ouverte, elle n'est plus soumise qu'à l'action de la pesanteur, qui tend à la fois à la renverser autour de la crapaudine du poteau-tourillon en arrachant le collier, et à déformer le cadre rectangulaire en faisant tasser d'une certaine quantité le poteau busqué. Nous examinerons successivement ces deux situations.

258. Considérons d'abord l'équilibre de la porte fermée.

Soit ABC le busc, donné par la largeur AC du pertuis libre, et par la flèche BF du chevron au milieu de cette ouverture.

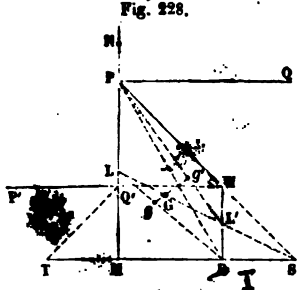
Fig. 227.

AE, CD sont les enclaves où les portes s'engagent, en retraite sur le parement des bajoyers. A et C sont les deux chardonnets voisins des axes de rotation. Nous représenterons par $2a$ la distance AC des points d'appui latéraux des portes, et par f la flèche FB. Il en résulte que la longueur AB ou BC de chaque vantail est égale à $\sqrt{a^2 + f^2}$, quantité que nous représenterons par l.

Coupons le vantail par un plan vertical normal à sa direction, et soit MN sa hauteur (fig. 228) ; soit PQ le niveau de l'eau sur la face d'amont, P'Q' le niveau de l'eau sur la face d'aval. Pour trouver la pression totale exercée par la porte sur chaque vantail, menons par le point M une horizontale indéfinie sur laquelle nous pren-

drons les longueurs MS = MP, MT = MQ'; joignant PS et Q'T, nous aurons des triangles isocèles rectangles PMS, Q'MT, dont les ordonnées horizontales mesureront en chaque point la pression par unité de surface exercée en ce point par l'eau, et dont les aires mesureront les pressions totales. Retranchant du grand triangle PMS la surface du petit, HRS = TMQ', sans altérer les hauteurs des ordonnées représentatives des pressions locales, nous obtenons en définitive un contour polygonal, PHR, dont les ordonnées représentent les poussées nettes subies par la porte; elles croissent de P en Q' parce que, sur cette région, l'une des faces de la porte est seule soumise à l'action de l'eau, et elles restent constantes de Q' en M, région où l'eau agit sur les deux faces.

Fig. 228.



La pression totale est donc proportionnelle à l'aire du trapèze PHRM, dans laquelle les bases PM et RH sont les hauteurs d'eau, h et h' de chaque côté de la porte, comptées à partir du seuil M ou de la traverse basse, et la hauteur MR=Q'H=PQ' est la différence, $h-h'$, de ces deux hauteurs d'eau. L'aire est donc égale à $\frac{1}{2}(h^2-h'^2)$, et si l'on appelle Π le poids du mètre cube d'eau, la poussée totale subie par la porte sera égale, par mètre de largeur, à $\frac{\Pi}{2}(h^2-h'^2)$, et à $\frac{\Pi l}{2}(h^2-h'^2)$ pour la largeur l. Appelant P cette poussee, nous aurons

$$P=\frac{\Pi l}{2}(h^2-h'^2).$$

Le point d'application de la force P est situé sur la verticale moyenne, I, du cadre formé par le vantail (fig. 227), à la hauteur du centre de gravité G du trapèze PMRH (fig. 228) ; pour trouver le point G, on observera qu'il est à la fois sur la droite SL, menée du point S au milieu de la droite PM, et sur le droite gg' qui

joint les centres de gravité g, g' des deux triangles PRM, PRH. La même poussée s'exerce en I', à la même hauteur, sur le second vantail. Les forces P et P' sont équilibrées par les réactions des appuis des deux portes, c'est-à-dire par les réactions du busc et des deux chardonnets; les deux portes exercent de plus une poussée l'une sur l'autre par l'intermédiaire de leurs poteaux busqués. Si l'on connaissait exactement la loi suivant laquelle la charpente des portes fléchit sous l'action des forces qui y sont appliquées, on pourrait déterminer avec précision la portion d'effort qui se transmet en chacun des points d'appui. Mais le problème ainsi envisagé est d'une complication qui en rend la solution presque impossible. On simplifiera la question en admettant que la poussée de l'eau sur chaque vantail se partage seulement entre le chardonnet et le poteau busqué, ce qui revient à négliger la réaction du busc et de la traverse basse. Il est certain qu'on pourrait disposer du tracé de la traverse basse et de la pièce de bois qui garnit le busc de telle sorte, que la réaction de ces deux pièces fût aussi petite qu'on le voudrait. On peut donc à la rigueur la considérer comme nulle. La réaction mutuelle R, R' des deux vantaux devant être normale à la ligne d'axe BF de l'écluse, à cause de la symétrie, on mènera par le point B la droite BR perpendiculaire à BF, et on la prolongera jusqu'à la rencontre, au point K, de la direction IP. Joignant KA, on aura la direction de la réaction R du chardonnet, et l'on trouvera ensuite les forces R et R_1 en décomposant la force donnée P, transportée au point K, suivant les directions connues KA, KB; ces deux forces R et R_1 seront égales. Ce que l'on fait ainsi pour la poussée totale à la hauteur du centre de gravité G, on peut le faire à toute hauteur comprise entre le point M et le point P pour la pression locale qui s'exerce à cette hauteur et qui est donnée par l'ordonnée correspondante du contour PHR; on saura donc, pour chaque tranche horizontale, quelle pression s'exerce entre le poteau-tourillon et le chardonnet, d'une part, entre les deux poteaux busqués, de l'autre. La traverse basse, dans cette hypothèse, est en contact avec le busc, sans y développer aucun effort. On peut remarquer que les forces égales R, R_1, projetées sur la direction de P, donnent par leur

somme une force égale à P; donc

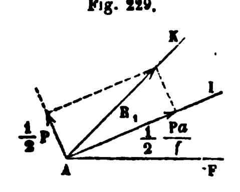
$$P = 2R \cos BKI = 2R \cos ABF = 2R \frac{FB}{AB} = 2R \frac{f}{l},$$

et par suite

$$R = \frac{Pl}{2f}.$$

259. La direction de la force R_1, ou plutôt celle de la force R_2, réaction égale et contraire de la porte sur la maçonnerie de l'écluse, indique quelle position il faut donner aux massifs de maçonnerie destinés à contre-buter cette force. Le tracé du poteau-tourillon et du chardonnet doit aussi être tel qu'au moment où la porte se ferme, ces deux surfaces se touchent suivant un élément normal à la direction, AR_2, de la pression mutuelle. Si le contact n'était pas ainsi assuré, le poteau-tourillon ne serait pas soutenu sur toute sa longueur contre l'action de l'une des composantes de la force R_1, et les réactions de la crapaudine et du collier devraient équilibrer à elles seules cette composante; la rupture du poteau-tourillon est la conséquence ordinaire d'une erreur commise à cet égard. On peut éviter ce danger en adaptant au poteau-tourillon, d'une part, une pièce de charpente plaquée sur la face d'aval du vantail, et qui sert de matelas entre la porte et la maçonnerie, et, d'autre part, des saillies métalliques discontinues, prolongeant chaque entretoise extérieurement au cadre et venant buter, quand la porte se ferme, sur le fond de la courbe du chardonnet. Cette solution est particulièrement indiquée pour les portes en tôle qui sont passées depuis quelques années dans les usages de la construction. Elle revient à proprement parler à décomposer la force R_1 en deux forces, l'une normale, l'autre parallèle à la direction de la porte, et à offrir à chacune une surface d'appui. La force normale sera égale à

Fig. 229.



$$\frac{1}{2}P,$$

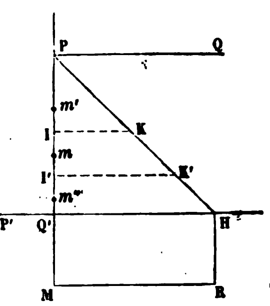
et la force parallèle à

$$\frac{1}{2}\frac{Pa}{f}.$$

260. Revenons à la distribution des pressions de l'eau. Pour tout point compris entre les niveaux P et Q' (fig. 228), à la profondeur x au-dessous du bief d'amont, la pression de l'eau par unité de surface est égale à Πx; au point Q' elle devient égale $\Pi(h-h')$, et conserve cette valeur entre les niveaux Q' et M.

Supposons que le cadre de la porte soit garni d'entretoises horizontales. La poussée de l'eau sur une entretoise m sera représentée approximativement (fig. 230) par l'aire comprise entre la ligne des pressions PHR et les ordonnées IK, I'K', menées à moitié de l'intervalle des deux entretoises voisines m', m''. Cette charge s'applique à chaque unité de longueur de la pièce.

Fig. 230.



Cette détermination est purement approximative; pour trouver les réactions exactes, il faudrait appliquer au bordage, qui s'appuie sur les entretoises successives, les équations fournies par le théorème des trois moments; on sait d'ailleurs (§ 197) que de petits déplacements des appuis entraînent de grandes variations dans les moments fléchissants et dans les pressions que ces appuis ont à supporter. Il est donc permis d'admettre que la position exacte des appuis a été réglée de manière à assurer la répartition d'efforts qui vient d'être définie.

On détermine ainsi une valeur approchée de la poussée horizontale qui s'exerce sur chaque entretoise en particulier, et qui est répartie uniformément dans sa longueur. On assimilera l'entretoise à une pièce posée sur deux appuis, représentés ici par les assemblages avec les poteaux verticaux du vantail, et sollicitée par une charge normale uniformément distribuée; les formules connues permettront de calculer les flèches prises par la pièce, et les pressions locales développées en différents points des sections. Mais

l'entretoise ne subit pas seulement cette poussée normale; elle est encore soumise aux réactions obliques du chardonnet et du poteau busqué; projetant ces réactions sur l'axe longitudinal de la pièce, on aura la valeur de la compression qui s'y développe. Le calcul de cette force de compression est facile, lorsqu'on a déterminé la réaction R des deux vantaux; en effet, si p est la poussée exercée par l'eau sur l'unité de longueur de l'entretoise, pl est la poussée subie par l'entretoise entière; elle se décompose de la même manière que la poussée totale P, et donne par conséquent sur le poteau busqué, parallèlement aux forces R, une force égale à

$$pl \times \frac{R}{P},$$

ou bien à

$$pl \times \frac{l}{2f} = \frac{pl^2}{2f};$$

la compression de l'entretoise est la projection de cette force sur la direction de la pièce; c'est donc le produit de $\frac{pl^2}{2f}$ par le cosinus de l'angle KBA (fig. 227), ou de l'angle [illegible] ou enfin par le rapport

$$\frac{AF}{AB} = \frac{a}{l};$$

la compression de l'entretoise est donc égale à

$$\frac{pla}{2f}.$$

Le moment fléchissant au milieu de l'entretoise est égal à

$$\frac{pl^2}{8}.$$

Appelons m et n les dimensions de la section de l'entretoise, supposée rectangulaire, m étant la dimension horizontale et n la dimension verticale; nous aurons

$$\Omega = mn,$$
$$I = \frac{1}{12} m^3 n;$$

les plus grandes valeurs absolues de v sont égales à $\frac{m}{2}$, et les charges extrêmes de la matière dans la section du milieu sont données par l'équation

$$R = \frac{pla}{2f \times mn} \pm \frac{\frac{pl^2}{8} \times \frac{m}{2}}{\frac{1}{12} m^3 n} = \frac{pl^2}{mn} \times \left(\frac{a}{2fl} \pm \frac{3}{4m}\right),$$

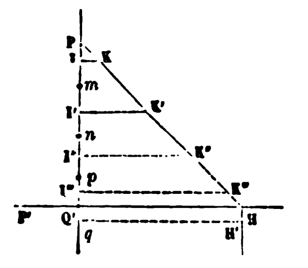
où le signe supérieur correspond à la face antérieure de la pièce, la compression et la flexion s'ajoutant sur cette face pour raccourcir les fibres, et le signe inférieur à la face postérieure, la compression générale des fibres y étant au contraire soulagée par la flexion et par l'extension qui en est la suite.

En réalité, l'entretoise n'est pas simplement posée contre le poteau-tourillon et le poteau busqué; elle y est réunie par des assemblages qui constituent une sorte d'encastrement imparfait; le moment fléchissant limite en est un peu diminué, et la pression maximum est par conséquent un peu moindre que la pression calculée.

261. Cherchons quel espacement il faut donner aux entretoises pour que les poussées qu'elles subissent soient sensiblement égales. Au-dessous du niveau P'Q', l'espacement uniforme assure à peu près cette égalité des poussées, puisque la pression de l'eau devient constante. Nous n'avons donc à nous occuper que de l'intervalle PQ' où la pression varie avec la profondeur.

Nous supposerons qu'il y ait une entretoise à la hauteur du bief d'aval Q', et une autre à la hauteur du bief d'amont, P.

Fig. 231.



D'après notre hypothèse, si nous partageons en deux parties égales les intervalles Pm, mn, np, pQ' et que, par les points de division I, I', I'', I''', nous menions les horizontales IK, I'K', I''K'', I'''K''', jusqu'à la rencontre de la droite PH, inclinée à 45°, l'entretoise P subira une poussée représentée par

l'aire du triangle PIK; l'entretoise m, une poussée représentée par l'aire du trapèze IKK'I', et ainsi de suite, jusqu'à l'entretoise Q' qui subira une poussée représentée par l'aire du trapèze I'''K'''HQ' d'une part, et de l'autre, par l'aire d'un rectangle Q'HH'q, qui complète la poussée en y ajoutant la pression due au liquide situé au-dessous du niveau Q'. Laissons de côté ce rectangle complémentaire; la distribution sera sensiblement égale si les surfaces

$$PIK, \quad IKK'I', \quad I'K'K''I'', \quad I''K''K'''I''',$$

sont équivalentes, et si l'aire I'''K'''HQ' est la moitié de leur valeur commune; on espacera ensuite les entretoises inférieures à Q', de manière que le rectangle Q'qH'H, ajouté au trapèze I'''K'''HQ', complète la valeur commune des aires des trapèzes précédents.

S'il en est ainsi, les aires cumulées

$$PIK, \quad PI'K', \quad PI''K'', \quad PI'''K''', \quad PQ'H,$$

seront proportionnelles aux nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 4\frac{1}{2}$$

ou aux nombres

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 9,$$

et, plus généralement, si n est le nombre d'entretoises du point P au point Q', y compris les entretoises placées aux niveaux extrêmes, les triangles successifs qui représentent les charges cumulées seront entre eux comme les nombres,

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad \ldots\ldots \quad 2n-2, \quad 2n-1.$$

Or tous ces triangles sont semblables; leurs côtés homologues, c'est-à-dire les distances du point P aux points I, I', I'', I''', Q', sont dans le rapport des racines carrées des surfaces, ou comme les nombres

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{4}, \quad \sqrt{6}, \ldots \quad \sqrt{2n-2}. \quad \sqrt{2n-1},$$

on aura donc

$$PI = PQ' \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}},$$

$$PI' = PQ' \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2n-1}},$$

$$PI'' = PQ' \times \frac{\sqrt{2n-2}}{\sqrt{2n-1}},$$

ce qui permettra de placer les points I, I', I'',... sur la verticale PQ'. On placera ensuite les points *m*, *n*, *p*, de manière que les points I I', I'', I''', soient les milieux des intervalles successifs

$$Pm, \quad mn, \quad np, \quad pQ'.$$

La construction des points I peut se faire géométriquement. Partageons la distance PQ' en $2n-1$ parties égales, et marquons les points de division α, β, γ, ... correspondants aux nombres pairs 2, 4, 6,... $2n-2$; sur PQ' comme diamètre décrivons un demi-cercle ; par les points α, β, γ, ... menons des perpendiculaires sur le diamètre de ce cercle. Soient α', β', γ', ... les points de rencontre de ces perpendiculaires avec la circonférence; nous aurons, en joignant Pα', Pβ', Pγ',... :

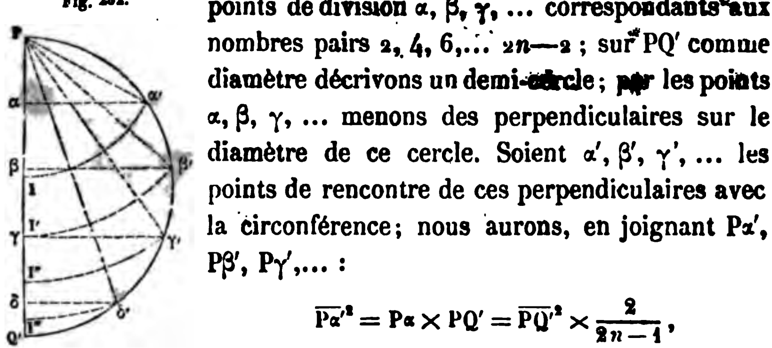


Fig. 232.

$$\overline{P\alpha'}^2 = P\alpha \times PQ' = \overline{PQ'}^2 \times \frac{2}{2n-1},$$

$$\overline{P\beta'}^2 = P\beta \times PQ' = \overline{PQ'}^2 \times \frac{4}{2n-1},$$

. . . .

ou bien

$$P\alpha' = PQ' \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}},$$

$$P\beta' = PQ' \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2n-1}}.$$

. . . .

Il suffit donc de rabattre sur la verticale les distances Pα', Pβ', ... pour trouver les points cherchés, I, I', I''...

Ce tracé donne des entretoises très-serrées, dans le bas de la porte et très-écartées dans le haut. On ne s'astreint pas, dans la pratique, à suivre cette répartition.

262. Si le cadre de la porte est garni d'aiguilles verticales au lieu d'entretoises horizontales, il faut en outre introduire à différentes hauteurs, dans le sens horizontal, des pièces capables d'équilibrer la compression due à la réaction mutuelle des deux poteaux busqués. On peut employer à cet effet une série de manchons cylindriques creux, en fonte ou en bronze, ayant pour longueur exacte la distance libre entre deux aiguilles voisines; on les enfile sur une même tige métallique traversant la porte horizontalement, et perçant les aiguilles en divers points de leur axe neutre. Le serrage d'un écrou adapté à cette tige fournit un excellent moyen de donner de la rigidité à tous les assemblages. Ce système introduit pour ainsi dire une sorte de *division du travail* entre les éléments de l'ossature; les pièces verticales résistent à la poussée de l'eau, et la partagent entre la traverse basse et la traverse haute; la traverse basse transmet la poussée qu'elle reçoit à la saillie du busc (1); la traverse haute la reporte sur le chardonnet et le poteau busqué. Enfin les différents cours de manchons, et les tiges qui les traversent, s'opposent à toute variation de l'écartement des aiguilles et des montants verticaux du cadre : les aiguilles ne travaillent qu'à la flexion, les manchons qu'à la compression. Les entretoises au contraire subissaient à la fois les deux genres d'efforts.

Nous avons traité (§ 95) le problème de la répartition des efforts dans une aiguille verticale soumise sur ses deux faces à la poussée de l'eau; on admet dans ce calcul que l'aiguille est posée sur ses appuis; l'encastrement incomplet qui la réunit aux deux traverses,

---

(1) Ceci semble en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite en commençant, à savoir, qu'il n'y avait pas de pression au contact de la saillie du busc et de la traverse basse. Mais il ne faut pas perdre de vue que cette hypothèse n'a rien de réel. On l'a faite pour se placer tout d'abord dans le cas le plus défavorable. On calcule les dimensions des pièces d'après cette supposition; la résistance en sera *à fortiori* assurée, si la porte trouve un nouvel appui.

soulage la pièce et réduit la valeur extrême des moments fléchissants.

La disposition par aiguilles paraît plus avantageuse, au point de vue de la raideur, à la disposition par entretoises horizontales, lorsque le vantail a une largeur plus grande que sa hauteur, ce qui arrive fréquemment pour les écluses à la mer; le rapport de l'épaisseur d'une pièce à sa portée est un des éléments qui influent le plus sur sa rigidité. Si donc la hauteur de la porte est moindre que sa largeur, on pourra, pour une même épaisseur de porte, avoir des pièces plus rigides en les plaçant verticalement qu'en les plaçant horizontalement.

263. Considérons enfin la porte ABCD dans son enclave, ou pendant sa rotation autour du poteau-tourillon. Le poids Q de la porte, diminué, s'il y a lieu, de la poussée que l'eau exerce de bas en haut sur ce système en partie plongé, est équilibré par la réaction verticale de la crapaudine E, laquelle est égale à Q, et par un couple (X,-X) de deux forces horizontales, développées en E par la crapaudine, en F par le collier. Les forces X seront donc déterminées par l'équation des moments

Fig. 233.

$$Q \times GH = X \times EF.$$

On devra s'assurer tout d'abord que la force Q ne menace pas d'écraser le poteau-tourillon AD ou la crapaudine E, et que les forces X ne sont capables d'arracher ni la crapaudine, ni le collier, ni les liens qui attachent le collier à la maçonnerie, ni enfin les assises de maçonnerie qui servent à cet amarrage. Le poids de la porte tend en outre à déformer le quadrilatère ABCD, en faisant descendre le côté BC, et en faisant varier les angles de la figure. On prévient cette déformation en réunissant les sommets opposés du quadrilatère par des liens diagonaux, savoir, par un *bracon*, DB, pièce qui travaillera à la compression, ou par une *écharpe* AC, qui aura à résister à l'ex-

tension. Le bracon, pièce de bois interrompue à chaque entretoise, paraît moins efficace que l'écharpe, qu'on peut tendre à volonté sur les deux faces de la porte. Pour calculer la section de l'écharpe, on imaginera que le poids $\frac{1}{2}$Q soit suspendu au point C, l'autre moitié du poids Q étant supposée appliquée au poteau-tourillon, et on décomposera ce poids suivant les directions CD, et AC prolongée; on trouvera ainsi une force CL, qui sera la compression produite par l'écharpe dans la traverse basse, et une force CN, qui sera la tension développée dans l'écharpe. Connaissant cette tension, on déterminera la section de l'écharpe de telle sorte, que l'effort par millimètre carré n'y excède pas une faible limite, et n'y corresponde qu'à un allongement insensible.

La force CN se transmet par l'écharpe au point A ; là elle se décompose en deux : la force $AS = \frac{Q}{2}$, tend à comprimer le poteau-tourillon, la force $AK = CL$ tend à le fléchir; la force CL qui comprime la traverse basse se transmet de même en D et tend à fléchir le poteau-tourillon dans la direction DI. Nous retrouvons encore ici un couple (AK, DI) qui fait équilibre au couple (X,-X) des réactions des appuis extérieurs ; la force Q, somme des forces $\frac{Q}{2}$ et AS, est équilibrée, nous l'avons vu déjà, par la réaction verticale de la crapaudine.

On peut aussi donner aux portes d'écluse de la résistance aux actions de leur propre poids en assurant par des équerres les angles des entretoises et du cadre, ou en boulonnant les pièces de charpente qui en composent l'ossature de manière à prévenir tout écartement, ou enfin en couvrant toute la porte d'un bordage rigide. Il existe enfin des portes courbes dont la convexité est dirigée vers le bief d'amont. Cette disposition a pour effet de rendre plus égales les pressions développées aux différents points des entretoises. Les calculs de résistance pourront se faire dans ces différents cas en suivant une marche analogue à celle que nous venons d'indiquer.

LIVRE SEPTIÈME.

ÉQUILIBRE ET STABILITÉ DES MASSIFS.

INTRODUCTION.

264. La stabilité dont il sera question dans ce livre n'a pas la même définition que la stabilité étudiée dans la statique rationnelle. En statique, on dit qu'un système en équilibre est dans une position stable, lorsqu'il tend à revenir dans cette position quand on l'en écarte infiniment peu. Dans la théorie de la résistance d'un massif, on dit de l'équilibre qu'il est stable, lorsqu'il persiste, sans déformations sensibles, après qu'on a fait subir aux forces de légères variations de direction et de grandeur. En un mot, l'équilibre d'un ouvrage ne doit pas être un équilibre strict, dans lequel les forces soient invariablement déterminées ; les efforts extérieurs sont variables au contraire entre certaines limites : et ces variations ne doivent point altérer d'une manière sensible la forme de l'ouvrage ; elles doivent seulement produire des variations dans les réactions de ses appuis et dans les tensions et pressions intérieures.

Nous avons déjà étudié, au moyen d'une hypothèse, la répartition des pressions sur les différentes sections horizontales d'un massif pesant, ou plus généralement la répartition d'une pression dirigée

comme on voudra sur un plan perpendiculaire à sa direction. Nous aurons à employer dans ce qui suit les résultats obtenus dans notre premier livre. Outre les efforts normaux aux plans de joints, que nous savons répartir, il y a lieu de considérer aussi des efforts tangentiels, ou parallèles aux mêmes plans. Ce sont les *efforts tranchants* du massif. Lorsque le plan du joint est réel, les efforts parallèles doivent être équilibrés par le frottement des deux parties solides qui se touchent par cette surface. Mais on peut aussi étudier l'équilibre d'une portion de massif terminé à un plan quelconque, qui devient en quelque sorte un plan de joint fictif (§ 72). Alors les efforts tranchants sont équilibrés non-seulement par le frottement des parties en contact, mais encore par la *cohésion* qui s'exerce entre les molécules appartenant à un seul et même solide rencontrées par le plan sécant.

265. Les lois du frottement de glissement sont assez bien connues depuis les recherches de Coulomb (1); les études plus récentes sur le même sujet ont généralement confirmé les résultats qu'il avait obtenus. On sait que le frottement entre solides au repos a pour limite une force dirigée en sens inverse du sens dans lequel le déplacement relatif tend à s'opérer, et égale en intensité au produit de la pression normale par un nombre appelé *coefficient du frottement*, qui dépend de la nature des corps en contact. Lorsqu'il y a glissement mutuel des deux solides, le frottement est égal à sa limite; il est dirigé en sens contraire du mouvement relatif; il est proportionnel à la pression, et le coefficient, une fois le mouvement commencé, devient un peu moindre qu'au moment du départ. Enfin le coefficient du frottement des solides est indépendant de la vitesse relative, du moins entre des limites de vitesse assez étendues, et comme le frottement total est proportionnel à la pression totale qui s'exerce entre les deux corps, le coefficient du frottement est indépendant de l'aire des surfaces de contact (2).

---

(1) *Théorie des machines simples*, 1781.

(2) Des expériences récentes, dues à MM. Sella, Bochet, Hirn, Jules Poirée, et plus récemment à M. le colonel Pietro Conti, ont montré que ces lois n'étaient pas exactes d'une manière absolue, et que notamment le coefficient de frottement varie sensiblement

L'angle de frottement est l'angle dont la tangente trigonométrique est égale au coefficient du frottement.

Le coefficient du frottement des matériaux entrant dans les maçonneries a été déterminé par divers expérimentateurs. Nous empruntons à l'*Introduction à la Mécanique industrielle* de Poncelet les tableaux suivants.

Résistance au départ après un certain temps de repos (1).

NATURE DES CORPS ET ENDUITS.	RAPPORT du frottement à la pression.
Expériences de M. Morin.	
Calcaire tendre bien dressé sur calcaire tendre.	0.74
Calcaire dur —	0.75
Brique ordinaire —	0.67
Chêne debout —	0.63
Fer forgé —	0.49
Calcaire dur bien dressé sur calcaire dur.	0.70
Calcaire tendre —	0.75
Brique ordinaire —	0.67
Chêne debout —	0.64
Fer forgé —	0.42
Calcaire tendre sur calcaire tendre avec mortier frais en sable fin.	0.74
Expériences de divers.	
Grès uni sur grès uni à sec (Rennie).	0.71
— avec mortier frais (id.).	0.66
Calcaire dur poli sur calcaire dur poli (Rondelet).	0.58
— bouchardé sur calcaire bouchardé (Boistard).	0.78
Granit bien dressé sur granit bouchardé (Rennie).	0.66
— avec mortier frais sur granit bouchardé (id.).	0.49
Caisse en bois sur pavé (Regnier).	0.58
— la terre battue (Hubert).	0.33
Pierre de libage sur un lit d'argile sèche (Lesbros).	0.51
— , l'argile étant humide et ramollie.	0.34
— , l'argile étant pareillement humide, mais recouverte de grosse grève.	0.40

avec les vitesses relatives. Les conséquences de ce changement sont surtout graves pour la théorie des machines en mouvement. Quant aux problèmes de stabilité, le coefficient de frottement à considérer reste toujours, soit le coefficient relatif au repos, soit le coefficient relatif au départ.

(1) Page 448.

Frottement pendant le glissement (*).

INDICATION DES SURFACES.	RAPPORT du frottement à la pression.
Calcaire tendre bien dressé, sur calcaire tendre.	0.64
Calcaire dur. . . . . —	0.67
Brique ordinaire. . . . . . . —	0.65
Chêne debout. . . . . —	0 38
Fer forgé. . . . . —	0.69
Calcaire dur bien dressé sur calcaire dur.	0.38
Calcaire tendre. . . . . . —	0.65
Brique ordinaire. . . . . —	0.60
Chêne debout . . . . . . —	0.38
Fer forgé (en long). . . . —	0.24
Fer forgé. . . . . — , les surfaces étant mouillées.	0.30

266. Les lois de la *cohésion* sont moins connues que celles du frottement de glissement On admet que la cohésion est proportionnelle à l'étendue de la surface de jonction des deux parties du solide entre lesquelles elle s'exerce, et qu'elle est indépendante de la pression mutuelle. Des expériences de Boistard et de M. Morin, dont les principaux résultats sont rapportés dans l'*Introduction à la mécanique industrielle* de Poncelet, p. 489, ont conduit à une évaluation approximative de la cohésion ou de l'adhérence des pierres et des mortiers ou enduits interposés entre elles; la rupture des massifs de maçonnerie soumis aux expériences s'est toujours opérée suivant les plans de joint; mais, avec le mortier, la rupture divise la couche placée entre les pierres, tandis qu'avec le plâtre, la rupture ne divise pas l'enduit, et le sépare de l'une des pièces voisines. Dans le premier cas, il y a cohésion proprement dite; dans le second, il y a adhérence. La cohésion et l'adhérence des mortiers et autres enduits croissent avec le temps jusqu'à la parfaite solidification des matières. La cohésion dans l'intérieur des pierres a été l'objet

(*) Page 491.

d'un très-petit nombre d'expériences; Coulomb en rapporte trois ou quatre dans son *Essai sur les voûtes*. En résumé, on ne possède pas de données bien positives sur les valeurs de la cohésion ; ces données seraient d'ailleurs peu utiles, car généralement on n'a pas à en faire usage. Il ne serait pas prudent de compter sur la cohésion des mortiers pour assurer l'équilibre d'un massif en maçonnerie; le frottement doit suffire.

Des principes analogues s'appliquent aux terres et aux corps qui peuvent se présenter à l'état semi-fluide. Il y a entre les molécules terreuses des forces qui proviennent du frottement, et qui permettent à une terre fraîchement remuée de se tenir en équilibre sous un talus incliné d'un certain angle à l'horizon. S'il n'y avait pas de frottement, les terres seraient dans les mêmes conditions qu'un liquide, et la surface libre devrait être pour l'équilibre un plan horizontal. L'existence du frottement est démontrée par l'inclinaison du talus naturel. De plus, la terre pilonnée, ou même la terre qui a été exposée longtemps aux actions atmosphériques, acquiert une cohésion qui lui donne à certains égards les propriétés d'un solide.

Ce livre a pour objet l'étude de l'équilibre intérieur et de la stabilité des massifs; nous nous occuperons d'abord des voûtes; puis nous passerons aux murs soumis à des poussées latérales.

CHAPITRE PREMIER.

VOUTES EN BERCEAU.

267. Les principes de la construction des voûtes sont connus depuis l'antiquité, mais c'est seulement dans les temps modernes qu'on a cherché à donner une théorie géométrique des conditions de leur

équilibre. La plus ancienne méthode de vérification de l'équilibre d'une voûte est attribuée au célèbre géomètre De La Hire, qui mourut en 1718; malgré les défauts de cette méthode, elle fut longtemps suivie, et est encore recommandée dans les ouvrages de Bélidor (mort en 1761); c'est seulement Coulomb qui la compléta, en faisant paraître, vers la fin du siècle dernier, son *Essai sur une application des règles de maximis et de minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture.* Coulomb étudie dans ce mémoire les lois de la résistance des piliers, des murs de revêtement et des voûtes, en tenant compte du frottement et de la cohésion des diverses parties de ces massifs. Jusqu'alors, lorsqu'on avait décomposé les voûtes en plusieurs fragments pour s'assurer de l'équilibre particulier de chacun d'eux, on avait opéré arbitrairement ces décompositions; Coulomb employa les méthodes analytiques pour chercher les décompositions les plus importantes à considérer, c'est-à-dire celles qui mettent en évidence les points les plus faibles de l'ouvrage. Ses recherches sont rationnelles, et ont servi de point de départ aux études plus récentes.

268. Lorsqu'on fait abstraction du frottement, une voûte infiniment mince peut être assimilée à une courbe funiculaire en équilibre. C'est ce qu'avait observé Grégory dans les *Transactions philosophiques*. La chaînette étant la courbe d'équilibre d'un fil soumis à l'action de la pesanteur, lorsque son poids par unité de longueur est constant dans toute son étendue, il suffit pour avoir une voûte en équilibre de supposer la chaînette renversée, et le fil remplacé par une série de voussoirs infiniment petits, tous égaux entre eux et ayant leurs joints normaux à la chaînette qui leur sert de ligne moyenne; la réaction mutuelle des voussoirs remplacera la tension du fil, et l'équilibre subsistera encore. Coulomb, qui rapporte cette remarque de Gregory, la généralise, et démontre que, s'il n'y a pas de frottement entre les voussoirs, l'équilibre d'une voûte infiniment mince, soumise à des forces quelconques, est assuré en donnant à la ligne moyenne de la voûte la forme d'équilibre d'un fil sollicité par les mêmes forces prises en sens contraire. Soit AB la courbe moyenne; menons dans son plan deux axes OX, OY, de coordonnées rectangulaires; consi-

dérons un arc infiniment petit MN; puisque, par hypothèse, il n'y a pas de frottement, la réaction des deux voussoirs qui se touchent en M est tangente à la courbe AM au point M; et si l'on appelle S cette réaction, elle aura $S\frac{dx}{ds}$ pour composante suivant OX, et $S\frac{dy}{ds}$ pour composante suivant OY. De même la réaction mutuelle dans le plan de joint N aura pour composantes suivant les axes

Fig. 234.

$$-\left(S\frac{dx}{ds}+d.S\frac{dx}{ds}\right) \quad \text{et} \quad -\left(S\frac{dy}{ds}+d.S\frac{dx}{ds}\right).$$

Si donc on désigne par Xds, Yds, les valeurs de la force appliquée à l'arc MN, laquelle est du même ordre de grandeur que cet arc lui-même, on aura pour équations d'équilibre

$$d\left(S\frac{dx}{ds}\right) = Xds,$$

$$d\left(S\frac{dy}{ds}\right) = Yds.$$

Or si l'on supposait que la courbe AB fût la figure d'équilibre d'un fil soumis aux forces $-Xds$, $-Yds$, on trouverait pour l'équilibre deux équations toutes semblables, où la pression, S, des voussoirs serait remplacée par la tension, T, de la courbe funiculaire. Il y a donc entre les deux problèmes une complète analogie.

Mais cette analogie n'est plus aussi évidente lorsque les voussoirs exercent les uns sur les autres des actions obliques, c'est-à-dire lorsqu'il y a lieu de faire intervenir le frottement.

269. Après les recherches analytiques de Coulomb, vinrent les recherches expérimentales de Boistard, qui s'attacha surtout à mettre en évidence le mode suivant lequel une voûte se déforme et tend à se rompre. L'observation des voûtes construites a montré que généralement une voûte en plein cintre ou en anse de panier tend à

s'ouvrir vers l'intrados à la clef, et vers l'extrados aux *joints de rupture*, lesquels sont situés à peu près à 30 degrés d'inclinaison sur l'horizon ; elles se partagent donc en quatre morceaux : les deux morceaux du centre tendent à s'abaisser, tandis que les deux extrêmes tendent à s'écarter latéralement. Dans les voûtes en arc de cercle, la clef tend encore à s'abaisser, et les joints des naissances tendent à s'ouvrir en lézardant la maçonnerie des tympans. Des effets inverses se manifestent dans les voûtes en ogive.

270. La théorie des voûtes a reçu de M. Méry, ingénieur des ponts et chaussées, un perfectionnement des plus importants (*) ; M. Méry est l'auteur d'une méthode géométrique exclusivement suivie aujourd'hui, et connue sous le nom de *Méthode de la courbe des pressions*. C'est une sorte de traduction graphique, d'une clarté parfaite, des diverses opérations que l'on a à faire pour vérifier l'équilibre, quand on suit la marche tracée par Coulomb. Elle a l'avantage de mettre en évidence les points où la théorie demande de nouveaux perfectionnements. Enfin elle se prête à la résolution de tous les problèmes qu'on peut se proposer sur les voûtes.

La théorie de la courbe des pressions a été exposée par M. Méry dans les *Annales des ponts et chaussées*, année 1840.

EXPOSITION DE LA MÉTHODE DE LA COURBE DES PRESSIONS.

271. Proposons-nous de chercher les efforts auxquels les matériaux sont soumis dans une voûte en berceau, droite, à axe horizontal, sous l'action de forces déterminées de grandeur et de position, et également réparties sur la longueur de la voûte.

Coupons-la par deux plans parallèles aux têtes, et écartés l'un de l'autre de l'unité de longueur, et cherchons les conditions d'équilibre et de résistance de ce fragment.

(*) L'idée de la courbe des pressions se trouve déjà indiquée dans les ouvrages de Gauthey et de Navier.

Soient ABCLMDEFGHKA le profil de la voûte et de ses *pieds-droits.*

ABC est l'*intrados*,

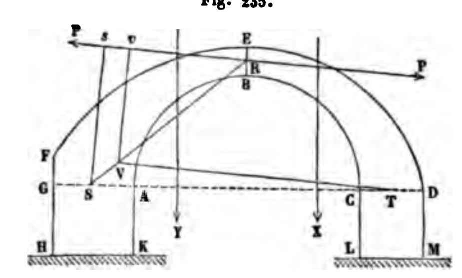
A et C sont les *naissances*,

FED est l'*extrados*.

Le point le plus haut B de l'intrados est la *clef.*

Le premier problème qu'on doit se poser consiste à déterminer en grandeur et en direction la poussée à la clef, ou la réaction mutuelle des deux parties de voûtes qui se touchent suivant le plan BE Ce problème est indéterminé tant qu'on ne tient pas compte des déformations de la matière ; pour le résoudre, il est nécessaire de faire des hypothèses sur les points d'application des réactions des diverses parties de la voûte dans trois joints différents. Supposons, par exemple, que l'on admette que la poussée à la clef est appliquée au point R, et que les réactions des naissances soient appliquées en S et en T ; je dis que la poussée en R, ou la réaction mutuelle des deux portions de voûte séparées par le joint BE, s'en déduit immédiatement.

Fig. 235.



Nous répéterons le raisonnement fait pour déterminer la poussée horizontale d'une pièce courbe, lorsqu'on suppose nul le moment fléchissant dans la section transversale à la clef de l'arc (§ 231).

Soit X la résultante des actions exercées sur la portion de voûte BEDC, et du poids propre de cette portion de voûte ; Y la résultante des actions exercées sur l'autre portion BEFGA, et du poids de cette portion ; ces forces étant connues de position et d'intensité, appelons x la distance de X au point T, et y la distance de Y au point S ; appelons P la poussée à la clef, p la distance de P au point T, p' la distance de la force P au point S : nous aurons pour l'équilibre, en appliquant le théorème des moments à chaque demi-voûte par rapport aux points S et T,

$$Pp = Xx \quad \text{et} \quad Pp' = Yy.$$

Entre ces deux équations, éliminons P par la division. Il vient

$$\frac{p}{p'} = \frac{Xx}{Yy}.$$

La direction PP est donc donnée par le rapport de ses distances à deux points fixes S et T.

Menons la droite SR, et prenons sur cette droite un point V tel, qu'on ait la proportion

$$\frac{RV}{RS} = \frac{Xx}{Yy}.$$

Puis des points S et V abaissons sur la direction RP des perpendiculaires Ss, Vv; nous aurons

$$\frac{Vv}{Ss} = \frac{RV}{RS} = \frac{Xx}{Yy} = \frac{p}{p'};$$

mais

$$Ss = p', \quad \text{donc} \quad Vv = p,$$

et par suite la droite PP est à égale distance des deux points T et V, ou bien est parallèle à la droite TV.

La distance p étant connue, on a

$$P = \frac{Xx}{p}.$$

Cette construction donne donc la poussée en grandeur et en direction, pourvu que l'on connaisse la position des points R, S, T.

En général, les voûtes sont symétriques par rapport au plan de joint à la clef, et symétriquement chargées. Alors $Xx=Yy$, le point S et le point T étant pris semblablement sur les joints des naissances, et la poussée P est horizontale. Dans ce cas, l'étude de la résistance d'une demi-voûte suffit.

La position des points R et S reste arbitraire : les constructeurs admettent ordinairement que l'on doit prendre pour R le tiers supérieur du joint à la clef, et pour S, le milieu du joint aux naissances.

Connaissant P, on n'a qu'à composer P et Y pour avoir la réaction de la portion GABEF de la voûte sur le pied-droit; la résultante passe par le point S.

272. Décomposons la portion de voûte GABEF en fragments aussi petits qu'on voudra, par des plans soit convergents, soit parallèles; nous pourrons composer successivement la poussée P avec les forces qui agissent sur le premier fragment, la résultante avec les forces qui agissent sur le second, la nouvelle résultante avec les forces qui agissent sur le troisième, et ainsi de suite. Nous formerons ainsi un polygone dont les côtés peuvent être rendus moindres que toute grandeur donnée, en multipliant les éléments de la voûte, et qui devient à la limite la *courbe des pressions*, lorsque le nombre des éléments est supposé poussé à l'infini. En décomposant de même en éléments le profil GAKH du pied-droit, nous pourrons composer successivement la réaction en S avec les forces qui agissent sur le premier élément, la résultante avec les forces qui agissent sur le second, et ainsi de suite, et prolonger la courbe des pressions jusqu'à la base du pied-droit.

La courbe des pressions doit être contenue dans l'épaisseur de la voûte et du pied-droit : c'est la première condition d'équilibre. Autrement, la résultante des actions d'une portion de la voûte sur la portion contiguë s'exercerait en dehors de la surface du joint; pour que cela fût possible, il faudrait que les réactions mutuelles des diverses parties du plan de joint fussent les unes des compressions, les autres des tensions; or un massif de maçonnerie ne peut subir d'efforts d'extension sans se disjoindre. Les efforts locaux sont donc ou nuls, ou positifs; ils ne peuvent être négatifs, et leur résultante traverse la région comprimée.

273. La seconde condition d'équilibre est relative à l'angle du plan de joint avec la direction de la réaction mutuelle.

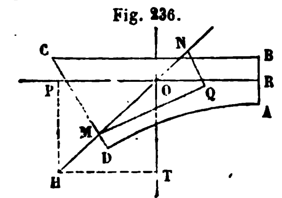


Fig. 236.

Considérons par exemple la portion de voûte limitée par la clef BA, et un joint CD : soit R le point d'application, et OP l'intensité et la direction de la poussée à la clef, OT la résultante des actions qui s'exer-

cent sur la portion de la voûte considérée. La résultante des forces OP, OT, est la diagonale OH du parallélogramme construit sur ces deux forces. Or, la droite OH coupe le joint CD en M. Le point de passage de la réaction sur ce joint est donc le point M, où l'on peut concevoir appliquée une force MN = OH. Cette force se décompose en deux autres, l'une MQ, normale à CD, l'autre égale à NQ, et agissant dans le plan CD. Cette dernière force tend à faire glisser la portion de voûte suivant le plan de joint CD; elle est contre-balancée par le frottement qui s'exerce entre les deux portions de voûte contiguës, et dont la limite est $MQ \times f$, f étant le coefficient du frottement de pierre sur pierre. Pour qu'il y ait équilibre, il est donc nécessaire que NQ soit au plus égal à $MQ \times f$, c'est-à-dire que l'angle NMQ de la réaction OH avec la normale au joint CD soit au plus égal à l'angle dont la tangente est f. En général, cette condition est satisfaite quand on mène les joints normalement à la courbe d'intrados.

Par conséquent *il faut et il suffit, pour qu'il n'y ait pas glissement suivant un plan de joint quelconque, que la réaction mutuelle fasse avec la normale à ce plan de joint un angle moindre que l'angle du frottement de pierre sur pierre.*

274. Enfin, pour la troisième et dernière condition d'équilibre, *il faut qu'aux points les plus fatigués, la charge de la matière par unité de surface soit inférieure à la limite pratique de résistance.* Cette vérification se fait généralement à l'aide de la composante normale MQ de la réaction mutuelle.

Nous avons posé dans notre premier livre (§ 64) la règle qui sert à répartir une force normale entre les éléments superficiels d'un joint rectangulaire. Deux cas peuvent se présenter.

1° Si le joint CD a une longueur supérieure au triple de la distance MD de la force Q à l'arête la plus voisine, la pression moyenne sera égale à $\frac{Q}{3 \times MD}$ (l'autre dimension du joint étant supposée égale à l'unité de longueur), et la pression maximum, double de la pression moyenne, s'exercera sur l'arête projetée en D. Le joint tend à s'ouvrir du côté opposé.

2° Si le joint CD a une longueur moindre que le triple de MD, toute la surface du joint est comprimée, et la pression R par unité de surface au point défini par son abscisse x, comptée à partir du point I, milieu du joint, est donnée par l'équation (§ 39) :

Fig. 237.

$$R = \frac{Q}{CD}\left(1 + \frac{3x \times IM}{ID^2}\right).$$

La pression maximum, qui a lieu au point D, se trouvera en faisant $x = ID$:

$$R = \frac{Q}{CD}\left(1 + 3 \times \frac{IM}{ID}\right).$$

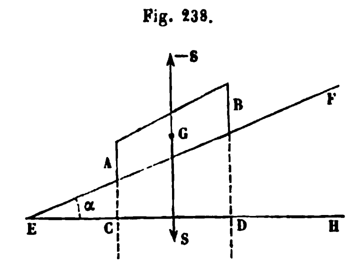
275. La solution du problème qui consiste à répartir sur un plan de joint une pression totale oblique à ce plan, a donné lieu récemment à une autre hypothèse, proposée dès 1856 par M. Le Blanc, aujourd'hui ingénieur en chef des ponts et chaussées.

L'usage est adopté généralement de décomposer la pression totale MN en deux composantes : l'une tangentielle NQ, qui est équilibrée par le frottement, l'autre normale MQ, que l'on répartit seule. M. Le Blanc procède autrement.

Soit S la poussée totale MN, α l'angle qu'elle fait avec la normale au joint. Il prend pour valeur de la pression normale à répartir le quotient $\frac{S}{\cos \alpha}$, au lieu du produit $S \cos \alpha = MQ$.

Pour justifier cette manière de procéder, imaginons qu'un corps AB, ayant un poids de S kilogrammes, soit posé sur un massif terminé à un plan indéfini EF, faisant l'angle α avec l'horizon EH, et qu'il s'y tienne en équilibre, grâce à l'intervention du frottement.

Fig. 238.



Le poids S du corps est équilibré par la réaction —S du massif. Or il est admissible que le corps comprime seulement le prisme

directement situé au-dessous de lui, c'est-à-dire le prisme renfermé sur la figure entre les arêtes verticales AC et BD; la section droite de ce prisme est CD. Pour avoir la plus grande pression de la matière formant support, il convient de diviser le poids total S par l'aire de cette section CD, ou par $\Omega \cos \alpha$, en appelant Ω l'aire de la base AB, ce qui donne pour pression moyenne $\frac{S}{\Omega \cos \alpha} = \frac{\left(\frac{S}{\cos \alpha}\right)}{\Omega}$, conformément à la nouvelle règle.

En pratique, l'angle α est toujours assez petit; il doit toujours être au-dessous de l'angle du frottement pour que l'équilibre ait lieu; dans un ouvrage bien construit, on le rend le plus petit possible. La règle ordinaire et la nouvelle règle conduisent en définitive à des valeurs peu différentes des pressions locales, et la faiblesse des limites de résistance adoptées est telle, qu'il n'y a aucun inconvénient à suivre celle des deux règles qui donne les plus basses évaluations. Aussi continuerons-nous à employer l'ancienne règle dans le courant de ce livre.

276. En résumé, dès qu'on se donne les points de passage des réactions mutuelles en trois plans de joint quelconques, la construction de la courbe des pressions fait connaître toutes les autres réactions mutuelles. Cette courbe une fois construite, il faut et il suffit pour l'équilibre :

1° Qu'elle soit comprise dans l'intérieur de la voûte et de ses pieds-droits;

2° Qu'elle coupe les joints réels sous des angles plus grands que le complément de l'angle de frottement de pierre sur pierre;

3° Que la pression par unité de surface, sur les arêtes les plus voisines de la courbe des pressions, n'excède pas la limite pratique de résistance.

Le tracé de la courbe des pressions indique en outre les régions où les joints tendent à s'ouvrir, soit vers l'intrados, soit vers l'extrados.

Enfin cette méthode permet de corriger, par voie de tâtonnements, les formes d'une voûte, de manière à lui donner le plus de légèreté

possible sans nuire à sa stabilité. Il suffit pour cela de réduire les épaisseurs de manière que dans chaque section la charge par unité de surface soit voisine de la limite adoptée pour la résistance pratique des matériaux.

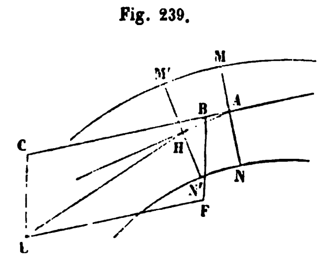
La courbe des pressions étant entièrement définie quand on en prend arbitrairement trois points, est donnée par une équation différentielle du troisième ordre, dont l'intégrale générale contient trois constantes arbitraires. La théorie des voûtès serait complète si l'on trouvait une méthode pour la détermination rationnelle de ces trois constantes. La recherche de la déformation de la voûte conduirait certainement au résultat demandé; mais cette partie du problème des voûtes n'est pas encore résolue.

POLYGONE DES CENTRES DE PRESSION.

277. Le polygone des pressions a ses sommets successifs sur les directions des forces extérieures appliquées aux éléments individuels de la voûte; il y aurait donc erreur à confondre ce polygone avec le *polygone des centres de pression* des plans de joint; le centre de pression dans un joint quelconque est le point de passage de la réaction mutuelle des deux voussoirs voisins. Le polygone des centres de pression qu'on obtient en joignant les centres de pression successifs a ses sommets sur les lignes de joint, à la rencontre des côtés du polygone des pressions.

Soit MNN'M' un voussoir, BF la force extérieure qui y est appliquée, A le centre de pression du joint MN, et BC la grandeur et la direction de la poussée qui s'exerce en ce point dans le sens AC.

Fig. 239.



Composons la poussée BC avec la force BF. La résultante BE sera, en grandeur et en direction, la réaction exercée dans le plan de joint M'N', et le point H, où elle coupe la ligne M'N', sera le centre de pression de ce joint.

La droite AH représentera un côté du polygone des centres de

pression, tandis que les droites AB et BH sont deux côtés successifs du polygone des pressions.

Il peut arriver qu'à la limite cette droite AH prenne une direction différente des positions-limites des droites AB, BH.

278. Mais si les forces extérieures qui agissent sur la voûte sont toutes parallèles, ce qui a lieu presque toujours, on peut rendre identiques la courbe des centres de pression et la courbe des pressions, en décomposant la voûte par une infinité de plans parallèles à la direction des forces, et jouant le rôle de plans de joint fictifs. Cherchons dans cette hypothèse l'équation de la courbe des centres de pression; nous prendrons pour axe des abscisses la direction RP de la poussée à la clef, et pour axe des ordonnées la droite RA, parallèle aux forces. Soit $\theta = \text{PRA}$ l'angle des axes; soit OT la direction de la résultante des forces parallèles qui agissent sur la portion de voûte limitée au plan de joint fictif CD, mené parallèlement à OT et à RA.

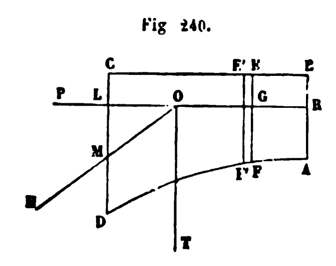


Fig. 240.

Si P est la poussée à la clef, et T la résultante des forces extérieures, en composant P et T, on aura pour résultante la réaction mutuelle H des deux portions de voûte qui se touchent suivant le plan CD : M sera un point de la courbe des centres de pression; nous poserons

$$\text{RL} = \text{X} \quad \text{et} \quad \text{LM} = \text{Y},$$

X et Y étant les coordonnées de ce point.

Appelons x l'abscisse RG d'un plan de joint fictif EF, et z la dimension EF de ce joint; appelons p la force, constante ou variable, qui agit sur la voûte, rapportée à l'unité de surface de la section transversale; $pzdx \sin\theta$ sera la force qui agit sur l'élément EFF'E', et nous aurons à la fois

$$\text{T} = \int_0^x pzdx \sin\theta \quad \text{et} \quad \text{T} \times \text{OR} = \int_0^x pzxdx \sin\theta.$$

Cette dernière équation est l'équation des moments par rapport au point R, en prenant les bras de levier suivant la direction oblique RO, au lieu d'une direction normale, ce qui revient à multiplier les deux membres de l'équation par un même facteur.

On en déduit

$$\mathrm{OR} = \frac{\int_0^x pzxdx \sin\theta}{\int_0^x pzdx \sin\theta},$$

et par suite

$$\mathrm{OL} = \mathrm{RL} - \mathrm{OR} = \mathrm{X} - \frac{\int_0^x pzxdx \sin\theta}{\int_0^x pzdx \sin\theta}.$$

Le coefficient angulaire de la direction OM est égal à

$$\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{OL}} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{P}} = \frac{1}{\mathrm{P}}\int_0^x pzdx \sin\theta.$$

Donc

$$\mathrm{LM} = \mathrm{Y} = \frac{1}{\mathrm{P}}\left(\int_0^x pzdx \sin\theta\right) \times \left(\mathrm{X} - \frac{\int_0^x pzxdx \sin\theta}{\int_0^x pzdx \sin\theta}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{P}}\int_0^x pzdx \sin\theta - \frac{1}{\mathrm{P}}\int_0^x pzxdx \sin\theta.$$

Telle est l'équation de la courbe des centres de pression. Or je dis que la droite OM est tangente à cette courbe au point M. En effet, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point est $\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}$; et l'équation précédente donne, en différentiant par rapport à la limite X,

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = \frac{1}{\mathrm{P}}\int_0^x pzdx \sin\theta = \frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{OL}}.$$

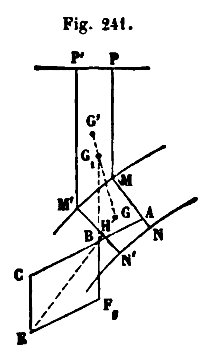
Donc la tangente à la courbe des centres de pression au point M se confond avec la direction OM de la réaction des deux portions de

voûte séparées par le joint fictif CD, c'est-à-dire avec la tangente à la courbe des pressions, de sorte que les deux courbes n'en font plus qu'une.

Cette coïncidence n'a plus lieu si les plans de séparation CD, suivant lesquels on décompose la voûte, ne sont pas menés parallèlement aux forces extérieures T. Comme dans la plupart des cas les forces extérieures sont des forces verticales, on simplifie le tracé de la courbe des pressions en décomposant la voûte en éléments par des plans verticaux.

Lorsqu'on la décompose par les plans de joint réels MN, M'N', on admet que chaque voussoir supporte la portion de surcharge qui s'élève verticalement au-dessus de sa surface d'extrados; ainsi le voussoir MNN'M' est supposé porter la charge MM'P'P. Si A est le centre de pression du joint MN, et AC la direction de la poussée qui s'exerce sur ce joint, il faudra composer la force AC avec la somme F des poids du voussoir et de sa surcharge, laquelle somme est appliquée au point G_1, centre de gravité de l'aire totale PP'M'N'NM. Il peut donc arriver, comme le montre la figure, que la force G_1F coupe la direction de la poussée AC, en un point B qui soit extérieur au voussoir, de sorte qu'en achevant le parallélogramme BFEC, la diagonale BE, qui représente en grandeur et en direction la poussée sur la face de joint M'N', ne rencontre ce joint qu'en un point H situé sur son propre prolongement. Dans ce cas, il serait inexact de substituer la courbe des centres de pression à la courbe des pressions. La substitution est sans inconvénient, comme on l'a vu, lorsque chaque voussoir et sa surcharge sont compris entre les mêmes verticales.

Fig. 241.



Cette introduction de plans de joints fictifs verticaux, au lieu des plans de joint réels qui sont en général normaux à l'intrados, a pour principal avantage de simplifier les équations de l'équilibre des voûtes. Elle a été adoptée par M. Carvalho, dans une étude sur la stabilité des voûtes insérée en 1853 dans les *Annales des ponts et*

chaussées. Après avoir construit la courbe des centres de pression, en supposant la voûte et sa surcharge en maçonnerie partagée par des plans parallèles à la direction des forces extérieures, on mène les joints réels de la voûte proprement dite, de manière que l'angle de la courbe avec ces joints réels soit au moins égal au complément de l'angle du frottement, condition qui sera remplie le plus souvent lorsque les joints réels seront normaux à l'intrados. Il y a sans doute dans une telle marche quelque chose d'arbitraire, mais la décomposition de la surcharge en maçonnerie par des plans verticaux soulève la même objection.

JOINT DE RUPTURE.

279. La courbe des pressions une fois tracée, l'inspection de la courbe suffit pour faire reconnaître les régions de la voûte qui sont soumises aux charges les plus grandes. Ces régions varient avec les hypothèses faites sur les points de la courbe qui ont été pris arbitrairement pour la construire. Si l'on suppose, comme cela a lieu ordinairement, la voûte symétrique et symétriquement chargée par rapport au plan vertical passant par la clef, la poussée à la clef sera horizontale, et la courbe des pressions joindra par un trait continu le point de passage A à la clef, au point de passage B aux naissances; on pourra, sans modifier le point de départ A de la courbe, mais en déplaçant convenablement le point B, l'amener à toucher l'intrados en un certain point C. Ce point de contact C de l'intrados et de la courbe des pressions détermine le *joint de rupture* de la voûte correspondant à la position attribuée au point d'application A de la poussée à la clef. On voit que la tangente à l'intrados au joint de rupture C, la poussée à la clef, et la résultante des forces extérieures qui agissent sur la portion de voûte comprise entre le joint de rupture et la clef, concourent en un même point. Si l'on déplace ensuite le point A, on obtiendra sur l'intrados pour chaque position successive de A un point C particulier; les limites des positions de ces

points détermineront sur l'intrados un *arc de rupture*, qui indique la région de la voûte où les pressions locales ont leur plus grande intensité.

La considération du joint de rupture est devenue la base de la théorie des voûtes de Dupuit. L'auteur appelle *point-charnière* le point de l'intrados autour duquel la demi-voûte pivote, lorsque la clef s'abaisse pendant le décintrement. Le point-charnière se déplace à mesure que le cintre, en descendant, prive la voûte de ses appuis; le point-charnière définitif est le joint de rupture des autres théories. Il importe que le décintrement soit opéré avec lenteur, pour éviter les effets de l'inertie de la voûte, qui pourrait dépasser d'abord sa position définitive d'équilibre. Se fondant sur ces circonstances initiales, qui ont évidemment une grande influence sur l'état d'équilibre réalisé, Dupuit admet que la courbe des pressions effectives passe tangentiellement à l'intrados au joint de rupture (ou aux naissances, s'il s'agit d'une *voûte incomplète*, autrement dit, d'une *voûte en arc de cercle*); à la clef il admet au contraire que la pression est répartie sur toute la surface, ce qui le conduit à faire partir la courbe du tiers supérieur du joint. Dupuit conseille même de relever ce point de passage quand les culées sont peu résistantes, pour se placer dans l'hypothèse la plus défavorable.

Nous avons fait voir (§ 31) que l'hypothèse d'une pression totale portant sur une arête était tout à fait inadmissible. La propriété du point-charnière de Dupuit ne peut donc être considérée que comme une *propriété-limite*, sans réalité objective : la courbe des pressions tend à se rapprocher de l'intrados au joint de rupture, mais il est impossible qu'elle l'atteigne. La distance de l'intrados à laquelle elle reste en cette région est inconnue, et la solution de Dupuit est, comme toutes les autres, entachée d'arbitraire.

Lorsque l'intrados est une courbe continue, si l'on fait varier l'intensité de la poussée à la clef, sans modifier son point d'application, la courbe des pressions est tangente à l'intrados au joint de rupture lorsque la poussée à la clef est minimum ; car si on la réduit un tant soit peu, l'équilibre est détruit, et la courbe des pressions sort de l'épaisseur de la voûte. De même, si l'extrados est une courbe

continue, à la plus grande intensité de la poussée correspond une courbe des pressions tangente à l'extrados. On peut consulter sur ces propriétés une démonstration analytique donnée par M. H. Résal dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 29 janvier 1877.

Nous insistons sur cette condition d'un intrados ou d'un extrados continu, parce qu'on peut très-bien concevoir des voûtes stables où il n'y ait ni surface d'intrados, ni surface d'extrados; il suffit, en effet, pour qu'il y ait possibilité de l'équilibre, qu'il y ait des corps en contact, se pressant par des surfaces de joint. Cette remarque permet de reconnaître le danger qu'il y a à chercher exclusivement les conditions de la stabilité des voûtes dans l'étude des formes de ces surfaces, dont l'existence est purement conventionnelle.

COMPLÉMENT DE LA MÉTHODE DE M. MÉRY. — MÉTHODE DE M. A. DURAND-CLAYE.

280. La courbe des pressions d'une voûte donnée n'est pas complétement déterminée, et, pour la tracer, on prend arbitrairement trois points de passage, ou bien deux points de passage, et la direction de la tangente à la courbe en l'un de ces points. L'indétermination ne disparaîtrait que si l'on pouvait compléter le calcul, comme pour les poutres droites, en tenant compte de la déformation subie par le système matériel, et de la fixité, réelle ou supposée, des surfaces d'appui extérieures. Mais cette suite du calcul serait extrêmement laborieuse, et en pratique elle ne mériterait pas grande confiance, les lois de la déformation des maçonneries étant encore inconnues, et assurément très-complexes. On a donc cherché à tourner la difficulté plutôt qu'à la résoudre. La méthode que nous allons exposer, d'après M. Alfred Durand-Claye, ingénieur des ponts et chaussées, nous paraît atteindre ce but de la manière la plus heureuse (1).

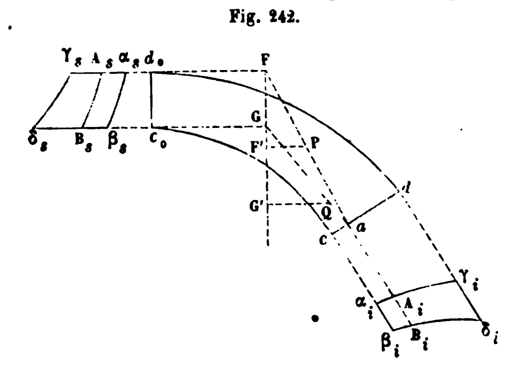
Supposons, pour plus de simplicité, que la poussée à la clef soit

---

(1) *Annales des ponts et chaussées*, 1867, n° 142, t. I, p. 63.—On peut consulter aussi sur le même sujet un mémoire de M. Drouets, 1865, n° 103, t. I, p. 179.

horizontale, ce qui a lieu quand la voûte est symétrique, symétriquement chargée, et que les circonstances de pose n'entraînent aucune dissymétrie entre les deux moitiés dont elle se compose. Considérons (fig. 242) un fragment quelconque de voûte compris entre le plan de la clef $c_0 d_0$, et un plan de joint cd. La résultante des actions mutuelles qui s'excercent de c_0 en d_0 est normale à la droite $c_0 d_0$ par hypothèse, et est appliquée sur cette droite en un certain point compris entre les points c_0 et d_0. De même la résultante des actions mutuelles qui s'exercent de c en d coupe le joint cd en un certain point de la droite cd. Soit a ce point. La poussée à la clef et la réaction du joint cd résultent de l'hypothèse faite sur la position de ces deux points. Tandis que la réaction du joint cd passe constamment au point a, faisons parcourir au point d'application de la poussée à la clef toute l'étendue du joint $c_0 d_0$, et pour chaque position construisons la grandeur correspondante de la poussée à la clef, et la grandeur et la direction de la réaction du joint. Faisons cette opération pour les positions extrêmes c_0 et d_0. Nous aurons, pour la position d_0, à décomposer, suivant les directions Fd_0 et Fa, le poids de la voûte FF' appliqué en F, et pour la position c_0, à décomposer le même poids, GG', transporté au point G, suivant les directions Gc_0 et Ga; nous trouvons ainsi une force F'P pour la poussée correspondante au point d_0, une force G'Q pour la poussée correspondante à c_0, et les forces FP, GQ, pour les réactions exercées au point a dans ces deux hypothèses. Après avoir opéré de même pour un certain nombre de points pris sur le point $c_0 d_0$, portons, à partir de ces points, perpendiculairement au plan de la clef, des ordonnées $d_0 A_s$, $c_0 B_s$, respectivement égales, à une échelle arbitraire, aux forces correspondantes F'P et G'Q; nous obtiendrons par là un arc de courbe $A_s B_s$ dont

Fig. 242.



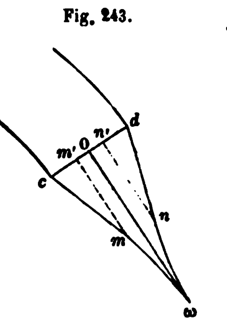
les ordonnées représenteront les seules valeurs admissibles de la poussée à la clef, quand la réaction du joint *cd* passe au point *a*. Nous pouvons de même prendre, à la même échelle, sur la perpendiculaire à *cd*, des longueurs aA_i, aB_i, respectivement égales aux composantes normales des réactions FP, GQ; ces longueurs et les longueurs intermédiaires seront les valeurs successives de la réaction normale au point *a*, lorsque le point d'application de la poussée à la clef occupe toutes les positions possibles sur le point c_0d_0.

Nous pouvons répéter toutes ces opérations sur tout autre point du joint *cd*; à chaque position correspondra une courbe $A_s B_s$ des valeurs de la poussée à la clef, et une série d'ordonnées portées sur la normale à la surface du joint au point *a*, donnant chacune la valeur de la réaction normale correspondante. Imaginons qu'on ait opéré ainsi pour tous les points du joint *cd*; nous obtiendrons en définitive à la clef une infinité d'arcs de courbe, qui seront tous compris entre les deux courbes extrêmes $\alpha_s\beta_s$ et $\gamma_s\delta_s$, correspondantes l'une au point *c*, l'autre au point *d*; et pour le joint *cd*, une infinité d'ordonnées, comprises entre deux séries d'ordonnées-limites, dessinant les deux arcs-limites $\alpha_i\gamma_i$, $\beta_i\delta_i$. La première condition d'équilibre de la voûte exige que les résultantes des réactions subies par le fragment de voûte cdd_0c_0, sur ces faces cd, c_0d_0, percent les joints cd, c_0d_0, suivant lesquels ces réactions s'exercent; nous pouvons donc exprimer cette condition en disant que *l'extrémité de la droite qui représente, à l'échelle, à partir d'un point du joint* c_0d_0, *la poussée horizontale à la clef, tombe dans l'intérieur du contour fermé* $\alpha_s\beta_s\delta_s\gamma_s$, *et que l'extrémité de la droite qui représente, à la même échelle, à partir d'un point du joint* cd, *la composante normale de la réaction totale subie par ce joint, est comprise dans l'intérieur du contour fermé* $\alpha_i\beta_i\delta_i\gamma_i$. Remarquons qu'il y a correspondance entre les deux quadrilatères $\alpha\beta\delta\gamma$: le sommet α_s correspond au sommet α_i, le côté $\alpha_s\beta_s$ au côté $\alpha_i\beta_i$, le côté $\alpha_s\gamma_s$ au côté $\alpha_i\gamma_i$.

281. Faisons usage de la troisième condition, celle qui est relative à la limite des pressions locales (§ 228). Nous avons vu (§ 66) comment cette condition pouvait se traduire géométriquement lors-

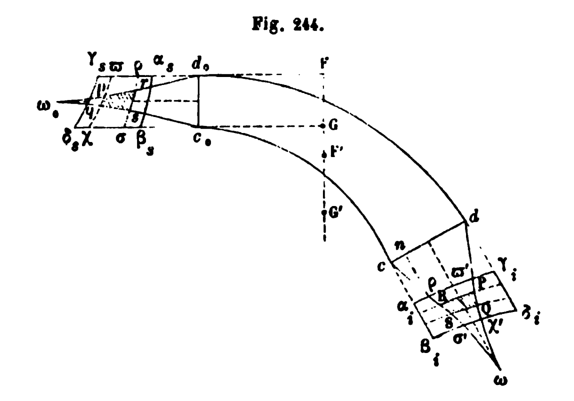
que la surface d'appui est rectangulaire. Au point O, milieu du joint *cd*, prenons à l'échelle, sur la perpendiculaire Oω, une longueur Oω égale à la force qui, répartie uniformément sur la surface rectangulaire de ce joint, donne une pression de R kilogrammes par unité de surface, égale à la limite pratique de la résistance des pierres. Aux points m', n', tiers du joint, prenons deux longueurs $m'm$, $n'n$, égales à la moitié de Oω. Joignons par des droites les points *dn*, *cm*, et prolongeons-les par les arcs d'hyperbole $m\omega$, $n\omega$, tangents à ces droites en *m* et en *n*. Le contour $cm\omega nd$ donnera pour chaque point de passage de la résultante la valeur-limite admissible pour cette force estimée perpendiculairement au joint.

Fig. 243.



Appliquons cette construction sur notre épure au joint *cd*, et à la clef c_0d_0; nous obtiendrons les deux courbes-limites $c_0\omega_0d_0$, et $c\omega d$.

Fig. 244.



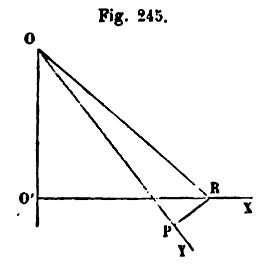
En vertu de la première condition d'équilibre, la composante normale au joint *cd*, doit aboutir dans l'intérieur du polygone $\alpha_i\beta_i\delta_i\gamma_i$; en vertu de la troisième, elle doit aboutir en dedans du trait continu $c\omega d$; donc, en vertu des deux conditions prises ensemble, elle doit aboutir en un point intérieur au polygone $\varpi'\rho'\sigma'\chi'$, commun aux aires des deux polygones pris séparément. Cette limitation de la pression normale à *cd* entraîne une limitation correspondante de

la poussée en $c_0 d_0$; car la connaissance de la réaction normale en un point du joint *cd* permet de définir en grandeur et en position la poussée à la clef (1). Faisant usage successivement, par exemple, des pressions normales qui correspondent aux points $\rho', \chi', \sigma', \varpi'$, on en déduira les positions ρ, χ, σ et ϖ, des extrémités des poussées horizontales qui leur sont conjuguées; les points ρ et ϖ appartiendront au côté $\alpha_i \gamma_i$, qui, comme nous l'avons observé, correspond à la courbe $\alpha_i \gamma_i$; et de même σ et χ seront situés sur le côté $\beta_i \delta_i$, qui correspond à la courbe $\beta_i \delta_i$. Les courbes $\rho\sigma$, $\chi\varpi$ pourront être tracées par points en suivant une marche analogue et correspondront point pour point aux courbes $\sigma'\rho'\varpi'\chi'$. La poussée à la clef, ainsi limitée au contour $\rho\sigma\varpi\chi$, et limitée d'ailleurs au contour $d_0 \omega_0 c_0$ par la troisième condition, aboutira en définitive dans l'intérieur de la partie *pqsr* commune à ces deux contours. De cette limitation de la poussée à la clef résulte une nouvelle limitation de la réaction normale au joint *cd*; car aux points *p*, *q*, *s*, *r*, correspondent les points P, Q, S, R, et aux courbes *pr*, *qs*, les courbes PR, QS; de sorte que l'ensemble des deux conditions dont nous avons tenu compte se traduit géométriquement de la manière suivante : *il faut, pour que l'équilibre du fragment de voûte soit possible, que les extrémités des droites représentatives de la poussée et de la réaction normale soient respectivement comprises dans l'intérieur des contours conjugués* pqsr, PQSR.

282. Nous n'avons pas fait intervenir jusqu'ici la seconde condi-

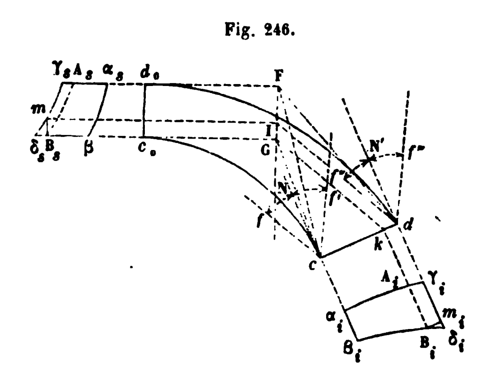
(1) Voici comment on peut, en général, déterminer géométriquement la poussée à la clef qui correspond à une composante normale donnée $\rho' n$. En un point quelconque, O, prenons sur la verticale une longueur OO' égale au poids de la voûte cdd_0c_0, estimé à l'échelle; traçons au point O' une horizontale indéfinie O'X; menons par le point O une perpendiculaire OY au joint *cd*, et prenons sur cette droite une longueur OP égale à la valeur donnée $\rho' n$ de la composante normale. Au point P, élevons PR perpendiculaire à OP; cette droite coupe en R la droite O'X, et joignant OR, on aura en O'R la poussée horizontale à la clef, et en OR la réaction du joint *cd*. On mènera ensuite une parallèle à RO par le point *n*; elle coupera la verticale FF' en un point qui sera à la hauteur du point conjugué sur le point $c_0 d_0$.

Fig. 245.



tion, celle qui est relative à l'angle du frottement, ou au glissement de la voûte sur les plans de joint. En général elle est remplie dans

Fig. 246.



la pratique, lorsque les plans de joint sont dirigés normalement à l'intrados: mais on peut aussi l'introduire dans la méthode de M. Durand-Claye. Il suffit en effet, pour en tenir compte, d'exclure toute direction de la réaction du joint qui ferait avec la normale un angle supérieur à l'angle du frottement; un exemple montrera comment on doit opérer. Aux points *c* et *d*, menons sur la droite *cd* des normales *c*N, *d*N', et faisons de part et d'autre de ces normales des angles N*cf*, N*cf'*, N'*df''*, N'*df'''*, égaux à l'angle du frottement. Si le point d'application de la réaction est en *c*, on voit sur la figure que la seconde condition sera remplie quelle que soit la position de la poussée à la clef; car les directions extrêmes F*c*, G*c*, sont toutes deux comprises dans l'angle *fcf'*. Il n'en est pas de même pour le point *d* : la réaction F*d* y est bien encore comprise dans l'angle *f''df'''*, mais la réaction G*d* serait extérieure à cet angle. Si donc on construit la courbe $\gamma_s\delta_s$ qui correspond au point *d*, il faudra l'arrêter au point *m*, à la hauteur de la plus basse poussée *m*I, qui, composée en I, avec le poids de la voûte, donne pour résultante une réaction I*d* faisant avec la normale l'angle *f''* *d*N' égal à l'angle du frottement.

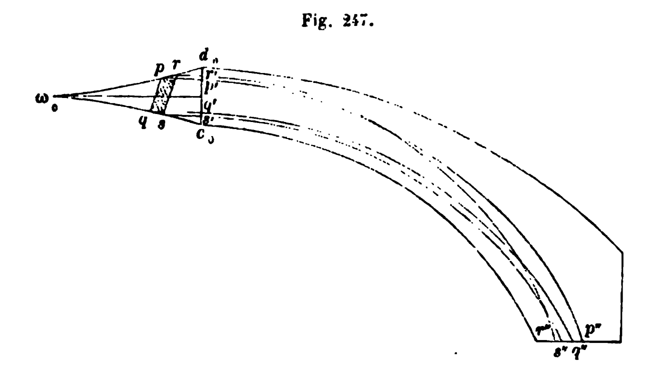
Par le point G menons la droite G*k*, parallèle à *df'*. Le point *k* donnera la limite à partir de laquelle la poussée horizontale appliquée en c_0 cesse d'être admissible. Construisons la courbe A_sB_s correspondante au point *k*; la portion utile de la droite $\beta_s\delta_s$ sera

limitée au point $B_{,}$, et l'aire $\alpha_{,}\gamma_{,}\delta_{,}\beta_{,}$, se réduira en définitive à l'aire $\alpha_{,}\gamma_{,}\, m\, B_{,}\, \beta_{,}$, dont le côté $mB_{,}$ est une droite parallèle à d_0c_0. En effet, les ordonnées de cette ligne sont les poussées qui, composées avec le poids constant appliqué suivant la droite GF, donnent une résultante parallèle à la direction G*k*. Les valeurs de ces poussées sont donc constantes, et sont représentées par la portion de droite $mB_{,}$ parallèle à c_0d_0.

Le contour $\alpha_{i}\gamma_{i}\delta_{i}\beta_{i}$ subit une réduction semblable, et une droite m_iB_i en retranchant l'angle δ_i. L'introduction de la seconde condition peut donc se traduire graphiquement par le retranchement de certaines surfaces, et rentre par suite dans les procédés généraux de la méthode.

283. Ces préliminaires posés, on voit que la vérification de la stabilité d'une voûte revient à constater l'existence de l'aire commune

Fig. 247.



à toutes les aires *rsqp*, qui correspondent chacune à l'équilibre d'un cours quelconque de voussoirs. Si une telle aire existe, l'équilibre sera possible dans les conditions où il a été défini ; si elle n'existe pas, l'instabilité de la voûte, au point de vue des mêmes conditions, sera par cela même constatée. L'aire-limite peut être plus ou moins étendue ; elle peut se réduire à un point ; alors l'équilibre n'est possible que d'une seule manière, et la voûte est dans l'état l'équilibre strict. L'aire-limite peut avoir la forme d'un triangle ; plus généralement, elle aura la forme d'un quadrilatère *pqsr*, terminé latérale-

ment aux deux côtés du contour $d_o \omega_o c_o$. Le quadrilatère *p q s r* étant disposé comme dans la figure 247, les valeurs et positions extrêmes de la poussée à la clef sont définies par les sommets *p*, *q*, *r*, *s*, et, en faisant usage de ces quatre poussées successives, on pourra construire les courbes de pression limites admissibles dans la voûte, savoir $p'p''$, $q'q''$, $s's''$, $r'r''$; la première, $p'p''$, correspond à l'effort-limite à l'*extrados* à la clef, et à l'*extrados* en un certain joint; la seconde $q'q''$ à l'effort-limite à l'*intrados* à la clef, et à l'*extrados* en un certain joint; la troisième $s's''$, à l'effort-limite à l'*intrados* à la clef et en un certain joint; la quatrième enfin, $r'r''$, à l'effort-limite à l'*extrados* à la clef, et à l'*intrados* en un certain joint.

284. La méthode de M. Alfred Durand-Claye se résume dans la série des opérations suivantes :

« 1° Détermination des poids des diverses portions de voûte avec leurs surcharges ; détermination des verticales contenant leurs centres de gravité respectifs ;

« 2° Tracé des courbes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ou $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, limitant les poussées et pressions compatibles avec l'équilibre, quelle que soit la résistance à admettre pour les matériaux ;

« 3° Tracé des courbes $c\omega d$, limitant les pressions compatibles avec la résistance propre des matériaux ;

« 4° Superposition des deux séries de courbes précédentes, et détermination des aires *rspq* au sommet de la voûte ;

« 5° Superposition de ces aires et recherche de la surface commune, surface qui comprendra les extrémités des lignes représentatives de toutes les poussées admissibles ;

« 6° Tracé des courbes de pression limites, qui correspondent aux sommets de la surface commune et détermination des parties aibles de la voûte. »

Cette dernière partie des opérations n'est pas indispensable, car les constructions préparatoires renseignent sur les principaux résultats qu'on déduirait du tracé effectif des courbes de pression.

La méthode se prête à une définition précise des points faibles, à la recherche de l'équilibre et de la stabilité des piles et culées ; à

la détermination du *coefficient de stabilité* d'une voûte (1) ; enfin, M. Durand-Claye en a donné, dans les *Annales des ponts et chaussées*, année 1868, n° 175, page 109, une extension intéressante à la recherche des conditions de stabilité des arcs métalliques, ou des voûtes où l'on aurait à tenir compte de la résistance des mortiers à l'extension.

Le travail de M. Durand-Claye sur les voûtes a été le point de départ de certaines recherches, parmi lesquelles nous citerons une étude de M. Cesare Ceradini, dans le *Journal des sciences naturelles et économiques* de Palerme, 1875, volume IX. On y trouve résolu en partie le problème de M. Durand-Claye, mais pour une voûte non symétrique.

MÉTHODE DE M. LE COLONEL PEAUCELLIER POUR VÉRIFIER LA STABILITÉ DES VOUTES EN BERCEAU.

(Mémorial de l'officier du génie, 1875, n° 24.)

285. Cette méthode est analogue à celle de M. Alfred Durand-Claye (2).

M. Peaucellier laisse d'abord de côté les conditions relatives à la limite de résistance des matériaux, et s'occupe de traduire graphiquement les conditions statiques de l'équilibre de la voûte, considérée comme formée de matériaux solides invariables. Il admet que la poussée à la clef est horizontale : le point d'application M de la poussée peut varier de position dans toute l'étendue du joint à la clef $J_0 i_0$ (fig. 248). Quant à sa grandeur P, elle est inconnue, et le but de la méthode est d'en déterminer les limites admissibles.

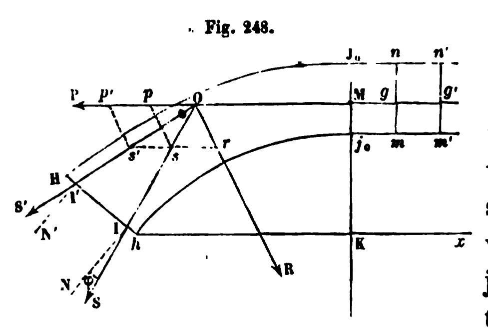
---

(1) Le coefficient de stabilité se détermine en faisant varier la pression-limite R par unité de surface. A chaque valeur de R correspond un contour $c_0 \omega_0 d_0$, qui est d'autant moins aigu que la limite R est plus basse; l'aire-limite *rspq* se resserre donc de plus en plus à mesure que R diminue. Déterminons la valeur R' de R, qui réduit l'aire-limite à un seul point. Nous aurons la plus grande valeur des pressions locales qui corresponde à la stabilité; le rapport $\frac{R'}{R}$, dont l'inverse mesure en quelque sorte la hardiesse de l'ouvrage, est ce que M. Durand-Claye appelle le *coefficient de stabilité*.

(2) Voir dans les *Annales des ponts et chaussées*, mai 1876, la note n° 25, qui contient la comparaison de ces deux méthodes.

1° *Condition relative au glissement.*

Soit Hh le joint des naissances, ou tout autre joint intermédiaire entre les naissances et la clef. Prenons arbitrairement le point M pour point de passage de la poussée P; la direction de la poussée sera l'horizontale MP. Soit R la résultante des forces qui agissent sur la portion de voûte comprise entre les joints $J_0 j_0$ et H h. La réaction mutuelle développée


Fig. 248.

dans le plan Hh sera la résultante des forces P et R. Or, au point de vue du glissement de la portion Hhj_0J_0 sur le plan Hh, les limites de P correspondent à des réactions mutuelles faisant avec la normale au joint, dans un sens ou dans l'autre, des angles égaux à l'angle φ du frottement de pierre sur pierre. Pour trouver ces limites, menons par le point O deux droites OS, OS', qui fassent avec le joint l'angle $90° - \varphi$, l'une en dessous de la normale N, l'autre en dessus de la normale N'; puis, prenant sur OR une quantité Or proportionnelle à la force R, on achèvera les parallélogrammes Orsp, O$rs'p'$, dont les diagonales ont les directions OS, OS'. Les côtés Op, Op', seront les limites cherchées de P. En effet, si P augmentait un peu à partir de la valeur Op', la résultante de P avec R serait dirigée en dehors de l'angle du frottement, et ne serait plus équilibrée par la résistance au frottement de la pierre : la voûte ne serait donc pas en équilibre, et le morceau Hhj_0J_0 remonterait le long du plan de joint Hh. De même, si P décroissait un peu à partir de la valeur Op, la résultante de P et de R passerait dans l'angle SOR, et la voûte glisserait sur le plan du joint Hh dans le sens descendant. Remarquons que ces limites Op, Op, qui correspondent au joint Hh, ne dépendent pas de la position arbitraire attribuée à la poussée sur le joint $J_0 j_0$, car la construction ne fait intervenir que les directions P et S, sans qu'on ait tenu compte de leur position effective. Portons donc en M, perpendiculairement au joint $J_0 j_0$, deux longueurs Mg = Op, Mg' = Op', et

menons par les points g et g' des parallèles au joint. Nous formons ainsi un rectangle $mn\,n'm'$, au dedans duquel on est certain que l'extrémité de la droite représentative de la poussée à la clef doit tomber pour qu'il n'y a pas glissement sur le joint Hh.

Cette construction doit être répétée sur tous les joints, pour qu'on soit sûr d'avoir pour P les limites les plus étroites possible. M. Peaucellier abrége notablement ces essais successifs au moyen d'une construction auxiliaire.

Désignons par

$$f_1, f_2, \ldots f_n,$$

les forces qui agissent sur chaque voussoir à partir de la clef, y compris la part de surcharge qu'on attribue à chacun d'eux.

Ces voussoirs seront représentés eux-mêmes par les lettres

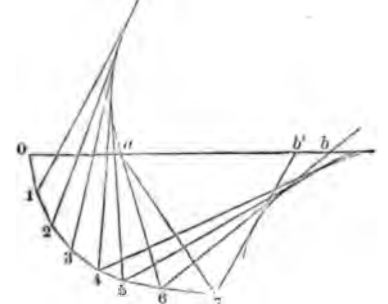
$$V_1, V_2, \ldots V_n.$$

Cela étant, si nous composons f_1 et f_2, nous aurons une résultante que nous appellerons R_2, et qui sollicite l'ensemble des voussoirs V_1 et V_2. Composant de même R_2 avec f_3, on aura la résultante R_3 qui sollicite les voussoirs V_1, V_2, V_3, et ainsi de suite, jusqu'à la résultante R_n, qui est formée des forces f_1, f_2, ... f_n et qui s'applique à l'ensemble des voussoirs V_1, ... V_n. On forme ainsi une série de résultantes

$$R_1, R_2, \ldots R_n$$

dont la première R_1 ne diffère pas de la force f_1. Pour avoir en grandeur ces résultantes R_1, R_2, ..., on aura recours à la construction du polygone des forces. A partir d'un point O quelconque, menons des droites

Fig. 249.



$$(01), (12), (23)\ldots$$

respectivement parallèles aux forces

$$f_1, f_2, f_3 \ldots$$

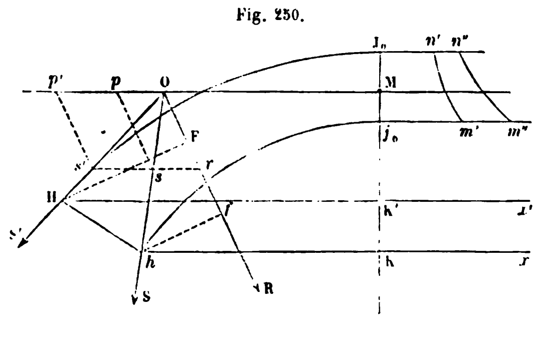
et proportionnelles à ces forces. On obtiendra une résultante quelconque R_6 en joignant les points O et 6. Chaque point 6 correspond d'ailleurs à un joint de la voûte,

à celui qui sépare le voussoir V_6 du voussoir V_7. Par le point 6 nous pourrons donc mener deux droites (6a), (6b), dont les directions fassent avec la normale à ce joint des angles égaux à φ dans les deux sens. Ces droites coupent en a et b l'horizontale menée par le point O; le triangle (6Oa) a donc ses côtés respectivement parallèles aux forces R_6, P et S, qui se font équilibre, et comme $R_6 =$ (O6), il en résulte (Oa) $=$ P ; (Oa) est donc la limite supérieure de la poussée qui prévient le glissement du haut de la voûte le long du joint n° 6. On prouverait de même que (Ob) est la limite supérieure de la poussée qui ne provoque pas le glissement de la voûte sur le même joint. Répétons la même construction pour chaque sommet : nous obtiendrons sur l'épure une courbe-enveloppe des droites telles que (6a), et il sera facile de déterminer d'après le tracé de cette courbe et en tenant compte de sa position par rapport à ses tangentes, quelle est la plus grande valeur (Oa) de la limite inférieure cherchée. Les droites telle que (6b) enveloppent aussi une courbe; mais elles restent généralement au-dessus, de sorte que la moindre valeur de la limite inférieure de la poussée correspond à la droite particulière (7b'), et non à la courbe-enveloppe de toutes ces droites prises ensemble. Dans tous les cas, le tracé de l'épure donne les limites (Oa) et (Ob'), entre lesquelles la condition relative au frottement impose à la poussée P d'être comprise. Ce sont ces limites qui serviront par conséquent à tracer les droites mn, $m'n'$.

2° *Condition relative au passage des réactions mutuelles dans le plan de joint.*

Soit Hh le joint des naissances. La réaction mutuelle S traversera le plan de joint, si la poussée P reste comprise entre les limites qui amènent la résultante des forces P et R à passer par les points H et h. Ayant donc joint les points Oh, OH, ache-

Fig. 250.



vons les parallélogrammes $Orsp$, $Ors'p'$, qui ont pour diagonales les droites Oh, OH. Si Or représente la force donnée R, Op et Op' seront les limites de la force P correspondantes au point de passage M, pris arbitrairement sur le joint de la clef. Ces valeurs-limites se modifient quand on déplace le point M. Soit P la valeur de la poussée appliquée à M qui donne lieu à une résultante S passant par le point h. Menons l'horizontale hK. Prenons pour centre des moments le point h, et appliquons le théorème des moments aux forces en équilibre S, R, P; il viendra

$$P \times MK = R \times hf,$$

quantité qui reste constante quelle que soit la position du point M sur la clef. Le produit $P \times MK$ étant constant, la courbe représentative des valeurs de P est une hyperbole équilatère qui a pour asymptotes la clef KJ_0 et l'horizontale hK prolongée. La portion utile de cette hyperpole est l'arc $m'n'$ compris entre les limites du joint à la clef.

En opérant de même pour le point H, on obtiendra pour courbe des limites supérieures de P une hyperbole $m''n''$ représentée par l'équation

$$P \times MK' = R \times HF,$$

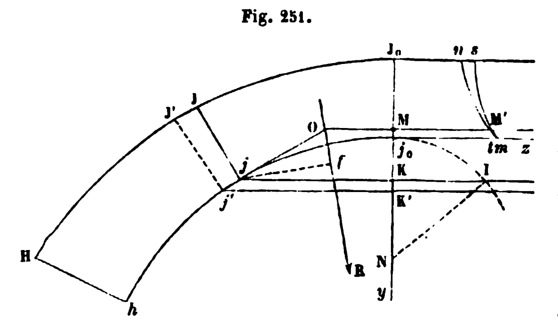
et ayant pour asymptotes les droites $K'J_0$ et HK' prolongée en $K'x'$. Ces deux hyperpoles, que l'on traçait aussi dans la méthode de M. Durand-Claye, dessinent un contour qui doit comprendre l'extrémité de toute poussée P.

M. Peaucellier exécute cette construction pour le joint des naissances seulement. On pourrait la répéter pour un certain nombre de plans de joints intermédiaires; on obtiendrait, en superposant toutes les opérations, un contour-résidu définissant les poussées qui ne font pas sortir de la voûte les réactions mutuelles de deux joints consécutifs. Mais cette manière d'opérer entraînerait une suite de constructions qu'on peut abréger, grâce à la remarque suivante.

Soit Jj un joint quelconque (fig. 251), et mn l'hyperbole dont les

ordonnées MM′ représentent, en chaque point M du joint à la clef $J_0 i_0$, la valeur de P qui, composée avec R, donne une résultante passant par le point j. La force R est la résultante des forces extérieures appliquées à la portion de voûte $J_0 i_0 i J$. Par le point j,

Fig. 251.



menons une tangente jO à l'intrados, jusqu'à la rencontre en O avec la force R, et menons par le point O une horizontale OMM′. Le point M ainsi obtenu sera le point d'application, et MM′ sera la grandeur, de la poussée P qui donne une réaction mutuelle tangente à l'intrados en j. Le point M′ appartiendra donc à l'hyperbole infiniment voisine que l'on construirait en prenant pour joint final le joint j'J′ infiniment voisin. C'est un point de l'enveloppe des hyperboles successives correspondantes aux divers points de l'intrados. Si nous construisons cette enveloppe, nous aurons une courbe qui pourra tenir lieu de l'ensemble des hyperboles qu'on aurait tracées. La question est ainsi ramenée à construire la courbe-lieu des points M′, c'est-à-dire la courbe des poussées telles, que la résultante des forces P et R touche l'intrados, au point où se termine la portion de la voûte à laquelle s'applique la force R. Voici comment M. Peaucellier résout ce problème au moyen d'une courbe auxiliaire.

P étant la poussée cherchée MM′, prenons les moments par rapport au joint i ; nous aurons

$$P \times MK = R \times jf = M,$$

M désignant le moment de la force R par rapport au joint j.

Cette équation doit encore satisfaite pour le point j', avec la même valeur de P et la même position du point M sur le joint $J_0 i_0$. Donc on aura, en différentiant,

$$P \times d(MK) = dM.$$

Faisons $j_0K = y$; la différentielle de MK est égale à KK', ou à dy. Donc

$$P = \frac{dM}{dy}.$$

On pourrait trouver P, par conséquent, en construisant la courbe de M en fonction de y, et en lui menant des tangentes. Mais il est préférable de construire, en la rapportant aux axes j_0y, j_0z, la courbe dont les ordonnées z satisfont à l'équation $z^2 = 2M$.

On portera pour cela sur chaque ordonnée KI, à la hauteur du point j de l'intrados, une longueur $KI = z$ égale à la racine carrée de 2M, ou du produit $2R \times jf$: construction facile à faire avec la règle et le compas. On obtiendra ainsi une courbe j_0I. Or

$$P = \frac{dM}{dy} = \frac{zdz}{dy},$$

de sorte que P est la sous-normale KN de cette courbe auxiliaire. Il n'y a plus qu'à porter la longueur KN en MM', à la hauteur du point O où la tangente à l'intrados rencontre la direction de la résultante R. On tracera en définitive une courbe ts, limitant les poussées qui rendent les réactions correspondantes tangentes à l'intrados.

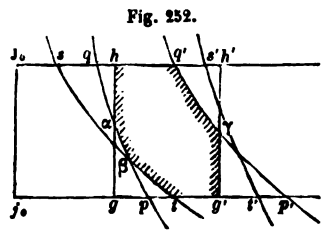
La même construction se fera sur le point J, et donnera lieu au tracé d'une autre courbe $t's'$ (fig. 252), donnant en chaque point une limite supérieure de P, et correspondante au contact des réactions mutuelles avec l'extrados.

En général, cette substitution de la courbe-enveloppe aux hyperboles enveloppantes n'est pas permise quand il s'agit de déterminer des limites ; elle n'est admissible en effet que dans la région où elle ne diminue pas la limite inférieure cherchée, et dans celle où elle n'augmente pas la limite supérieure. Mais l'écart entre l'enveloppe et les enveloppantes n'est nulle part assez considérable, dans l'étendue utile de l'épure, pour qu'il y ait un inconvénient pratique à adopter cette simplification.

En définitive on a à construire six lignes, savoir, les deux lignes

droites gh, $g'h'$, qui correspondent au glissement de la voûte vers le bas et vers le haut sur un plan de joint en particulier; les deux hyperboles pq, $p'q'$, qui correspondent à la résultante passant par la naissance à l'intrados pour l'une, et par la naissance à l'extrados pour l'autre; enfin les deux courbes ts, $t's'$, qui correspondent aux résultantes tangentes, l'une à l'intrados, l'autre à l'extrados. L'aire commune aux trois contours compris entre ces couples de limites est dans la figure l'aire $h\alpha\beta tg'\gamma q'$; elle limite les valeurs admissibles pour la poussée. S'il n'y a pas d'aire-résidu, les lignes formant les limites supérieures restant au-dessous des lignes dessinant les limites inférieures, l'équilibre de la voûte est certainement impossible.

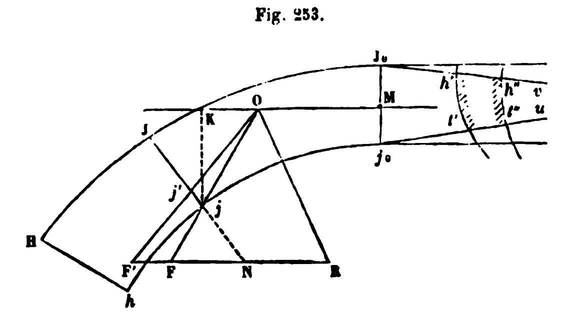
Fig. 252.



3° *Résistance-limite des matériaux.*

Jusqu'à présent nous avons raisonné sur la voûte comme si elle était formée de solides géométriques. La limite de résistance de la matière oblige à modifier les résultats obtenus. M. Durand-Claye traduit cette nouvelle condition par un tracé qui découpe dans le contour-limite la région où doit se trouver l'extrémité de la poussée. Mais il est obligé d'en faire autant pour un certain nombre de joints, et toute limitation opérée sur un joint donne lieu à une nouvelle altération du tracé à la clef. M. Peaucellier ne traite pas le problème des pressions locales avec autant de rigueur et de précision que M. Durand-Claye; il se contente d'éloigner les réactions mutuelles des arêtes où il les faisait d'abord passer, et de ramener la pression locale sur l'arête la plus voisine, à une valeur convenable. Pour le joint à la clef, il trace sur l'épure l'amorce de la construction de M. Durand-Claye. Si l'on appelle S la pression par unité

Fig. 253.



de surface sur l'arête la plus chargée, H la composante normale de la réaction mutuelle, et η la distance du point de passage de H à la même arête, on aura entre ces quantités l'équation

$$S = \frac{2}{3}\frac{H}{\eta},$$

qui est vraie tant que η ne dépasse pas le tiers de la longueur du voussoir. La limite S étant donnée, H est proportionnel à η, ce qui conduit à tracer les deux droites-limites $J_0 v$, $j_0 u$, à partir de l'extrados et de l'intrados à la clef. Ces droites enlèvent une portion du contour limite, et le réduisent à la figure $h't't''h''$. La région moyenne du joint, celle où les droites devraient se transformer en hyperboles, est assez éloignée, en général, pour n'avoir pas d'influence sur ce tracé.

Pour tout autre joint Jj, M. Peaucellier opère différemment. Soit OR la résultante des forces données qui agissent de $J_0 i_0$ à Jj; MO la direction d'une poussée P, qui, composée avec R, donne une résultante OF passant par le point j. Si OR est la résultante des forces données, on n'aura qu'à mener par le point R l'horizontale RF, pour avoir la poussée P = FR, et la résultante OF de OR et de P. Cela posé, on écartera la résultante OF du point j, en augmentant FR d'une quantité FF', que l'on déterminera de manière à réduire la pression au point j à la limite S convenable. Soit $jj' = \eta$, $FF' = \Delta P$. Prolongeons le joint Jj jusqu'en N à la rencontre de RF. Le triangle jFN, coupé par la transversale $Oj'F'$, donne l'équation

$$\frac{FF' \times Nj' \times Oj}{F'N \times jj' \times OF} = 1,$$

ou bien

$$\frac{\Delta P \times (Nj + \eta) \times Oj}{(FN + \Delta P) \times \eta \times OF} = 1.$$

Observons que η et ΔP sont très-petits par rapport aux quantités FN et Nj. On aura approximativement, en les effaçant, et en résolvant par rapport à ΔP,

$$\Delta P = \eta \times \frac{FN}{N} \times \frac{OF}{O};$$

mais le rapport $\frac{FN}{Nj}$ est égal au rapport des sinus des angles j et F du triangle FNj; donc

$$\Delta P = \eta \times \frac{OF \sin j}{Oj \sin F} = \eta \times \frac{H}{h},$$

en appelant H la composante normale au joint Ij de la réaction OF, et h la distance jK du point j à la poussée à la clef.

D'un autre côté on a

$$S = \frac{2}{3}\frac{H}{\eta}.$$

Donc

$$\eta = \frac{2}{3}\frac{H}{S},$$

et par suite

$$\Delta P = \frac{2}{3}\frac{H^2}{Sh}.$$

Telle est la quantité dont il faut *augmenter* les valeurs de la poussée à la clef, pour chaque joint, de manière à écarter convenablement la réaction mutuelle de l'*intrados*. A l'*extrados*, il faudrait de même altérer les poussées à la clef, mais en les *diminuant* de quantités qu'on évaluerait par une relation tout à fait semblable. On tiendra donc compte de la limite de résistance des matériaux en altérant point par point les tracés des lignes construites d'après les autres conditions de l'équilibre (1).

(1) On trouvera dans le *Bulletin de la société mathématique de France*, t. IV, juin 1876, des méthodes géométriques données par M. Giuseppe Jung, de Milan, pour le tracé de la troisième courbe (courbe des poussées maxima et minima) de M. Peaucellier. Ces méthodes dérivent des principes de la statique graphique.

MÉTHODE PRATIQUE POUR LA VÉRIFICATION DE LA STABILITÉ D'UNE VOUTE DONNÉE, SYMÉTRIQUE ET SYMÉTRIQUEMENT CHARGÉE.

286. La surface d'un joint réel est entièrement comprimée lorsque le centre de pression est situé dans le tiers central de l'épaisseur de ce joint. On admet en général que la poussée à la clef et la réaction dans le plan des naissances sont appliquées en des points pris dans le tiers central de l'épaisseur de la voûte aux naissances et à la clef, ce qui revient à supposer que les surfaces de ces joints sont partout comprimées.

Les principales hypothèses que l'on peut faire sans modifier cette première supposition sont au nombre de quatre et donnent quatre courbes de pressions à construire :

La première passe par le tiers supérieur du joint à la clef et le tiers supérieur du joint des naissances;

Fig. 254.

La seconde, par le tiers supérieur du joint à la clef et le tiers inférieur du joint des naissances;

La troisième, par le tiers inférieur du joint à la clef et le tiers supérieur du joint des naissances;

La quatrième, par le tiers inférieur du joint à la clef et le tiers inférieur du joint des naissances;

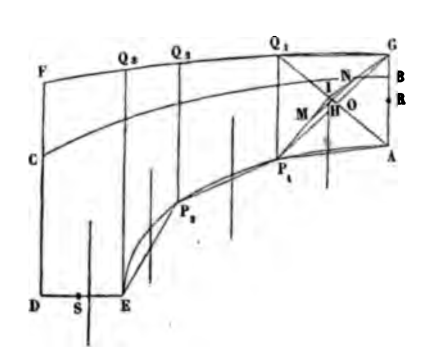
Et à chacune de ces hypothèses, qui paraissent également admissibles, correspond une distribution d'efforts qu'on peut déterminer complétement.

Les constructeurs se bornent ordinairement à examiner un seul cas; ils prennent pour point de passage, dans le joint de la clef, le tiers supérieur de l'épaisseur de la voûte, et pour point de passage dans le joint des naissances, le milieu de ce joint; le plan des naissances subit alors en tous ses points une compression égale.

287. Nous supposerons qu'on ait adopté cette méthode simplifiée. La voûte proposée est symétrique par rapport à la clef; elle a un profil déterminé ABCDE. Cette voûte supporte une certaine charge,

que l'on peut évaluer, et qui peut être représentée par une surface BCFG; il suffit, pour opérer cette transformation, d'estimer les charges en volume de la maçonnerie composant la voûte. On prendra ensuite le tiers supérieur R du joint BA à la clef, et le milieu S du joint aux naissances pour point de passage de la courbe des pressions.

Fig. 255.



Partageons le profil AEDFG de la voûte en un certain nombre de parties, en quatre parties, par exemple, par des verticales P_1Q_1, P_2Q_2, EQ_3, et substituons aux courbes AE et GF les cordes inscrites AP_1, P_1P_2, P_2E, GQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3F. On substitue ainsi des trapèzes aux figures mixtilignes $AP_1Q_1G_1$, ..., sans altérer sensiblement les surfaces et la position des centres de gravité de ces figures.

Il s'agit dès lors de chercher : 1° les centres de gravité des trapèzes; 2° les surfaces de ces trapèzes, que l'on peut représenter par des lignes droites en faisant choix d'une échelle pour cette évaluation.

1° Pour obtenir le centre de gravité du trapèze AP_1Q_1G menons une diagonale Q_1A; prenons-en le milieu I; joignons ce point aux extrémités P_1 et G de l'autre diagonale; prenons sur les lignes de jonction les points M et N, au tiers de leur longueur à partir du point I. Joignons MN; cette droite rencontre en O la première diagonale Q_1A; puis prenons sur MN une distance MH = NO, et le point H sera le centre de gravité cherché.

En effet, les points M et N sont les centres de gravité des deux triangles AP_1Q_1, AGQ_1, qui réunis forment le trapèse AP_1Q_1G; donc le centre de gravité du trapèze est sur la ligne MN; il y est d'ailleurs situé en un point H tel, que l'on ait l'égalité

$$\text{surf. } AGQ_1 \times NH = \text{surf. } AP_1Q_1 \times MH.$$

Mais les triangles AP_1Q_1, AGQ_1, ayant même base AQ_1, sont entre eux comme leurs hauteurs, lesquelles sont proportionnelles aux segments de la diagonale P_1G déterminés par l'autre diagonale ; or MO et NO sont respectivement égaux aux tiers de ces segments, et par suite on a la proportion

$$\frac{\text{surf. } A_1P_1Q_1}{\text{surf. } AGQ_1} = \frac{MO}{NO}.$$

En rapprochant ces deux relations, et observant que

$$MO + NO = MH + NH = MN,$$

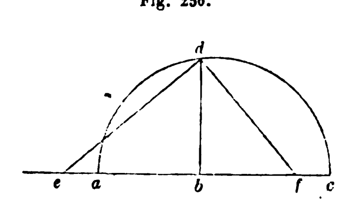
on en déduit l'égalité

$$MH = NO.$$

2° L'aire du trapèze AP_1Q_1G peut s'obtenir, soit en multipliant la demi-somme des bases $AG + Q_1P_1$ par la distance des bases, soit en prenant le produit de l'une AQ_1 des diagonales par la projection de l'autre sur une perpendiculaire à la première. Comme on cherche à représenter les poids par des lignes droites, on réduira tous ces rectangles à une même dimension arbitraire, et l'autre dimension sera proportionnelle à la surface.

Soit, par exemple, ab la longueur de l'une des diagonales, et bc la longueur de la projection de l'autre sur une perpendiculaire à la première. Le quadrilatère aura pour surface le produit $ab \times bc$, c'est-à-dire qu'il sera équivalent au carré construit sur l'ordonnée bd de la demi-circonférence décrite sur ac comme diamètre. Si l'on veut réduire tous les rectangles analogues à une dimension commune be, il suffit de joindre de, et d'élever au point d une perpendiculaire df sur de. La dimension bf représentera l'aire du quadrilatère, et par suite le poids de maçonnerie correspondant à cette aire.

Fig. 256.

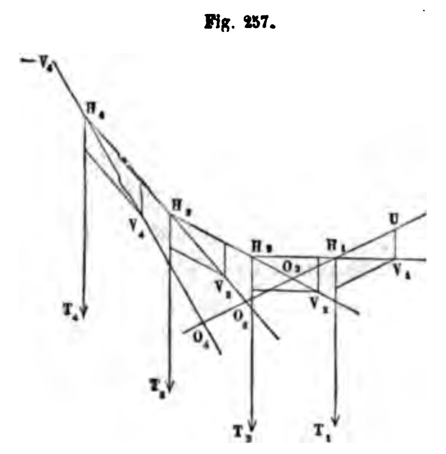


288. On pourra représenter de cette façon les poids qui agissent sur la demi-voûte par des droites finies, verticales, passant par les centres de gravité de chaque surface partielle. On cherchera alors la résultante de tous ces poids. Le théorème des moments permet de calculer la position de cette résultante; mais on peut la trouver exclusivement au moyen de constructions graphiques.

Soient T_1, T_2, T_3, T_4 les positions de quatre forces données, qu'il s'agit de composer.

Considérons la force T_1 comme appliquée en un point déterminé H_1 de sa direction, et appliquons en ce point une force quelconque U, faisant un certain angle avec T_1. Le parallélogramme construit sur les forces T_1 et U donnera la résultante V_1 de ces deux forces : prolongeons la direction de cette résultante jusqu'au point H_2, où elle rencontre la direction de la force T_2; composons V_1 et T_2, ce qui nous donnera la direction et l'intensité de la résultante V_2; transportons de même le point d'application de la force V_2 en H_3 sur la direction de T_3; composons V_2 et T_3, ce qui nous donnera V_3, que nous composerons en H_4 avec T_4 pour avoir V_4. Cette construction peut être prolongée aussi loin qu'on voudra; on parviendra toujours à déterminer une force V_4 telle, que le système formé par toutes les forces T_1, T_2, T_3, T_4, par la force U et la force $-V_4$, soit en équilibre. Car $-V_4$ est égale et contraire à la résultante V_4 de toutes les autres forces. Donc la résultante des forces U et $-V_4$ est égale et contraire à la résultante des forces T_1, T_2, T_3, T_4, et si l'on prolonge les directions de U et V_4, ces deux droites se couperont en un point O_4, qui appartiendra à la direction de la résultante cherchée.

Fig. 257.

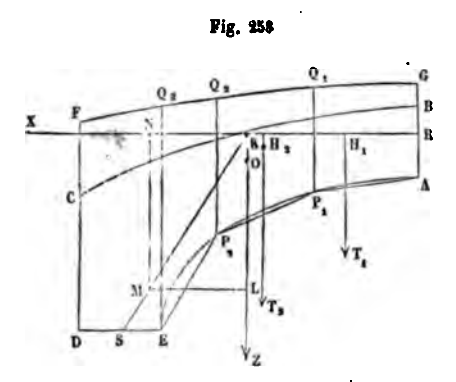


On prouverait de même que le point de rencontre, O_2, de U et V_2 ap-

partient à la résultante des forces T_1 et T_2, et que le point O_3 où se rencontrent les directions de U et V_3, est un point de la résultante des forces T_1, T_2, T_3. Cette construction revient à considérer l'équilibre d'un polygone funiculaire $UH_1 H_2 H_3 H_4$ ($-V_4$) sollicité par des forces T_1, T_2, T_3, T_4, et par deux forces U et $-V_4$, appliquées suivant les directions des côtés extrêmes. La construction du polygone auxiliaire de Varignon simplifiera le tracé du polygone funiculaire.

289. Une fois tous ces travaux préparatoires effectués, on mènera par la point R une horizontale indéfinie RX, qui sera la direction attribuée à la poussée à la clef; on vient de déterminer en grandeur et en position la résultante OZ des forces extérieures appliquées à la demi-voûte. Les deux droites RX, OZ, se coupent en un point K; on joindra KS, et prenant sur KZ une longueur KL, égale à OZ, on achèvera le rectangle KLMN, dont KM est la diagonale. Le côté KN représentera la poussée à la clef, et la diagonale KM, la réaction sur le plan des naissances. On achèvera ensuite la construction, en composant la force KN avec la force H_1T_1, appliquée au premier élément; puis la résultante avec la force H_2T_2, appliquée au second, ce qui revient à composer la poussée KN avec la résultante des forces T_1 et T_2, dont le point d'application O_2 est connu par le tracé du polygone funiculaire. On passera ensuite au troisième élément $P_2 Q_2 Q_3$ E, et, pour avoir la réaction dans le plan EQ_3, il suffira de même de composer la poussée KN avec la résultante des forces T_1, T_2, T_3, laquelle est appliquée au point O_3.

Fig. 258



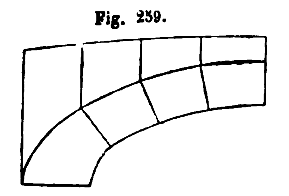
Lorsque le polygone des pressions est ainsi tracé dans la voûte, on peut vérifier si les trois conditions de l'équilibre stable sont satisfaites; il faut, comme nous l'avons vu, que la courbe soit entièrement contenue dans l'épaisseur de la voûte proprement dite, c'est-à-dire qu'elle ne sorte pas de la surface ABCDE; il faut de plus que

les *joints réels* fassent avec la courbe des angles au moins égaux au complément de l'angle du frottement des matériaux entrant dans la composition de l'ouvrage; il faut enfin que la pression sur le joint réel, au point le plus chargé, soit inférieure à la limite de résistance pratique.

Dans ces deux dernières vérifications, on fait usage des joints réels, et non des joints fictifs qu'on avait d'abord considérés. Cette méthode simplifiée n'est pas entièrement satisfaisante; car la courbe des pressions différerait légèrement de celle qu'on a construite en employant les joints fictifs, si l'on décomposait la voûte par ses plans de joints réels. Mais l'arbitraire subsisterait encore si l'on employait la décomposition réelle de la voûte proprement dite; car il faudrait toujours admettre dans la surcharge une certaine décomposition, pour laquelle on manque absolument de données positives.

On partage ordinairement cette surcharge par des plans verticaux, en se fondant sur ce que les disjonctions des maçonneries des tympans semblent se faire, en général, suivant des lignes à peu près verticales. Ce fait n'est pas assez bien constaté pour qu'on puisse voir dans ce mode de partage autre chose qu'une hypothèse arbitraire, et il n'y a par conséquent aucun inconvénient à étendre cette hypothèse à la voûte elle-même.

Fig. 259.



290. La courbe des pressions peut se prolonger dans le pied-droit, tout aussi bien que dans la voûte. On décompose pour cela le pied-droit en assises horizontales.

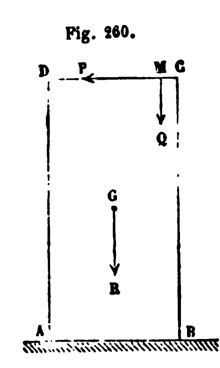
Le pied-droit qui reçoit la poussée d'une voûte unique est appelé *culée*. Le pied-droit qui reçoit les poussées de deux voûtes juxtaposées est appelé *pile*. En général, une pile est adjacente à deux voûtes égales et également chargées.

Pour l'équilibre d'un pied-droit, culée ou pile, il faut que la résultante des actions exercées par la voûte, ou par les deux voûtes adjacentes, passe dans l'intérieur de la base du pied-droit. Dans une pile, la résultante des actions qui s'exercent sur la maçonnerie étant sensiblement verticale, cette condition est toujours remplie. Le

calcul suivant indique l'épaissenr minimum à donner à une culée pour qu'il en soit ainsi malgré l'obliquité de l'action de la voûte.

Soit ABCD le profil de la culée, que nous supposons rectangulaire; la dimension de la culée perpendiculaire à la figure est égale à l'unité de longueur; soit M le point d'application de la résultante des actions de la voûte sur le pied-droit; posons $AB = x$, $AD = H$.

Fig. 260.



Soit P la poussée à la clef, Q le poids de la demi-voûte qui repose sur DC; P et Q seront les composantes de la réaction de la voûte et du pied-droit au point M. Désignons la quantité connue MC par la lettre a, appelons p le poids de l'unité de volume de la maçonnerie du pied-droit, et soit R le poids du pied-droit. Il faudra pour que la résultante des forces P, Q et R passe dans la base AB, qu'en prenant les moments de ces forces par rapport au point A, on ait l'inégalité

$$PH < Q(x - a) + R\frac{x}{2}.$$

Mais

$$R = pHx,$$

puisque le pied-droit a une longueur égale à l'unité.

Donc la condition posée équivaut à celle-ci :

$$PH + Qa < Qx + \frac{1}{2}pHx^2,$$

ou encore

$$x^2 + \frac{2Q}{pH}x - \frac{2(PH + Qa)}{pH} > 0.$$

Le premier membre de l'inégalité se décompose en deux facteurs, savoir,

$$\left\{x + \frac{Q}{pH} - \sqrt{\frac{Q^2}{p^2H^2} + \frac{2(PH + Qa)}{pH}}\right\} \times \left\{x + \frac{Q}{pH} + \sqrt{\frac{Q^2}{p^2H^2} + \frac{2(PH + Qa)}{pH}}\right\} > 0.$$

Le second facteur étant toujours positif, il faut que le premier le soit également, ce qui donne l'inégalité

$$x + \frac{Q}{pH} > \sqrt{\frac{Q^2}{p^2H^2} + \frac{2(PH + Qa)}{pH}}.$$

Et si l'on fait H infini, cette inégalité donne pour limite de l'épaisseur x du pied-droit,

$$x > \sqrt{\frac{2P}{p}}.$$

La limite inférieure de l'épaisseur d'une culée ne croît donc pas indéfiniment à mesure que la hauteur augmente.

On peut toujours faire usage de cette inégalité pour déterminer une limite inférieure de l'épaisseur à donner à une culée; mais il faudra appliquer ensuite la méthode de la courbe des pressions pour s'assurer que la charge de la matière au point A n'excède pas la limite de la résistance des matériaux.

Il est quelquefois nécessaire de s'assurer de la stabilité du pied-droit relativement à la poussée des terres qui agissent sur sa face AD. Les méthodes exposées à la fin de ce livre permettent de résoudre cette partie du problème.

RÈGLES SUIVIES PAR M. KLEITZ.

291. M. Kleitz formule ainsi qu'il suit des règles pratiques pour l'étude d'un projet de voûte :

1° A la clef, le joint ne s'ouvrant généralement pas, bien que la clef tasse au décintrement, on prendra le tiers supérieur du joint pour y faire passer la courbe des pressions;

2° Aux naissances d'un arc de cercle, ou au joint de rupture incliné à 30° d'un plein cintre, le joint s'ouvre à l'extérieur. On prendra donc le point de passage de la réaction mutuelle près de l'intrados (c'est l'idée de Dupuit, corrigée d'une manière pratique), savoir :

Au quart du joint pour les petites voûtes;

Au cinquième pour les grandes;

3° Au delà du joint de rupture, M. Kleitz considère la voûte comme

faisant partie de la culée ; il en calcule la stabilité comme s'il s'agissait d'un massif monolithique, mais il adopte une autre poussée à la clef pour ce calcul, en abaissant son point de passage à la moitié du joint, et en relevant le plus possible, au contraire, le point de passage sur le joint de rupture ; de cette manière, on obtient une valeur évidemment trop grande du moment de renversement ;

4° S'il s'agit de deux arches contiguës, M. Kleitz associe la plus grande poussée d'un côté avec la moindre poussée de l'autre, et *vice versâ*, de manière à placer la pile dans les conditions les plus défavorables.

INDICATION DE QUELQUES OUVRAGES SUR LES VOUTES.

292. Pour compléter autant que possible l'historique du problème de l'équilibre des voûtes, nous citerons les travaux suivants, tous dérivés de la théorie de M. Méry et de la considération de la courbe de pression.

M. Yvon Villarceau s'est proposé de trouver une forme de voûte telle, que la courbe des pressions y coupe à angle droit tous les joints au milieu de leur longueur. S'il en était ainsi, chaque surface de joint serait également pressée en tous ses points, et on pourrait réaliser, moyennant une variation convenable des épaisseurs, la voûte d'égale résistance. Mais on reconnaît aisément que le problème est impossible si on laisse les plans de joint s'étendre jusqu'à la surface de l'intrados, de sorte qu'il faut refouiller chaque joint d'une certaine quantité, à partir de la douelle, pour ramener la pression mutuelle des voussoirs à passer par le centre de gravité de la surface portante. Les formes trouvées par M. Yvon Villarceau n'ont pas pénétré dans la pratique. Cela ne doit pas surprendre ; les voûtes sont connues de toute antiquité, et leurs formes habituelles, consacrées par un long usage, ne pourraient être abandonnées que pour un perfectionnement bien réel. Or, l'égale résistance des voûtes de M. Yvon Villarceau n'existe que grâce à une pure hypothèse, à savoir, que la courbe coupant à angle droit les plans de joint en leurs centres sera la vraie courbe des pressions dans la voûte effectivement construite. Une infinité d'autres courbes de pression sont également possibles ; il est donc très-pro-

bable, il est même à peu près certain, si l'on tient compte de ce qui se passe au décintrement, que la voûte construite ne sera pas dans es conditions prévues, et se comportera comme les voûtes construites d'après les anciennes méthodes.

M. le docteur Scheffler, de Brunswick, a appliqué à la théorie des voûtes son principe de la *moindre résistance*. Sans méconnaître le mérite des déductions qu'il en a su tirer, nous ne pouvons voir dans ce prétendu principe, qu'une hypothèse propre à achever de déterminer tous les problèmes de construction dont la solution est encore inconnue. On a comparé ce principe au *théorème de la moindre action;* il y a, suivant nous, une différence essentielle entre les deux propositions. Le théorème de la moindre action est un résultat analytique parfaitement démontré : étant données les équations d'un problème de dynamique, complétement déterminé par le nombre d'équations nécessaire, on introduit dans la question une indétermination conventionnelle, en effaçant toutes les équations autres que l'équation des forces vives (supposée intégrable *à priori*). Cela posé, on reconnaît que toutes les équations effacées peuvent se déduire de l'équation conservée, moyennant une condition unique de minimum, $\delta\Sigma\int mvds = 0$. Le théorème de la moindre action ainsi présenté a une signification analytique précise, étrangère à toutes les considérations métaphysiques sur lesquelles Maupertuis avait essayé de l'établir. Appliquée aux problèmes de l'élasticité des corps solides, la même marche conduit à un théorème formulé dès 1858 par M. le général Menabrea, et qu'on énonce en ces termes : *Quand un système de points matériels, rattachés les uns aux autres par des liens rectilignes élastiques, est déformé par l'action de forces extérieures* (équilibrées par les forces intérieures et les tensions des liens), *le travail total développé par la résistance de ces liens est un minimum* (1). On reconnait la généralisation du théorème d'Euler sur le minimum de

(1) *Comptes rendus*, vol. XLVI, 1858. — On peut consulter, sur la démonstration de ce théorème une note de M. Valentino Cerruti, dans les *Atti dell' Academia dei Lincei*, 6 juin 1875.

$\int \frac{ds}{\rho^2}$ dans la déformation des pièces élastiques (§ 210). Ici, la loi de la déformation étant connue, on peut chercher les fonctions que le phénomène rend minimum, et on pourrait en trouver une infinité, dont chacune ferait l'objet d'un théorème. Mais poser de prime abord, en terrain inconnu, le principe de moindre résistance, c'est invoquer une hypothèse qui ne s'appuie sur aucun fait constaté, mais seulement sur cette idée vague que « la nature agit toujours par les moyens les plus simples et les plus économiques ». Maupertuis disait avec raison, en 1744 : « Nous ne connaissons pas assez quel est le but de « la nature, et nous pouvons nous méprendre sur la quantité que « nous devons regarder comme sa dépense dans la production de « ses effets. »

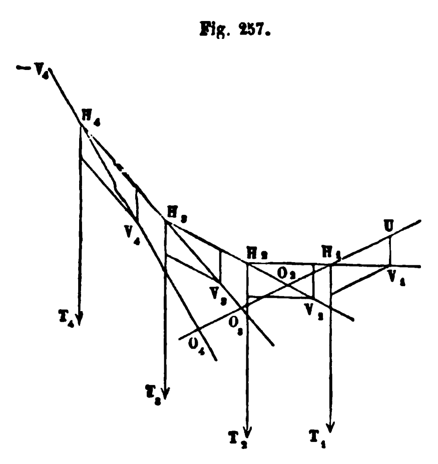
M. Drouets, dans son mémoire inséré en 1865 aux *Annales des ponts et chaussées*, est tombé dans l'erreur signalée par Maupertuis. « La nature, dit-il, ne développe les forces moléculaires que dans la mesure nécessaire à l'équilibre. » Ainsi le système de forces qui devrait se réaliser serait toujours celui qui donnerait les moindres réactions, résultat démenti par de nombreux exemples. Dupuit a montré, dans son ouvrage sur les voûtes, la gratuité de cette hypothèse. Les anciens philosophes disaient : *Natura horret vacuum;* à ce principe M. Drouets substitue le suivant : *Natura horret inutile.* « L'un n'est pas plus vrai que l'autre. La nature n'a aucune des passions qu'on lui suppose, elle est soumise à des lois inflexibles et invariables, et tout ce qui arrive en est une conséquence nécessaire. ..... On ne peut s'empêcher de reconnaître combien il est facile de s'égarer dans cette voie où l'on prend pour guide l'imagination au lieu du raisonnement. Les uns disent : La nature résiste avec la moindre poussée, ce qui donne la pression la plus grande sur les joints; les autres disent : La nature résiste avec la moindre pression par centimètre carré. Pourquoi ne pas dire aussi que la nature, qui a le choix des courbes de pression, réalise celle qui se rapproche le plus de la ligne droite, par l'horreur qu'elle a des voies détournées? » (Dupuit, *Traité de l'équilibre des voûtes*, Paris, 1870, chap. V, p. 132.)

288. On pourra représenter de cette façon les poids qui agissent sur la demi-voûte par des droites finies, verticales, passant par les centres de gravité de chaque surface partielle. On cherchera alors la résultante de tous ces poids. Le théorème des moments permet de calculer la position de cette résultante; mais on peut la trouver exclusivement au moyen de constructions graphiques.

Soient T_1, T_2, T_3, T_4 les positions de quatre forces données, qu'il s'agit de composer.

Considérons la force T_1 comme appliquée en un point déterminé H_1 de sa direction, et appliquons en ce point une force quelconque U, faisant un certain angle avec T_1. Le parallélogramme construit sur les forces T_1 et U donnera la résultante V_1 de ces deux forces : prolongeons la direction de cette résultante jusqu'au point H_2, où elle rencontre la direction de la force T_2; composons V_1 et T_2, ce qui nous donnera la direction et l'intensité de la résultante V_2; transportons de même le point d'application de la force V_2 en H_3 sur la direction de T_3; composons V_2 et T_3, ce qui nous donnera V_3, que nous composerons en H_4 avec T_4 pour avoir V_4. Cette construction peut être prolongée aussi loin qu'on voudra; on parviendra toujours à déterminer une force V_4 telle, que le système formé par toutes les forces T_1, T_2, T_3, T_4, par la force U et la force $-V_4$, soit en équilibre. Car $-V_4$ est égale et contraire à la résultante V_4 de toutes les autres forces. Donc la résultante des forces U et $-V_4$ est égale et contraire à la résultante des forces T_1, T_2, T_3, T_4, et si l'on prolonge les directions de U et V_4, ces deux droites se couperont en un point O_4, qui appartiendra à la direction de la résultante cherchée.

Fig. 257.

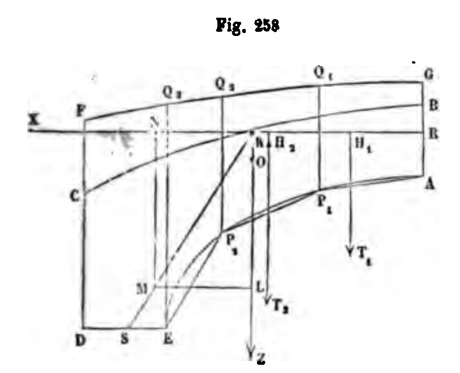


On prouverait de même que le point de rencontre, O_2, de U et V_2 ap-

partient à la résultante des forces T_1 et T_2, et que le point O_3 où se rencontrent les directions de U et V_3, est un point de la résultante des forces T_1, T_2, T_3. Cette construction revient à considérer l'équilibre d'un polygone funiculaire $UH_1 H_2 H_3 H_4$ ($-V_4$) sollicité par des forces T_1, T_2, T_3, T_4, et par deux forces U et $-V_4$, appliquées suivant les directions des côtés extrêmes. La construction du polygone auxiliaire de Varignon simplifiera le tracé du polygone funiculaire.

289. Une fois tous ces travaux préparatoires effectués, on mènera par la point R une horizontale indéfinie RX, qui sera la direction attribuée à la poussée à la clef; on vient de déterminer en grandeur et en position la résultante OZ des forces extérieures appliquées à la demi-voûte. Les deux droites RX, OZ, se coupent en un point K; on joindra KS, et prenant sur KZ une longueur KL, égale à OZ, on achèvera le rectangle KLMN, dont KM est la diagonale. Le côté KN représentera la poussée à la clef, et la diagonale KM, la réaction sur le plan des naissances. On achèvera ensuite la construction, en composant la force KN avec la force H_1T_1, appliquée au premier élément; puis la résultante avec la force $H_2 T_2$, appliquée au second, ce qui revient à composer la poussée KN avec la résultante des forces T_1 et T_2, dont le point d'application O_2 est connu par le tracé du polygone funiculaire. On passera ensuite au troisième élément $P_2 Q_2 Q_3$ E, et, pour avoir la réaction dans le plan EQ_3, il suffira de même de composer la poussée KN avec la résultante des forces T_1, T_2, T_3, laquelle est appliquée au point O_3.

Fig. 258



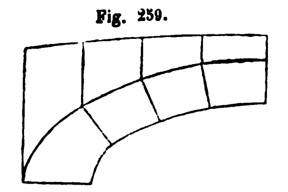
Lorsque le polygone des pressions est ainsi tracé dans la voûte, on peut vérifier si les trois conditions de l'équilibre stable sont satisfaites; il faut, comme nous l'avons vu, que la courbe soit entièrement contenue dans l'épaisseur de la voûte proprement dite, c'est-à-dire qu'elle ne sorte pas de la surface ABCDE; il faut de plus que

les *joints réels* fassent avec la courbe des angles au moins égaux au complément de l'angle du frottement des matériaux entrant dans la composition de l'ouvrage ; il faut enfin que la pression sur le joint réel, au point le plus chargé, soit inférieure à la limite de résistance pratique.

Dans ces deux dernières vérifications, on fait usage des joints réels, et non des joints fictifs qu'on avait d'abord considérés. Cette méthode simplifiée n'est pas entièrement satisfaisante ; car la courbe des pressions différerait légèrement de celle qu'on a construite en employant les joints fictifs, si l'on décomposait la voûte par ses plans de joints réels. Mais l'arbitraire subsisterait encore si l'on employait la décomposition réelle de la voûte proprement dite ; car il faudrait toujours admettre dans la surcharge une certaine décomposition, pour laquelle on manque absolument de données positives.

On partage ordinairement cette surcharge par des plans verticaux, en se fondant sur ce que les disjonctions des maçonneries des tympans semblent se faire, en général, suivant des lignes à peu près verticales. Ce fait n'est pas assez bien constaté pour qu'on puisse voir dans ce mode de partage autre chose qu'une hypothèse arbitraire, et il n'y a par conséquent aucun inconvénient à étendre cette hypothèse à la voûte elle-même.

Fig. 259.



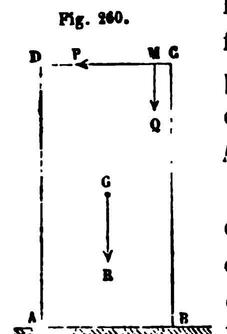
290. La courbe des pressions peut se prolonger dans le pied-droit, tout aussi bien que dans la voûte. On décompose pour cela le pied-droit en assises horizontales.

Le pied-droit qui reçoit la poussée d'une voûte unique est appelé *culée*. Le pied-droit qui reçoit les poussées de deux voûtes juxtaposées est appelé *pile*. En général, une pile est adjacente à deux voûtes égales et également chargées.

Pour l'équilibre d'un pied-droit, culée ou pile, il faut que la résultante des actions exercées par la voûte, ou par les deux voûtes adjacentes, passe dans l'intérieur de la base du pied-droit. Dans une pile, la résultante des actions qui s'exercent sur la maçonnerie étant sensiblement verticale, cette condition est toujours remplie. Le

calcul suivant indique l'épaissenr minimum à donner à une culée pour qu'il en soit ainsi malgré l'obliquité de l'action de la voûte.

Soit ABCD le profil de la culée, que nous supposons rectangulaire; la dimension de la culée perpendiculaire à la figure est égale à l'unité de longueur; soit M le point d'application de la résultante des actions de la voûte sur le pied-droit; posons $AB=x$, $AD=H$.



Soit P la poussée à la clef, Q le poids de la demi-voûte qui repose sur DC; P et Q seront les composantes de la réaction de la voûte et du pied-droit au point M. Désignons la quantité connue MC par la lettre a, appelons p le poids de l'unité de volume de la maçonnerie du pied-droit, et soit R le poids du pied-droit. Il faudra pour que la résultante des forces P, Q et R passe dans la base AB, qu'en prenant les moments de ces forces par rapport au point A, on ait l'inégalité

$$PH < Q(x-a) + R\frac{x}{2}.$$

Mais

$$R = pHx,$$

puisque le pied-droit a une longueur égale à l'unité.

Donc la condition posée équivaut à celle-ci :

$$PH + Qa < Qx + \frac{1}{2}pHx^2,$$

ou encore

$$x^2 + \frac{2Q}{pH}x - \frac{2(PH+Qa)}{pH} > 0.$$

Le premier membre de l'inégalité se décompose en deux facteurs, savoir,

$$\left\{x + \frac{Q}{pH} - \sqrt{\frac{Q^2}{p^2H^2} + \frac{2(PH+Qa)}{pH}}\right\} \times \left\{x + \frac{Q}{pH} + \sqrt{\frac{Q^2}{p^2H^2} + \frac{2(PH+Qa)}{pH}}\right\} > 0.$$

Le second facteur étant toujours positif, il faut que le premier le soit également, ce qui donne l'inégalité

$$x + \frac{Q}{pH} > \sqrt{\frac{Q^2}{p^2H^2} + \frac{2(PH + Qa)}{pH}}.$$

Et si l'on fait H infini, cette inégalité donne pour limite de l'épaisseur x du pied-droit,

$$x > \sqrt{\frac{2P}{p}}.$$

La limite inférieure de l'épaisseur d'une culée ne croît donc pas indéfiniment à mesure que la hauteur augmente.

On peut toujours faire usage de cette inégalité pour déterminer une limite inférieure de l'épaisseur à donner à une culée; mais il faudra appliquer ensuite la méthode de la courbe des pressions pour s'assurer que la charge de la matière au point A n'excède pas la limite de la résistance des matériaux.

Il est quelquefois nécessaire de s'assurer de la stabilité du pied-droit relativement à la poussée des terres qui agissent sur sa face AD. Les méthodes exposées à la fin de ce livre permettent de résoudre cette partie du problème.

RÈGLES SUIVIES PAR M. KLEITZ.

291. M. Kleitz formule ainsi qu'il suit des règles pratiques pour l'étude d'un projet de voûte :

1° A la clef, le joint ne s'ouvrant généralement pas, bien que la clef tasse au décintrement, on prendra le tiers supérieur du joint pour y faire passer la courbe des pressions ;

2° Aux naissances d'un arc de cercle, ou au joint de rupture incliné à 30° d'un plein cintre, le joint s'ouvre à l'extérieur. On prendra donc le point de passage de la réaction mutuelle près de l'intrados (c'est l'idée de Dupuit, corrigée d'une manière pratique), savoir :

Au quart du joint pour les petites voûtes ;

Au cinquième pour les grandes ;

3° Au delà du joint de rupture, M. Kleitz considère la voûte comme

faisant partie de la culée ; il en calcule la stabilité comme s'il s'agissait d'un massif monolithique, mais il adopte une autre poussée à la clef pour ce calcul, en abaissant son point de passage à la moitié du joint, et en relevant le plus possible, au contraire, le point de passage sur le joint de rupture ; de cette manière, on obtient une valeur évidemment trop grande du moment de renversement ;

4° S'il s'agit de deux arches contiguës, M. Kleitz associe la plus grande poussée d'un côté avec la moindre poussée de l'autre, et *vice versâ*, de manière à placer la pile dans les conditions les plus défavorables.

INDICATION DE QUELQUES OUVRAGES SUR LES VOUTES.

292. Pour compléter autant que possible l'historique du problème de l'équilibre des voûtes, nous citerons les travaux suivants, tous dérivés de la théorie de M. Méry et de la considération de la courbe de pression.

M. Yvon Villarceau s'est proposé de trouver une forme de voûte telle, que la courbe des pressions y coupe à angle droit tous les joints au milieu de leur longueur. S'il en était ainsi, chaque surface de joint serait également pressée en tous ses points, et on pourrait réaliser, moyennant une variation convenable des épaisseurs, la voûte d'égale résistance. Mais on reconnaît aisément que le problème est impossible si on laisse les plans de joint s'étendre jusqu'à la surface de l'intrados, de sorte qu'il faut refouiller chaque joint d'une certaine quantité, à partir de la douelle, pour ramener la pression mutuelle des voussoirs à passer par le centre de gravité de la surface portante. Les formes trouvées par M. Yvon Villarceau n'ont pas pénétré dans la pratique. Cela ne doit pas surprendre ; les voûtes sont connues de toute antiquité, et leurs formes habituelles, consacrées par un long usage, ne pourraient être abandonnées que pour un perfectionnement bien réel. Or, l'égale résistance des voûtes de M. Yvon Villarceau n'existe que grâce à une pure hypothèse, à savoir, que la courbe coupant à angle droit les plans de joint en leurs centres sera la vraie courbe des pressions dans la voûte effectivement construite. Une infinité d'autres courbes de pression sont également possibles ; il est donc très-pro-

bable, il est même à peu près certain, si l'on tient compte de ce qui se passe au décintrement, que la voûte construite ne sera pas dans es conditions prévues, et se comportera comme les voûtes construites d'après les anciennes méthodes.

M. le docteur Scheffler, de Brunswick, a appliqué à la théorie des voûtes son principe de la *moindre résistance*. Sans méconnaître le mérite des déductions qu'il en a su tirer, nous ne pouvons voir dans ce prétendu principe, qu'une hypothèse propre à achever de déterminer tous les problèmes de construction dont la solution est encore inconnue. On a comparé ce principe au *théorème de la moindre action;* il y a, suivant nous, une différence essentielle entre les deux propositions. Le théorème de la moindre action est un résultat analytique parfaitement démontré : étant données les équations d'un problème de dynamique, complétement déterminé par le nombre d'équations nécessaire, on introduit dans la question une indétermination conventionnelle, en effaçant toutes les équations autres que l'équation des forces vives (supposée intégrable *à priori*). Cela posé, on reconnaît que toutes les équations effacées peuvent se déduire de l'équation conservée, moyennant une condition unique de minimum, $\delta\Sigma \int mvds = 0$. Le théorème de la moindre action ainsi présenté a une signification analytique précise, étrangère à toutes les considérations métaphysiques sur lesquelles Maupertuis avait essayé de l'établir. Appliquée aux problèmes de l'élasticité des corps solides, la même marche conduit à un théorème formulé dès 1858 par M. le général Menabrea, et qu'on énonce en ces termes : *Quand un système de points matériels, rattachés les uns aux autres par des liens rectilignes élastiques, est déformé par l'action de forces extérieures* (équilibrées par les forces intérieures et les tensions des liens), *le travail total développé par la résistance de ces liens est un minimum* (1). On reconnait la généralisation du théorème d'Euler sur le minimum de

(1) *Comptes rendus*, vol. XLVI, 1858. — On peut consulter, sur la démonstration de ce théorème une note de M. Valentino Cerruti, dans les *Atti dell' Academia dei Lincei*, 6 juin 1875.

$\int \frac{ds}{\rho^2}$ dans la déformation des pièces élastiques (§ 210). Ici, la loi de la déformation étant connue, on peut chercher les fonctions que le phénomène rend minimum, et on pourrait en trouver une infinité, dont chacune ferait l'objet d'un théorème. Mais poser de prime abord, en terrain inconnu, le principe de moindre résistance, c'est invoquer une hypothèse qui ne s'appuie sur aucun fait constaté, mais seulement sur cette idée vague que « la nature agit toujours par les moyens les plus simples et les plus économiques ». Maupertuis disait avec raison, en 1744 : « Nous ne connaissons pas assez quel est le but de « la nature, et nous pouvons nous méprendre sur la quantité que « nous devons regarder comme sa dépense dans la production de « ses effets. »

M. Drouets, dans son mémoire inséré en 1865 aux *Annales des ponts et chaussées*, est tombé dans l'erreur signalée par Maupertuis. « La nature, dit-il, ne développe les forces moléculaires que dans la mesure nécessaire à l'équilibre. » Ainsi le système de forces qui devrait se réaliser serait toujours celui qui donnerait les moindres réactions, résultat démenti par de nombreux exemples. Dupuit a montré, dans son ouvrage sur les voûtes, la gratuité de cette hypothèse. Les anciens philosophes disaient : *Natura horret vacuum;* à ce principe M. Drouets substitue le suivant : *Natura horret inutile.* « L'un n'est pas plus vrai que l'autre. La nature n'a aucune des passions qu'on lui suppose, elle est soumise à des lois inflexibles et invariables, et tout ce qui arrive en est une conséquence nécessaire. ..... On ne peut s'empêcher de reconnaître combien il est facile de s'égarer dans cette voie où l'on prend pour guide l'imagination au lieu du raisonnement. Les uns disent : La nature résiste avec la moindre poussée, ce qui donne la pression la plus grande sur les joints; les autres disent : La nature résiste avec la moindre pression par centimètre carré. Pourquoi ne pas dire aussi que la nature, qui a le choix des courbes de pression, réalise celle qui se rapproche le plus de la ligne droite, par l'horreur qu'elle a des voies détournées? » (Dupuit, *Traité de l'équilibre des voûtes*, Paris, 1870, chap. V, p. 132.)

MÉTHODES USUELLES POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES EN BERCEAU.

293. L'intrados des voûtes en berceau peut être

En *plein cintre*,

En *arc de cercle*,

En *ellipse*,

En *anse de panier*,

Enfin, dans certains cas assez rares, en *ogive*.

Les problèmes qui se présentent le plus fréquemment dans la pratique de l'ingénieur sont relatifs au tracé des voûtes et à la détermination des épaisseurs qui peuvent en assurer la stabilité.

Les voûtes étant un genre de construction fort anciennement connu, on a depuis longtemps des formules qui résolvent ces problèmes d'une manière usuelle. Nous les passerons sommairement en revue.

VOUTES EN PLEIN CINTRE.

294. L'intrados est en plein cintre, lorsqu'il dessine une demi-circonférence. Le rayon ou le diamètre du cercle est donné; les inconnues principales à déterminer sont l'épaisseur à la clef, et l'épaisseur du pied-droit.

L'épaisseur à la clef, d'après Perronnet, est exprimable par une fonction linéaire du rayon du plein cintre; la formule de Perronnet, traduite en mesures métriques, est à peu près la suivante :

$$e = \frac{r}{15} + 0,33;$$

r est, en mètres, le rayon du plein cintre.
e est, en mètres, l'épaisseur à la clef.

Cette formule est incomplète; car elle ne contient pas de terme variable avec la surface de la voûte, élément dont on ne peut pas négliger l'influence. On trouve dans les ouvrages de Sganzin une table des voûtes en plein cintre, pour des surcharges à peu près définies, celles qui conviennent aux ponts pour route; on suppose les reins de la voûte remplis jusqu'au niveau de l'extrados à la clef,

et par-dessus une voie charretière, formée d'un pavage de 0^m,40 d'épaisseur. Voici cette table.

Pleins cintres (1).

Diamètre de l'arche.	ÉPAISSEUR à la clef.	ÉPAISSEUR DES CULÉES, LA HAUTEUR DES PIEDS-DROITS ÉTANT DE						
		0 mètre.	1 mètre.	2 mètres.	3 mètres.	4 mètres.	6 mètres.	8 mètres.
mèt.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.
1	0.36	0.40	0.50	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
2	0.40	0.45	0.70	0.80	0.85	0.95	1.00	1.10
3	0.43	0.50	0.80	0.95	1.05	1.15	1.25	1.35
4	0.46	0.60	0.90	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
5	0.50	0.65	1.00	1.20	1.30	1.45	1.55	1.70
6	0.53	0.75	1.10	1.30	1.45	1.60	1.75	1.90
7	0.56	0.85	1.20	1.40	1.60	1.75	1.90	2.10
8	0.60	0.95	1.30	1.50	1.70	1.85	2.10	2.25
9	0.63	1.05	1.40	1.60	1.85	2.00	2.25	2.40
10	0.67	1.20	1.50	1.75	2.00	2.15	2.40	2.60
12	0.74	1.40	1.75	2.00	2.20	2.40	2.65	2.90
15	0.84	1.75	2.10	2.30	2.60	2.80	3.15	3.40
20	1.04	2.30	2.65	2.80	3.10	3.35	3.65	4.00
30	1.35	3.25	3.55	3.80	4.10	4.40	4.80	5.20
40	1.69	4.20	4.50	4.80	5.10	5.40	5.80	6.20
50	2.06	5.15	5.40	5.80	6.10	6.40	6.80	7.20

(1) Lorsque la voûte est construite en maçonnerie de ciment, on peut réduire d'un tiers les épaisseurs à la clef données par cette table ou par la formule de Perronnet.

295. Les *ponts en dessus* pour chemins de fer sont dans d'autres conditions, et ces tables ne peuvent suffire. Le remblai qui pèse sur la voûte peut être très-élevé, et s'il y a peu de hauteur entre la voie et l'extrados, on cherche, en général, à introduire entre ces deux niveaux un matelas de terrassement assez épais pour amortir, pendant le passage des trains, les ébranlements qui seraient nuisibles à la conservation des maçonneries. Pour les voûtes très-chargées, l'emploi de la courbe des pressions paraît donc indispensable.

296. On se servait, il y a quelques années, en Allemagne et en Russie, des formules suivantes, où entre la hauteur de la surcharge en terre au-dessus de l'extrados. Ces formules s'appliquent aux pleins cintres et aux voûtes en ellipse ou en anse de panier.

Soit D l'ouverture libre, ou portée de la voûte;

f, la flèche ou montée, égale à $\frac{D}{2}$ dans les voûtes en plein cintre

e, l'épaisseur à la clef;

H, la hauteur du pied-droit, entre la fondation et les naissances;

R, la hauteur de la surcharge de terre au-dessus de l'extrados à la clef;

r, le rayon de l'intrados, égal à *f* ou à $\frac{D}{2}$ dans les pleins cintres, égal, dans les ellipses, au rayon de courbure au sommet;

Y, l'épaisseur de la culée ou pied-droit.

On calculera *e* et Y, qui sont les inconnues, par les formules :

$$e = 0^m.43 + \frac{r}{10} + \frac{R}{50},$$
$$Y = 0^m.305 + \frac{D}{8}\left(\frac{3D-f}{D+f}\right) + \frac{H}{6} + \frac{R}{12},$$

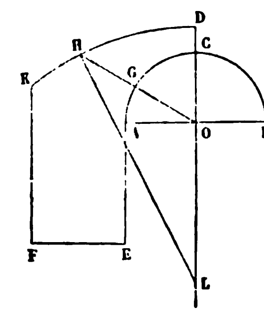
Lorsque la voûte est en plein cintre, Y devient égal à

$$0^m.305 + \frac{5}{24}D + \frac{1}{6}H + \frac{1}{12}R.$$

L'extrados des voûtes en plein cintre peut se tracer comme il suit :

Soient ABC le plein cintre, AB le plan de naissance, AE la hauteur des pieds-droits.

Fig. 261.



La formule donne l'épaisseur CD à la clef, et l'épaisseur EF de la culée.

Par le centre O de l'intrados, menons une droite OH faisant avec l'horizon un angle de 30°; à partir du point G où cette droite rencontre l'intrados, prenons GH = DC × 2. Puis faisons passer par le point D un arc de cercle ayant son centre L sur la verticale CO, et passant par le point H. Prolongeons cet arc par une tangente en H jusqu'à la rencontre de la

verticale FK, qui représente la face postérieure de la culée. La ligne DHK sera l'extrados.

On a aussi les formules

$$\text{surf. HGCD} = \frac{1}{2}(1{,}317er + 0{,}806e^2),$$

$$\text{et arc HD} = \frac{\pi r}{6} + \frac{\text{surf. HGCD}}{r},$$

qui simplifient le métré de la voûte.

La solution qu'on vient d'indiquer conduit à donner à la voûte une épaisseur croissante de la clef aux naissances, et au pied-droit une épaisseur constante. Tous les constructeurs ne sont pas d'accord sur ce sujet; les uns veulent que la voûte reçoive partout la même épaisseur, comme l'archivolte d'une arcade; d'autres font varier l'épaisseur du pied-droit aux diverses assises, en donnant à la maçonnerie des retraites successives de la base au sommet. La théorie est trop imparfaite pour décider laquelle est la meilleure de toutes ces solutions.

Les formules précédentes donnent des épaisseurs très-fortes; l'usage des constructeurs français n'est pas aujourd'hui de surcharger ainsi les voûtes, en augmentant inutilement leur poids propre.

297. On peut se proposer de tracer l'extrados d'une voûte dont l'intrados est donné, de manière qu'il y ait coïncidence exacte entre les courbes des pressions que l'on obtient en considérant successivement la voûte avec ou sans sa surcharge. S'il en est ainsi, l'addition de la surcharge n'aura d'autre effet que d'augmenter dans chaque section les pressions dans un même rapport, et la déformation de la voûte n'en sera pas sensiblement modifiée. On résout facilement ce problème quand on admet le partage de la voûte par des plans verticaux; il suffit en effet de prendre pour extrados une ligne qui divise dans un même rapport les portions de verticales comprises entre la courbe d'intrados et la ligne limitative de la surcharge, supposée ramenée au même poids spécifique que les matériaux de la voûte. On peut passer alors de la voûte chargée à la voûte sans surcharge par une simple réduction du poids spécifique attribué aux matériaux. La poussée à la clef et toutes les pressions subissent une réduction proportionnelle.

VOUTES EN ARC DE CERCLE.

298. On donne en général aux voûtes en arc de cercle une flèche qui varie du huitième au douzième de l'ouverture; le plus souvent elle est du dixième.

Les formules que nous avons données pour le plein cintre s'appliquent aux arcs de cercle. Le rayon r de l'arc se déduit de l'ouverture D et de la montée f.

On a en effet

$$\frac{D^2}{4} = f(2r - f),$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{f}{2} + \frac{D^2}{8f}.$$

Si l'arc est surbaissé au dixième,

$$r = \left(\frac{1}{20} + \frac{10}{8}\right) D = \frac{13}{10} D.$$

VOUTES EN ELLIPSE OU EN ANSE DE PANIER.

299. Soient encore f la montée, D l'ouverture; si l'on appelle x et y les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse, rapportée à son centre et à ses axes, on aura entre x et y la relation

$$\frac{4x^2}{D^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1,$$

qui permet de construire la courbe par points.

En général on prend f égal au tiers de D, et alors on peut se servir de la table qui suit pour déterminer l'épaisseur à la clef et l'épaisseur des pieds-droits, les conditions de charge de la voûte étant les mêmes que celles qui ont été indiquées § 294.

Largeur de l'arche D.	ÉPAISSEUR à la clef e.	ÉPAISSEUR DES CULÉES Y, LA HAUTEUR H DES PIEDS-DROITS ÉTANT DE 1 mètre.	2 mètres.	3 mètres.	4 mètres.	5 mètres.	6 mètres.	8 mètres.
mèt.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres	mètres.	mètres.
1	0.38	0.65	0.75	0 80	0.85	0.90	0.95	1.00
2	0.43	0.90	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.35
3	0.50	1.10	1.35	1.45	1.50	1.60	1.65	1.70
4	0.56	1.35	1.65	1.80	1.90	1.95	2.00	2.10
5	0.61	1.55	1.85	2.00	2.10	2.20	2.30	2.40
6	0.66	1.65	1.95	2.15	2.30	2.45	2.55	2.70
7	0.70	1.75	2.05	2.35	2.50	2.65	2.75	3.00
8	0.74	1.85	2.25	2.50	2.70	2.85	3.00	3.30
9	0.79	1.95	2.40	2.70	2.90	3.13	3.25	3.50
10	0.84	2.10	2.50	2.80	3.05	3.20	3.40	3.70
12	0.95	2.30	2.80	3.15	3.40	3.65	3.80	4.00
15	1.10	2.60	3.15	3.50	3.90	4.10	4.30	4.60
20	1.35	3.20	3.80	4.20	4.50	4.80	5.00	5.30
30	1.85	4.40	5.00	5.40	5.70	6.10	6.40	6.70
40	2.35	5.50	6.20	6.60	6.90	7.50	7.80	8.10
50	2.85	6.70	7.40	7.80	8.20	8.80	9.20	9.60

Pour appliquer les formules générales données dans le § 296, il faudrait prendre pour r la valeur du rayon de courbure de l'ellipse à la clef, c'est-à-dire

$$r = \frac{D^2}{4f},$$

et lorsque l'ellipse est surbaissée au tiers,

$$r = \frac{3}{4} D.$$

Les courbes en anse de panier sont des imitations d'ellipse au moyen d'une série d'arcs de cercle qui se raccordent l'un à l'autre. Le calcul de leurs dimensions se fait au moyen des mêmes formules et des mêmes tables.

VOUTES EN PLATE-BANDE.

300. La plate-bande ne s'emploie que pour recouvrir un espace vide de petite dimension, comme une fenêtre. Il est impossible de

tracer les joints perpendiculairement à l'intrados; l'usage est de les faire converger vers un point pris arbitrairement sur l'axe de la voûte.

ÉQUILIBRE DES VOUTES SUR CINTRES.

301. Les cintres se composent de fermes en charpente entretoisées les unes avec les autres, et dont l'objet est de soutenir les voussoirs à mesure qu'on en fait la pose. Une fois fermée, la voûte peut être décintrée ; on a remarqué toutefois que les tassements des maçonneries sont moindres quand la voûte est restée sur cintre assez de temps pour que les mortiers aient pu se solidifier.

Le tracé du cintre se fait suivant une courbe parallèle à l'intrados, laissant entre elle et la voûte un intervalle égal à l'épaisseur des *couchis.* La courbure s'obtient au moyen de pièces sciées et rapportées que l'on appelle *veaux*. L'ossature de chaque ferme est formée d'une série de triangles en charpente, dont le système ne puisse subir d'autres déformations que celles qui résultent de l'élasticité propre des bois.

Les efforts exercés par les voussoirs sur le cintre sont équilibrés par les réactions des appuis sur lesquels le cintre repose; ces réactions sont verticales ou obliques, suivant le système de la charpente. Si elles sont obliques, leurs composantes horizontales sont empruntées aux pieds-droits de la voûte, et par suite le cintre exerce sur la maçonnerie du pied-droit une poussée,qui peut, dans certains cas, en compromettre la stabilité.

Les cintres *retroussés* que Perronet a employés pour la construction des ponts de Neuilly (1768-1772), de Mantes (1765), etc., sont composés de quatre contours polygonaux à angles très-ouverts, inscrits le second dans le premier, le troisième dans le second, le quatrième dans le troisième, les milieux des côtés du polygone circonscrit correspondant aux sommets du polygone qui y est inscrit. Les quatre contours sont reliés les uns aux autres par des *moises pendantes*, placées normalement à l'intrados de la voûte, à tous les

sommets de ces divers contours. Un cintre ainsi construit a beaucoup d'élasticité, possède peu de raideur, subit par conséquent de grandes déformations pendant la pose, enfin exerce une poussée sur les pieds-droits; il était même nécessaire d'en charger la clef, pour qu'elle ne se soulevât pas à mesure de la pose des voussoirs successifs au-dessus des retombées des naissances. L'espacement des fermes était fixé par Perronet à 6 pieds de roi ($1^m.949$).

Dans son mémoire sur les cintres (LXV et suiv.), Perronet observe que le plus grand effort auquel un cintre ait à résister correspond au cas où tous les voussoirs, excepté la clef, sont posés. La pose de la clef décharge *virtuellement* la charpente, en permettant à la voûte de se soutenir sans appui étranger. Perronet admet qu'à partir des naissances jusqu'au joint incliné de 30 degrés sur l'horizon, les voussoirs n'exercent aucune pression sur les couchis. Les autres voussoirs pèsent sur le cintre, mais non pas de tout leur poids. D'après Couplet, la fraction de ce poids qui pèse sur les couchis, dans une voûte en plein cintre, est environ les deux tiers du poids total. Perronet propose, en conséquence, de calculer la charge d'un cintre, dans les voûtes demi-circulaires, en prenant les deux tiers du poids de l'arc central de voûte dont l'angle au centre est de 120 degrés, ce qui revient à prendre environ les quatre neuvièmes du poids total de la voûte.

En général on donne aujourd'hui aux cintres le plus de raideur possible en en formant l'ossature de triangles à peu près équilatéraux.

On ne doit pas oublier que le décintrement d'une voûte peut entraîner le renversement de la pile qui lui sert d'appui, si la pile n'a pas les dimensions nécessaires pour servir de culée à la voûte prise isolément, ou si la voûte voisine n'est pas encore construite. Posée sur un cintre sans poussée, la voûte n'exercerait aucun effort horizontal sur la pile.

TABLES ET RENSEIGNEMENTS DIVERS SUR LES VOUTES EN BERCEAU.

I. *Formules empiriques pour calculer les dimensions des voûtes en maçonnerie.*

Unité de longueur, le mètre.
D ouverture d'une arche,
f montée ou flèche,
e épaisseur à la clef,
Y épaisseur du pied-droit faisant culée,
H hauteur du pied-droit,
S hauteur de la surcharge de terre au-dessus de la base du pied-droit.

FORMULES DE M. LÉVEILLÉ.

$$e = 0^{m}.33 + \frac{1}{30}\,D.$$

(Cette formule ne tient pas compte de la hauteur S.)

Plein cintre. $$Y = (0^{m}.30 + 0{,}162\,D)\sqrt{\frac{\left(\dfrac{H + \frac{1}{4}D}{S}\right)}{\left(\dfrac{e + \frac{1}{4}D}{0{,}865\,D}\right)}}.$$

Arc de cercle. $$Y = (0^{m}.33 + 0{,}212\,D)\sqrt{\frac{\left(\dfrac{H}{S}\right)}{\left(\dfrac{f+e}{D}\right)}}.$$

FORMULES DE M. LESCUILLER, INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Ces formules ne tiennent pas compte de la surcharge.

$$e = 0{,}2\sqrt{D} + 0^{m}.1.$$

Plein cintre. $$Y = \sqrt{D}\,(0{,}6 + 0{,}04\,H).$$

Anse de panier. $$Y = \sqrt{D}\left[0{,}6 + 0{,}05\left(\frac{D}{f} - 2\right) + 0{,}04\,H\right].$$

Arc de cercle. $$Y = \sqrt{D}\left[0{,}6 + 0{,}1\left(\frac{D}{f} - 2\right) + 0{,}04\,H\right].$$

II. *Poids du mètre cube des matériaux.*

Granits et porphyres	2,600 à 2,800 kilog.
Pierres volcaniques; basalte, lave dure	2,800 à 3,100
Pierres calcaires dures	2,650 à 2,800
Calcaires tendres	2,400
Briques	1,000 à 1,400
Mortier de chaux et sable	1,800 à 2,100
Mortier de ciment	1,650 à 1,700
Plâtre gâché humide	1,570 à 1,600
Plâtre gâché sec	1,400
Sable	1,400 à 1,800
Grès	2,400

Pour la charge-limite à faire supporter aux maçonneries, voir la table donnée § 28.

TABLE DES PLUS GRANDES CHARGES AUXQUELLES LA MAÇONNERIE SOIT SOUMISE DANS CERTAINS ÉDIFICES (Rondelet).

	kilog. par cent. carré.
Saint-Pierre, à Rome, piliers	16,3539
Saint-Paul, à Londres, piliers	19,3498
Église des Invalides, à Paris, piliers	14,7826
Église Sainte-Geneviève, à Paris, piliers	29,4290
Saint-Paul Hors des Murs, à Rome, colonnes	19,7609
Église Saint-Méry, à Paris, piliers	29,4234
Église Saint-Serge, à Angers, colonnes du chœur	44,3

III. *Charge qui produit l'écrasement des matériaux par centimètre carré de section.*

Tables de Genieys. — Résistance des corps.

INDICATION DES MATÉRIAUX.	Poids du décimètre cube.	Charge d'écrasement par centimètre carré.	Hauteur représentative de la charge d'écrasement (1).	OBSERVATIONS.
Pierres volcaniques.	kilogr.	kilogr.	mètres.	
Basalte de Suède.	3,06	1912	6248	Rondelet.
Basalte d'Auvergne.	2,88	2078	7215	*Id.*
Lave du Vésuve, dite *Piperno*. . .	2,60	563	2165	*Id.*
Lave grise des environs de Rome.	1,97	228	1157	*Id.*
Tuf de Rome.	1,22	58	478	*Id.*
Granits.				
Granit d'Aberdeen bleu.	2,62	767	2927	G. Rennie.
Granit vert des Vosges..	2,85	620	2175	Rondelet.
Granit gris de Bretagne.	2,74	654	2383	*Id.*
Granit de Normandie, Gatmos. . .	2,66	702	2639	*Id.*
Granit gris des Vosges.	2,64	423	1603	*Id.*
Grès.				
Grès très-dur.	2,52	813	3226	*Id.*
Grès blanc.	2,48	923	3713	*Id.*
Grès bigarré des Vosges.	2,17	400	1843	Conservatoire des arts et métiers.
Pierres calcaires.				
Marbre noir de Flandre..	2,72	789	2901	Rondelet.
Marbre blanc veiné.	2,70	298	1104	*Id.*
Marbre rouge du Devonshire.. . .	2,70	522	1933	Rennie.
Calcaire de Portland..	2,42	262	1083	*Id.*
Pierre de Caserte, près Naples. . .	2,72	595	2191	Rondelet.
Pierre noire de St-Fortunat (Lyon)	2,65	627	2366	*Id.*
Liais de Bagneux, près Paris. . .	2,44	445	1824	*Id.*
Travertino de Rome.	2,36	298	1262	*Id.*
Roche de Châtillon, près Paris. . .	2,29	174	760	*Id.*
Roche douce de Châtillon.	2,08	134	644	*Id.*
Roche d'Arcueil, près Paris. . . .	2,30	253	1100	*Id.*
Pierre de Saillancourt, 1re qualité.	2,41	141	585	*Id.*
Briques.				
Brique dure très-cuite.	1,55	150	962	
Brique rouge.	2,17	57	262	
Brique rouge pâle.	2,08	39	187	
Mortiers.				
Mortier de chaux et de sable de rivière.	1,63	31	»	Rondelet.
Mortier de ciment de tuileau. . .	1,46	48	»	*Id.*
Mortier de pouzzolanes de Naples et de Rome mêlées.	1,46	37	»	*Id.*
Mortier avec chaux éminemment hydraulique.	»	144	»	Vicat.

(1) Cette colonne indique la hauteur du prisme droit de la matière considérée dont le poids serait suffisant pour écraser sa propre base (§ 25).

CHAPITRE II.

VOUTES BIAISES.

---

302. Une voûte en berceau est *biaise* lorsque les plans des têtes de la voûte sont obliques aux génératrices rectilignes du berceau.

L'intrados d'une voûte biaise est donc une portion de surface cylindrique comprise, d'une part, entre les deux génératrices rectilignes des naissances, d'autre part, entre les courbes d'intersection de la surface cylindrique avec les plans verticaux, généralement parallèles entre eux, qui contiennent les têtes. Chacune de ces courbes d'intersection s'appelle *courbe de tête réelle*, par opposition aux courbes de tête *fictives*, que l'on considère dans le tracé de l'appareil hélicoïdal.

L'*angle du biais* est l'angle du plan de tête avec un plan mené perpendiculairement aux génératrices rectilignes de l'intrados. Cet angle est le complément de l'angle formé par une quelconque des génératrices avec le plan de tête. Quand la voûte est droite, l'angle du biais est nul.

COMPARAISON D'UNE VOUTE BIAISE ET D'UNE VOUTE DROITE AYANT DES TÊTES IDENTIQUES.

303. Coupons les deux voûtes, auxquelles nous supposons une même longueur, par une série de plans parallèles aux plans des têtes, équidistants et infiniment rapprochés. La portion de voûte biaise comprise entre deux plans infiniment voisins peut être con-

fondue avec la portion élémentaire qui lui correspond dans la voûte droite. Le biais perd en effet toute influence sur une voûte infiniment mince, car l'altération qu'il faut faire subir à une voûte droite infiniment mince pour la rendre biaise est une altération infiniment petite d'un ordre supérieur au premier (1). On est ainsi conduit à regarder une voûte biaise comme le résultat de la liaison d'un nombre infini de voûtes droites infiniment minces, échelonnées les unes à côté des autres.

De là résulte que l'épaisseur à la clef d'une voûte biaise, et les autres dimensions de la voûte et de ses pieds-droits, se détermineront comme s'il s'agissait de la voûte droite ayant pour profil transversal l'élévation de la tête de la voûte biaise; car les dimensions de la voûte droite, assurant l'équilibre et la résistance de chaque élément de voûte, assurent également l'équilibre de la voûte biaise, où les mêmes éléments se retrouvent différemment juxtaposés.

Une expérience, due à M. de la Gournerie, et répétée par lui bien des fois, au congrès de Nantes, en 1875, à la Société d'encouragement et au Conservatoire des arts et métiers, a complétement justifié cette assimilation des voûtes biaises aux voûtes droites. Une petite voûte biaise à 45°, en plein cintre, est formée de la juxtaposition de voussoirs creux, en zinc, avec faces enduites de couleur pour augmenter le coefficient du frottement. Les culées qui portent cette voûte consistent en tasseaux verticaux, indépendants, qu'on peut faire descendre à volonté suivant la verticale. Quand on abaisse un tasseau, les

(1) Cette remarque rend fort douteuse l'exactitude du principe sur lequel les partisans de la *poussée au vide* font reposer toute leur théorie des voûtes biaises : ce principe consiste à admettre que *dans une voûte en berceau, droite ou biaise, la plus grande contraction s'opère, et, par suite, les poussées mutuelles sont dirigées, dans le plan des sections de plus grande courbure de l'intrados*, c'est-à-dire *dans des plans de section droite*. Or, si l'on considère une voûte infiniment mince, on peut évidemment, sans rien changer aux poussées, altérer d'une infinité de manières la surface de l'intrados et l'orientation des sections de plus grande courbure, en faisant passer des surfaces cylindriques quelconques par la ligne qui sert de courbe d'intrados à la voûte dans son plan moyen. On peut d'ailleurs, sans modifier sensiblement l'équilibre de la voûte, détruire la continuité de la surface de l'intrados; la section droite perd alors toute signification, et les lignes de courbure peuvent être profondément altérées, sans qu'il en résulte rien de fâcheux pour la stabilité du massif.

voussoirs qu'il porte directement tombent, et une brèche s'accuse dans la voûte. La brèche s'arrête à un lit de voussoirs, qui, étant amaigris vers l'intrados dans les deux sens, font plate-bande pour résister à la poussée des voussoirs situés plus haut dans la voûte. On continue à abaisser des tasseaux vers le milieu de chaque culée; à chaque fois la brèche s'étend plus avant, mais *toujours dans des directions parallèles aux plans de tête*. Quelquefois on arrive à enlever ainsi toute la partie intermédiaire de la voûte, de manière à isoler complétement une tête de l'autre. Lorsqu'on enlève l'appui d'un solide, le déplacement de ce solide accuse la direction dans laquelle l'appui était appelé à fournir une résistance, c'est-à-dire la direction de la poussée. L'expérience montre donc bien que dans la voûte en équilibre, la poussée mutuelle est partout parallèle aux têtes, ce qui justifie l'assimilation de la voûte biaise à une série de voûtes droites de même ouverture, échelonnées suivant le biais.

304. Mais ici se manifeste entre les deux sortes de voûtes une différence importante.

Dans une voûte droite uniformément chargée dans le sens de sa longueur, la liaison des voûtes élémentaires ne crée aucune incompatibilité entre les déformations naturelles de chaque voûte élémentaire prise isolément. Ces déformations se produisent de la même manière dans chaque plan parallèle aux têtes, et les molécules des voussoirs en se déplaçant ne sortent pas du plan parallèle aux têtes qui les contenait au moment de la pose.

Dans les voûtes biaises, l'échelonnement des voûtes élémentaires introduit des liaisons entre des molécules différemment situées sur le profil commun à toutes les voûtes. Les déformations de l'élément de voûte sont donc gênées par les liaisons avec les éléments voisins, et les molécules des voussoirs peuvent être amenées, par suite de cette solidarité, à sortir du plan parallèle aux têtes qui les contenait primitivement.

On considère ordinairement les déformations de l'intrados des voûtes droites comme s'effectuant par une série de rotations très-petites des éléments plans de la douelle autour de parallèles aux génératrices droites du berceau. Dans les voûtes biaises, on peut

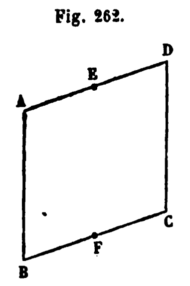


Fig. 262.

admettre de même, faute d'une meilleure théorie, que les déformations de l'intrados s'opèrent par rotation des éléments plans de la douelle autour de parallèles aux génératrices rectilignes de l'intrados, parce que ce mode de déformation des surfaces cylindriques est celui de tous qui fait subir les moindres efforts à la matière (1). Mais ces éléments plans sont des parallélogrammes, dont les petits côtés, primitivement situés dans les plans de tête, décrivent dans la rotation autour du grand côté des éléments de surface conique. Les têtes, après une semblable déformation, ne sont donc plus contenues dans leurs plans primitifs, et la projection horizontale de la voûte déformée ne coïncide pas rigoureusement avec la projection de la voûte posée sur cintre.

L'intrados, avant la déformation, se projette suivant un parallélogramme ABCD ; AD, BC sont les traces des plans de tête; AB, CD les projections des naissances. Soient E et F les clefs des courbes de tête. Les tassements qui s'opéreront dans la voûte, par rotation autour des génératrices rectilignes ou de droites parallèles à ces génératrices, pourront, par exemple, amener en projection les arcs AE, CF, adjacents aux angles obtus du parallélogramme, dans l'intérieur de cette figure, et les arcs BF, DE, adjacents aux angles aigus, en dehors. C'est à cette tendance latérale, qui s'exerce de dedans en dehors sur les têtes dans la région voisine des angles aigus, qu'on peut donner le nom de *poussée au vide* (2).

La poussée au vide ainsi définie est un résultat nécessaire de la orme extérieure de la voûte; on ne doit pas la confondre avec cer-

(1) Cette explication ne doit être acceptée qu'avec réserve. Elle est en effet fondée sur l'assimilation, très-peu satisfaisante, de la déformation de la voûte à la déformation de l'intrados, considéré comme une surface élastique.

(2) La *poussée au vide* des constructeurs timorés est tout autre chose; c'est la poussée (entièrement fictive) de la voûte réduite à sa section droite. Imaginant que les voûtes biaises sont sollicitées ainsi par des forces obliques aux têtes, ces constructeurs craignent la chute des angles aigus, et multiplient les tirants en fer dans cette région pour empêcher une disjonction qui ne tend pas à se produire.

taines tendances au renversement produites par des défauts de l'appareil. Lorsque l'appareil satisfait aux conditions de l'équilibre individuel de chaque voûte infiniment mince, les effets de la poussée au vide sont dus à l'élasticité des matériaux, et par conséquent ils sont du même ordre de grandeur que les tassements des voûtes; ils sont donc infiniment petits, et par suite négligeables, pour une voûte construite avec soin, et l'on n'a pas à s'en préoccuper (1).

Le problème des voûtes biaises est ramené, pas ces considérations, au problème des voûtes droites ; puisqu'on n'a pas de données rationnelles sur les déformations élastiques des voûtes droites, il serait impossible de chercher par le calcul les déformations des voûtes biaises, cette question offrant un degré de plus de complication.

APPAREIL DES VOUTES BIAISES.

305. Nous ne nous arrêterons pas à l'ancienne solution connue sous le nom de *biais passé*, qui s'appliquait à des arches de faible longueur, et qui leur donnait pour intrados une surface réglée particulière, dite *corne de vache*. Cette solution n'est plus employée.

Lorsque le biais est très-faible, de 0° à 10° par exemple, on peut n'en tenir aucun compte, et appareiller la voûte comme si elle était

---

(1) Voir dans les *Annales des ponts et chaussées*, 1856, un article de M. Le Blanc, sur les conditions d'équilibre des arches biaises. — M. Le Blanc a construit depuis, sur la ligne de Rennes à Redon, plusieurs ponts biais pour lesquels il n'a pas eu recours aux armatures en fer; on n'y constate aucune tendance au renversement ou à l'écartement des angles aigus des culées; cette tendance devrait pourtant se manifester, quelque soin qu'on ait apporté à la construction des voûtes, si la théorie de la poussée au vide était exacte dans le sens où on l'entend communément. Ce n'est donc pas sans raison que M. Le Blanc a pu dire qu'*il n'y a pas de poussée au vide*, niant ainsi formellement le principe contestable qui sert d'axiome à cette théorie. Nous ajouterons qu'on trouve près de Nancy, à la rencontre du chemin de fer de Paris à Strasbourg et du canal de la Marne au Rhin, un pont d'un biais très-prononcé, construit par *arceaux biais* en pierre de taille, reliés par de petites voûtes transversales en béton, et sans intervention d'armatures. M. Zeiller est l'auteur de cet ouvrage très-hardi, que la théorie ordinaire de la poussée au vide condamnerait d'une manière absolue.

droite. Les voussoirs dessinent sur l'intrados les joints continus suivant les génératrices rectilignes du cylindre, et les joints discontinus suivant les arcs de section droite. Des voussoirs spéciaux forment les têtes.

Pour un biais quelconque, on peut toujours ramener l'appareil à celui des voûtes droites, soit en ajoutant à la projection ABCD de la voûte deux triangles ADG, CBH, qui augmentent la longueur du berceau, soit en conservant les plans de tête AD, BC, mais en augmentant la portée de la voûte, par l'addition des triangles ABK, CDI à l'espace qu'elle recouvre. Cette dernière solution ne pourrait convenir aux voûtes d'une certaine longueur, si l'on cherchait à l'appliquer à cette longueur entière. Mais elle devient parfaitement admissible, si l'on décompose la longueur donnée en un certain nombre de parties égales, et si l'on substitue dans chaque intervalle la voûte droite MNPQ à la portion correspondante RQSN de la voûte biaise. On appareillera comme voûtes droites ces arceaux échelonnés.

Fig. 263.

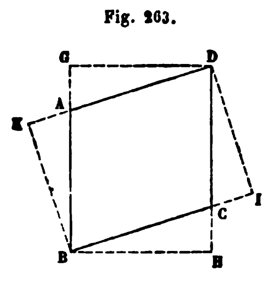
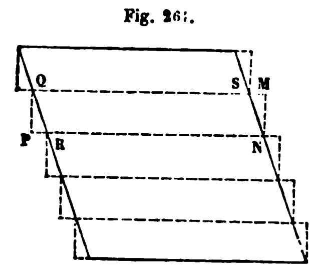


Fig. 264.



La simplicité des appareils qui conservent à la voûte biaise son intrados a fait renoncer à cet artifice de construction, auquel on pouvait reprocher d'augmenter démesurément la surface du parement vu des pierres.

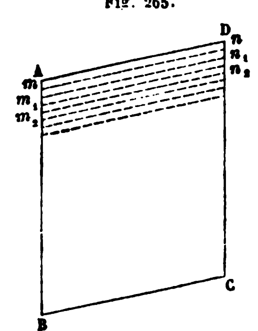
APPAREIL ORTHOGONAL (1).

306. Une voûte dont la projection horizontale est le parallélogramme ABCD est coupée par une série de plans infiniment voisins,

(1) Voy. *Annales des ponts et chaussées*, 1839, article de M. Lefort.

mn, m_1n_1, m_2n_2,..., parallèles aux plans des têtes. Nous nous proposerons de déterminer le tracé d'un appareil tel, que, considéré dans un anneau quelconque $m_1n_1n_2m_2$, cet appareil soit celui d'une voûte droite. Il faut et il suffit pour cela : 1° que les *joints discontinus* dessinent sur l'intrados des courbes parallèles à la courbe de tête ; 2° que les éléments des *joints continus* coupent à angle droit les joints discontinus ; 3° que les faces des voussoirs entre deux plans m_1n_1, m_2n_2, consécutifs, soient normales à l'intrados.

Fig. 265.



Donc, 1° les joints continus dessinés sur l'intrados ne sont autre chose que les *trajectoires orthogonales* des courbes parallèles aux têtes ;

2° Les joints discontinus sont des arcs de ces dernières courbes ;

3° Les faces des voussoirs sont des surfaces réglées engendrées par une droite qui se meut normalement à l'intrados en suivant le pourtour de la douelle de chaque voussoir (1). Le parement vu des voussoirs de tête fait seul exception à ce mode de génération.

ÉPURE DE L'APPAREIL ORTHOGONAL.

307. Pour que la projection d'un angle droit sur un plan soit un angle droit, il faut et il suffit que l'un des côtés de l'angle soit parallèle au plan. Dans l'appareil orthogonal, les courbes de tête et

---

(1) Rigoureusement, il faudrait dire que les surfaces des joints continus doivent être engendrées *par une droite parallèle aux plans de tête, et perpendiculaire à la courbe de joint continu ;* car c'est ainsi qu'on définirait les plans de joints des voussoirs de la voûte droite infiniment mince substituée aux divers éléments de la voûte biaise. Mais on verra plus loin que la surface ainsi obtenue est tangente, tout le long d'un joint continu, à la surface engendrée par une droite mobile qui suit ce joint en restant normale à l'intrados. On peut donc sans inconvénient substituer la seconde surface à la première.

les sections parallèles à ces courbes sont rencontrées à angle droit par les courbes des joints continus. Il y a donc intérêt à prendre pour plan vertical de projection un plan parallèle aux têtes, car la projection sur ce plan des joints continus coupera à angle droit les projections des courbes parallèles aux têtes, ou des joins discontinus.

Soit $c'\mu'd'$ (pl. III) la projection verticale de la courbe de tête; cd est la trace horizontale du plan qui contient la tête; ac, bd sont, dans le plan horizontal, les génératrices des naissances.

On obtiendra la projection verticale $e'\mu'_1f'$ d'une courbe quelconque parallèle à la tête, intersection du cylindre d'intrados par un plan vertical ef parallèle à cd, en faisant glisser de la quantité $c'e'$, parallèlement à la ligne de terre, la courbe $c'\mu'd'$. Les projections verticales des joints continus sont donc les trajectoires orthogonales des positions successives de la courbe $c'\mu'd'$, donnée de grandeur et d'orientation, quand elle glisse le long de la ligne de terre xy.

La courbe $c'\mu'd'$ est en général une ellipse dont les axes sont connus; soit a le demi-axe suivant xy, et b le demi-axe perpendiculaire à cette direction; appelons m l'abscisse variable du centre O' de l'ellipse, x l'abscisse d'un point quelconque de l'ellipse, ces abscisses étant comptées à partir d'un point fixe pris sur la ligne de terre xy; soit enfin y l'ordonnée du point de l'ellipse qui correspond à l'abscisse x; l'équation générale de l'ellipse dans une quelconque de ses positions sera

$$\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Différentiant cette équation sans faire varier m, et éliminant ensuite m entre l'équation précédente et l'équation différentielle qui s'en déduit, il vient pour équation commune à toutes les ellipses

$$\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right) = 1.$$

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales s'obtient en

remarquant qu'au point d'intersection d'une ellipse et d'une trajectoire, les deux courbes ont le même x et le même y, mais que le coefficient différentiel de l'une est égal à l'inverse du coefficient différentiel de l'autre changé de signe. Il suffit donc de changer $\frac{dy}{dx}$ en $-\frac{dx}{dy}$ dans l'équation précédente pour avoir l'équation cherchée :

$$\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)=1.$$

L'intégration s'opère aisément et donne pour équation générale des trajectoires orthogonales

$$\frac{a}{b}x = C + \sqrt{b^2-y^2} + \frac{1}{2}b \text{ log nép. } \frac{b-\sqrt{b^2-y^2}}{b+\sqrt{b^2-y^2}}.$$

Dans cette équation, C est une constante arbitraire.

Toutes les courbes $\lambda'\mu'\varpi'$ représentées par cette dernière équation se composent de deux branches symétriques par rapport à la verticale qui leur est tangente à toutes deux en leur point le plus élevé, μ'. Elles ont un rebroussement en ce point, et ont pour asymptote commune la ligne de terre xy. Elles sont toutes égales entre elles. L'équation donne l'une ou l'autre branche de la courbe suivant qu'on prend le radical positivement ou négativement.

Lorsque $a=b$, la tête de la voûte est une demi-circonférence; dans ce cas, la trajectoire orthogonale est une des développantes de la chaînette; c'est la courbe appelée *tractrice*, dans laquelle la longueur de la tangente à la courbe, comprise entre le point de contact et la droite fixe xy, est constante. Cette longueur est en effet représentée, dans une courbe quelconque, par la fonction

$$\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy},$$

et l'équation différentielle des trajectoires orthogonales montre que

cette fonction se réduit à

$$\frac{\sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}}{a},$$

quantité constante et égale à a lorsque $a = b$.

Après avoir tracé par points une de ces courbes, en faisant abstraction de la constante arbitraire, laquelle influe sur leur position et non sur leur grandeur, on pourra en découper un patron, et se servir de ce patron pour tracer sur l'épure toutes les projections verticales des joints continus.

La table qui suit donne les valeurs absolues du rapport $\frac{ax}{b^2}$ pour certaines valeurs particulières du rapport $\frac{y}{b}$, abstraction faite de la constante.

Pour tracer la courbe en vraie grandeur à l'aide de cette table, il suffit de prendre b pour unité des hauteurs, et $\frac{b^2}{a}$ pour unité des bases.

$\frac{y}{b} = 1{,}00$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
$\pm\frac{ax}{b^2} = 0{,}000$	0,030	0,093	0,180	0,299	0,450	0,652	0,921	1,317	1,946	∞

308. Les projections verticales une fois obtenues, on peut en déduire par des constructions graphiques les projections horizontales. Il suffit pour cela de déterminer les intersections du cylindre d'intrados avec les cylindres projetants conduits par les courbes tracées sur le plan vertical. Les projections horizontales sont aussi la reproduction d'une seule et même courbe, $\lambda\mu\varpi$, qui a un centre, et par suite une inflexion, au point μ où elle rencontre la projection de la génératrice culminante de l'intrados, et qui a pour asymptotes les deux projections des naissances.

Il est nécessaire aussi de construire le développement du cylindre

d'intrados et d'y tracer les joints continus; les courbes de têtes se transforment en courbes sinusoïdales, dMC, bM_2A, et les transformées des joints continus, AMΠ, sont les trajectoires orthogonales des positions successives de ces courbes lorsqu'elles glissent parallèlement aux génératrices droites du cylindre. Elles ont un centre et une inflexion sur la ligne médiane du développement de l'intrados, et sont asymptotes aux deux arêtes droites extrêmes de l'intrados développé.

Les joints discontinus se projettent horizontalement suivant des droites parallèles à la projection des têtes; verticalement, suivant des arcs appartenant aux diverses positions successives de la courbe $e'\mu'f'$; ils se transforment sur le développement en arcs de courbes sinusoïdales.

309. Pour faire l'épure de l'appareil orthogonal, on commencera par tracer la courbe de tête, et par construire le patron des projections verticales des joints continus. On en déduira le patron des projections horizontales des mêmes joints, et ensuite, le patron des transformées de ces mêmes joints sur le développement. Alors on opérera la division des têtes en parties correspondantes aux différents voussoirs. Ce partage exige un certain tâtonnement, pour que les points de division sur les têtes se trouvent deux à deux, autant que possible, sur une même ligne de joint continu. Quand on est parvenu à assurer approximativement cette corrélation des deux partages, on trace les joints continus sur le plan vertical, sur le plan horizontal et sur le développement, en altérant un peu le tracé là où cela est nécessaire pour retomber rigoureusement sur les points de division préalablement fixés. Les joints discontinus seront ensuite tracés dans les trois parties de l'épure, en se servant des courbes de tête pour patrons de ce nouveau tracé. Le tracé du développement de l'intrados donne la mesure exacte des dimensions des voussoirs, et fournit les panneaux de douelle de chacun d'eux.

310. Les faces de joint des voussoirs sont engendrées, avons-nous dit, par une droite mobile qui se déplace normalement à l'intrados en suivant les lignes de joints continus et de joints discontinus.

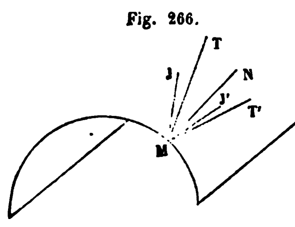
Il serait plus conforme à l'esprit du problème d'employer pour géné-

ratrice des surfaces de joints continus une droite parallèle aux plans de tête et normale aux joints continus. Au point (m,m') de l'intrados menons un plan tangent; ce plan sera parallèle aux génératrices du cylindre et contiendra de plus la tangente $(mp, m'p')$ à la courbe $(ef, e'\mu'_1f')$ qui passe par ce point sur la surface. Il aura donc pour traces les droites pl sur le plan horizontal, et lz' sur le plan vertical. La normale à l'intrados a pour projections mn, $m'n'$, droites respectivement perpendiculaires aux traces du plan tangent, et elle a pour trace horizontale le point q. La droite normale à la courbe $(ef, e'\mu'_1f')$, menée dans le plan de cette courbe, a pour projections mp, $m'n'$, et sa trace est le point r. Par le point (m,m') enfin, menons une tangente à la courbe de joint continu. Elle aura pour projection verticale la droite $m'q'$, et pour projection horizontale la droite mv, qui joint le point m à l'intersection v des traces horizontales du plan tangent plz' et du plan projetant $m'q'q$. Ces trois droites ont $m'q'$ pour projection verticale commune; elles sont donc dans un même plan, et par suite la surface engendrée par la normale au cylindre est tangente en m à la surface engendrée par la normale à l'ellipse menée parallèlement au plan de tête. La substitution de l'une de ces surfaces à l'autre est donc sans inconvénient au point de vue de la résistance.

Les surfaces engendrées par une normale à l'intrados dont le pied suit les joints continus coupent les plans de tête suivant des courbes qui limitent le parement vu des voussoirs de tête. Nous appellerons ces courbes *joints de tête* ou *de parement*. On les construira pour découper les panneaux de taille de ces voussoirs. Généralement elles auront une courbure assez faible pour qu'on puisse y substituer des lignes droites.

De la démonstration qui précède résulte que, *dans l'appareil orthogonal, le joint de parement rencontre la courbe de tête à angle droit.* On peut le démontrer directement : le plan tangent P à la surface de joint continu, en un point M pris sur la tête, contient à la fois la tangente T

Fig. 266.



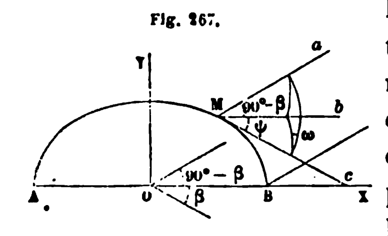
menée à la trajectoire orthogonale, et la normale N élevée par le

point M sur le plan tangent à l'intrados. Ces deux droites sont, par leur définition même, perpendiculaires à la courbe de tête au point M, et par suite le plan qui les contient est normal à cette courbe. Or le plan P contient aussi la tangente T au joint de parement J, qui est tracé sur la surface de joint continu; donc la courbe de tête est perpendiculaire au joint de parement qui passe par son pied dans ce plan.

311. L'épure de l'appareil orthogonal fournit les panneaux de douelle de chaque voussoir, et les panneaux de tête. On donnera facilement à l'aide d'une cerce la courbure de l'intrados aux panneaux de douelle; mais pour tailler les voussoirs de tête, il est nécessaire de déterminer, soit graphiquement, soit par le calcul, les angles formés par les joints de parement et les joints continus qui y font suite.

Le calcul de ces angles se fait très-simplement, en observant que le joint de tête MJ et le joint continu MJ' (fig. 266) tombant normalement sur la courbe de tête, l'angle qu'ils forment mesure l'angle dièdre compris entre le plan de tête et le plan tangent à l'intrados au point M. Menons par le point M (fig. 267) la génératrice Ma de l'intrados; par le même point, une droite Mb horizontale dans le plan de tête, et enfin une droite Mc tangente à la courbe de tête. Nous formons ainsi un angle trièdre, ayant pour sommet le point M, et pour faces les angles plans aMb, bMc, cMa; l'angle aMb est constant et égal au complément de l'angle du biais, que nous désignerons par β; l'angle bMc est l'angle formé par la tangente à la courbe de tête avec l'horizontale; c'est un angle variable d'un point à l'autre de la courbe de tête, et donné par la formule générale

Fig. 267.



$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{dy}{dx},$$

le $\frac{dy}{dx}$ étant tiré de l'équation de l'ellipse AMB, rapportée à son

centre O et à ses axes OB, OY. L'angle dièdre Mb est droit : car il est formé par la rencontre du plan vertical bMc, qui n'est autre que le plan de tête, avec le plan aMb qui contient deux horizontales Ma et Mb. La question est donc ramenée à trouver l'angle dièdre Mc, opposé à la face aMb, connaissant la face $aMb = 90° - \beta$, et la face $bMc = \psi$, et sachant que le dièdre compris entre ces deux faces est droit. La trigonométrie sphérique fait connaître l'angle dièdre $Mc = \omega$ au moyen de la formule

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\cot \beta}{\sin \psi}.$$

Dans toute la région comprise entre la clef et la naissance du côté de l'angle aigu de la culée, l'angle ω donné par cette formule est l'angle aigu du plan tangent à l'intrados avec le plan de tête ; dans la portion comprise entre la clef et la naissance du côté de l'angle aigu, l'angle cherché est obtus, et l'on doit prendre $tg\omega$ négativement dans la formule ; ce qui revient à prendre ψ positivement, et à substituer aux valeurs trouvées pour ω, comprises entre $0°$ et $90°$, les valeurs supplémentaires $180° - \omega$.

Dans une voûte droite $\beta = 0$, et la formule donne constamment $\omega = 90°$; le plan tangent à l'intrados est partout perpendiculaire au plan de tête.

Dans une voûte biaise, β n'est pas nul ; ω est égal à $90°$ pour $\psi = 0$, c'est-à-dire à la clef. Puis ω décroît à mesure que ψ augmente, et a pour limite l'angle $90° - \beta$, complément du biais, pour $\psi = 90°$, c'est-à-dire aux points de la courbe de tête où la tangente est verticale. Le plan tangent à l'intrados fait donc avec le plan de tête un angle égal à $90° - \beta$ du côté de l'angle aigu des culées, et à $90° + \beta$ du côté de l'angle obtus. Ce sont les limites extrêmes de cet angle.

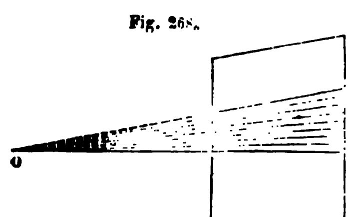
L'appareil orthogonal est une solution entièrement rationnelle du problème des voûtes biaises, et s'il n'est pas universellement adopté par les constructeurs, c'est qu'il présente quelques difficultés de détail, savoir : la difficulté du tracé, qui se complique d'altérations et de balancements pour établir une correspondance entre les divisions des deux têtes ; la variété des voussoirs, qui sont tous différents les uns

des autres, et dont la taille exige des panneaux spéciaux ; enfin le rapprochement des joints continus vers les naissances, d'où résulte la nécessité d'interrompre une ou plusieurs lignes de joint, pour substituer, par exemple, à trois cours de voussoirs deux cours, ou même un seul.

APPAREIL ORTHOGONAL CONVERGENT.

312. Cet appareil s'emploie pour raccorder une voûte biaise avec une voûte droite de même berceau. Il consiste à prendre pour lignes de joints continus les trajectoires orthogonales, non pas des sections faites parallèlement aux têtes, mais des sections faites dans l'intrados par des plans conduits par une verticale fixe O, prise à une certaine distance de la voûte. On donne à ces divers plans toutes les orientations intermédiaires entre celle de la tête biaise et celle de la section droite. L'épure de la division de l'intrados se fait par tâtonnement au moyen du développement du cylindre d'intrados.

Fig. 268.



On peut aussi passer d'un appareil biais à un autre, ou à un appareil droit, en interrompant d'une manière brusque les deux appareils contigus par une chaîne de voussoirs particuliers, formant une *harpe de raccordement;* ces voussoirs présentent dans leur forme une brisure, et chaque partie est taillée à la demande de l'appareil auquel elle fait suite.

APPAREIL HÉLICOÏDAL.

313. L'appareil hélicoïdal, imaginé par les constructeurs anglais, est en réalité une imitation suffisamment approximative de l'appareil orthogonal. Dans ce nouvel appareil, les joints continus et les

joints discontinus sont des arcs d'hélice se coupant à angle droit. Pour les tracer sur le cintre de la voûte, il suffit de tendre un cordeau d'un point à l'autre du même joint. L'appareil hélicoïdal n'exige d'ailleurs la construction d'une épure que pour la taille des voussoirs de tête. Tout le reste de la voûte, sauf les sommiers des naissances, s'exécute soit en briques, soit en petits matériaux, soit enfin en voussoirs à faces gauches rigoureusement taillées, mais tous égaux l'un à l'autre si l'intrados a pour section droite une circonférence. Rigoureusement les surfaces des joints soit continus, soit discontinus, doivent être des *surfaces hélicoïdales à plan directeur*, engendrées par une droite normale à l'intrados dont le pied suit les arcs d'hélice qui limitent la douelle de chaque voussoir. Mais en employant de petits matériaux taillés en prismes rectangulaires, on substitue sans aucun inconvénient des surfaces planes à ces surfaces hélicoïdales.

L'épure se construit au moyen du développement de l'intrados. Les courbes de tête s'y transforment en courbes sinusoïdales; on remplace ces courbes, qui correspondent aux têtes réelles, par deux droites joignant leurs extrémités, qui correspondent aux *têtes fictives*. Enroulées sur le cylindre, ces droites y dessinent des hélices parallèlement auxquelles seront tracés les joints discontinus sur l'intrados. Sur le développement, les joints discontinus sont transformés en droites parallèles aux têtes fictives; les joints continus, par des droites perpendiculaires aux joints discontinus, qui donnent sur l'intrados une série d'hélices parallèles. Les projections des deux systèmes d'hélices, joints continus et joints discontinus, sur tout plan parallèle au cylindre, sont des courbes sinusoïdales; pour chacun de ces deux systèmes, toutes les projections des hélices sur un même plan sont la reproduction d'une seule et même courbe, dont on peut tracer une fois pour toutes le patron.

On prend pour plans de projection: 1° le plan horizontal, qui est parallèle au cylindre; 2° un plan vertical parallèle au cylindre; 3° un plan vertical perpendiculaire au cylindre, où l'intrados se projette suivant sa section droite; 4° un plan vertical parallèle à la tête, qui donne l'élévation de l'ouvrage (Planche IV). Ces projections et le

développement de l'intrados donnent tous les éléments nécessaires à la taille des voussoirs.

TRACÉ DES JOINTS DE TÊTE.

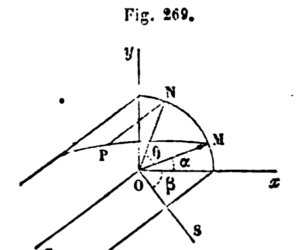
314. Il ne sera question, dans ce qui suit, que du cas où l'intrados a pour section droite une portion de circonférence.

Les surfaces des joints continus sont engendrées par une droite qui suit les hélices de joints continus en restant toujours normale à l'intrados. Cette droite, constamment parallèle à un plan perpendiculaire au cylindre d'intrados, engendre un *hélicoïde gauche à plan directeur;* tout cylindre concentrique à l'intrados coupe l'hélicoïde suivant une hélice qui a même pas que l'hélice de joint continu tracée sur le cylindre d'intrados. Il s'agit de construire l'intersection de l'hélicoïde avec le plan de tête pour en déduire les panneaux du parement vu.

Appelons H le pas commun à toutes les hélices que l'on peut obtenir en coupant les hélicoïdes des joints continus par un cylindre de même axe que l'intrados; appelons R le rayon de l'un de ces cylindres.

Nous prendrons pour axe des z l'axe du cylindre, pour plan des xy un plan normal à cet axe; la surface du cylindre de rayon R coupera ce plan des xy suivant le cercle représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

Fig. 269.



$$(1) \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

L'hélice d'intersection de l'hélicoïde avec le cylindre précédent est définie par le point M où elle perce le plan xy. Posons $MOx = \alpha$, et appelons θ l'angle total que doit décrire le plan POz, conduit par l'axe du cylindre et par un point quelconque P de l'hélice, pour ramener le point mobile P à coïncider avec le point M, après lui avoir fait suivre toutes

les spires de l'hélice; z étant l'ordonnée du point P parallèlement à l'axe Oz, l'équation de l'hélice sur la surface du cylindre sera

$$(2)\qquad z = \mathrm{H}\,\frac{\theta}{2\pi};$$

y et x étant les deux autres coordonnées du point P, on a d'ailleurs

$$(3)\qquad y = x\,\mathrm{tg}\,(\theta + \alpha).$$

Les deux équations (2) et (3) prises simultanément représentent la surface de l'hélicoïde, car elles conviennent à tous les points de l'une quelconque des génératrices droites de cette surface. L'élimination de θ entre ces deux équations conduit donc à l'équation de l'hélicoïde :

$$(4)\qquad \frac{2\pi z}{\mathrm{H}} + \alpha = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{y}{x}.$$

Il s'agit de chercher l'intersection de la surface (4) avec le plan de tête yOS, dont l'équation est

$$(5)\qquad z = x\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

β étant l'angle du biais.

Les équations (4) et (5) prises ensemble représentent cette intersection: en y joignant l'équation (1) de la surface cylindrique, on obtient un point (x, y, z), commun aux trois surfaces; proposons-nous de mener en ce point une tangente à la courbe (4) et (5).

On obtient en différentiant (4) et (5) les équations suivantes:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\mathrm{H}}\,dz = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}, \\ dz = dx\,\mathrm{tg}\,\beta, \end{cases}$$

d'où l'on tire par la division

$$(7)\qquad \frac{ydx - xdy}{dx} = -\frac{2\pi}{\mathrm{H}}\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Donc au point (x, y, z), pour lequel l'équation (1) est satisfaite, la fonction

$$\frac{ydx - xdy}{dx},$$

qui représente l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe (4) et (5), est égale à

$$-\frac{2\pi R^2}{H} \operatorname{tg} \beta,$$

quantité indépendante de l'angle α, et qui, par suite, convient à toutes les positions de l'hélicoïde autour de l'axe OZ, ou à toutes les surfaces des joints continus.

Donc, *les tangentes aux courbes d'intersection des surfaces des joints continus avec les plans de tête, menées aux points où ces courbes d'intersection sont rencontrées par une surface cylindrique concentrique à l'intrados, concourent en un même point, situé sur la verticale passant par le sommet de tête, au-dessous de l'axe de l'intrados.*

Ce théorème a été découvert sur les chantiers de construction par le tracé même de l'épure.

L'expression

$$\frac{2\pi R^2}{H} \operatorname{tg} \beta$$

peut se transformer en

$$R \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \beta,$$

en appelant φ l'angle constant des hélices avec les génératrices du cylindre de rayon R; en effet

$$\cot \varphi = \frac{H}{2\pi R} \text{ (1)}.$$

(1) Il est remarquable qu'on trouve une expression semblable à $R \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\beta$ en traitant un autre problème relatif à l'hélicoïde gauche à plan directeur : celui où l'on cherche

315. Si l'on passe d'un cylindre de rayon R à un cylindre de rayon R' pour obtenir une autre série de points des joints de tête, la distance au point O du point de rencontre commun à toutes les

---

la projection sur le plan directeur de la courbe de contact de la surface avec un cylindre circonscrit.

Soient

$$\left\{ \begin{array}{l} x = mz \\ y = nz \end{array} \right\}$$

les équations d'une direction donnée, parallèlement à laquelle on doit mener un cylindre tangent à la surface. En général, si $F(x, y, z) = 0$ représente l'équation d'une surface, les équations de la courbe de contact avec le cylindre circonscrit mené parallèlement à cette direction, sont

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\frac{dF}{dx} m + \frac{dF}{dy} n + \frac{dF}{dz} = 0.$$

Lorsqu'il s'agit de l'hélicoïde gauche à plan directeur, la fonction F a pour expression

$$F = \frac{2\pi z}{H} + \alpha - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

et par suite la seconde équation de la courbe de contact est

$$2\pi (x^2 + y^2) - H(my - nx) = 0.$$

Cette équation ne contenant pas z est l'équation de la projection sur le plan directeur de la courbe de contact cherchée; elle représente une circonférence qui passe par l'origine des coordonnées, et dont le centre est situé sur une droite $ny + mx = 0$, perpendiculaire à la projection, $my - nx = 0$, de la direction donnée sur le plan des xy. Le diamètre de cette circonférence est égal à

$$\frac{H}{2\pi} \sqrt{m^2 + n^2},$$

ou à

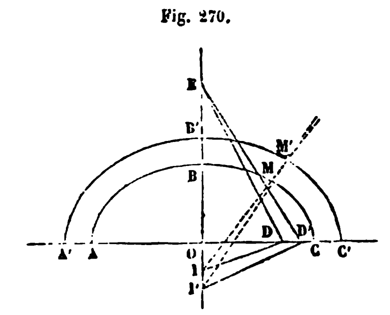
$$R \cot \varphi \operatorname{tg} \gamma,$$

en appelant γ l'angle de la direction donnée avec l'axe OZ de l'hélicoïde, et φ l'angle constant formé par l'hélice directrice tracée sur le cylindre de rayon R avec les génératrices de ce même cylindre. Ces deux théorèmes se démontrent géométriquement avec une grande facilité.

tangentes varie dans le rapport de R^2 à R'^2; cette remarque fournit un moyen de construire les courbes de joints sur la tête en y substituant des tangentes successives.

Faisant d'abord R égal au rayon de la section droite de l'intrados, on prendra sur la projection parallèle à la tête, au-dessous du centre, une quantité $OI = R \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \beta$. Si M est un point de division de la courbe de tête, la droite IM sera tangente au joint de tête en M. Coupons le plan de tête par un cylindre concentrique à l'intrados, qui donnera sur ce plan une ellipse A'B'C' semblable à l'ellipse de tête ABC; le rayon R' de ce nouveau cylindre sera égal au demi petit axe OB' de cette ellipse. La tangente IM prolongée rencontrera cette ellipse en un point M', que l'on pourra sans erreur sensible regarder comme appartenant à l'intersection de la surface du joint. Pour mener une nouvelle tangente à l'intersection en M', il suffit de déterminer le point de concours I' des tangentes qui correspondent au rayon R'. Pour cela, prenons $OD = R = OB$; joignons ID, et élevons sur cette droite au point D la perpendiculaire DE, qui rencontre en E l'axe OB prolongé. Prenons ensuite $OD' = OB'$; joignons ED' et élevons une perpendiculaire D'I' sur ED' au point D'. Cette droite rencontrera la direction OI en un point I' qui sera le point cherché.

Fig. 270.



En effet, les triangles rectangles EDI, ED'I', où les droites OD, OD' sont abaissées perpendiculairement des sommets de l'angle droit sur l'hypoténuse, donnent les égalités

$$\overline{OD}^2 = OE \times OI,$$
$$\overline{OD'}^2 = OE \times OI';$$

donc

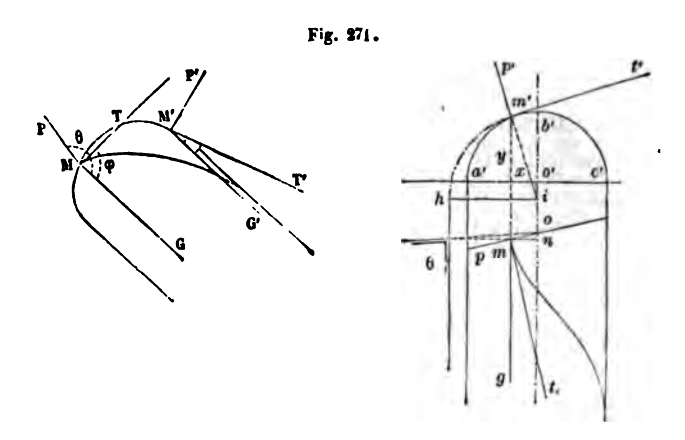
$$\frac{OI}{OI'} = \frac{\overline{OD}^2}{\overline{OD'}^2} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

On pourra pousser aussi loin qu'il est nécessaire la construction précédente, et tracer une ligne polygonale très-voisine de la courbe d'intersection que l'on se propose de déterminer.

RECHERCHE DE L'ANGLE SOUS LEQUEL SE RENCONTRENT LE JOINT DE TÊTE ET LE JOINT DE DOUELLE.

316. Soit M un point de division de la courbe de tête; MP, la tangente au joint de tête, laquelle, prolongée, va couper la verticale passant par la clef en un point I connu de position; MT la tangente

Fig. 271.



à l'hélice du joint continu qui aboutit au point M; enfin MG la génératrice rectiligne du cylindre d'intrados. Il s'agit de déterminer l'angle PMT.

Les plans PMT, TMG, GMP forment un angle trièdre dans lequel on déterminera les faces TMG, GMP, et le dièdre MG sous lequel elles se coupent. La face PMT, opposée à ce dièdre, se déduira, soit des formules de la trigonométrie sphérique, soit de la construction graphique de l'angle solide.

L'angle TMG est l'angle constant, φ, que font les joints continus avec les génératrices rectilignes du cylindre d'intrados.

Le dièdre GM est donné sur le plan vertical perpendiculaire à l'intrados, par l'angle des traces des plans PMG, GMT, perpendiculaires à ce plan de projection, c'est-à-dire par l'angle $p'm't'$, compris entre le prolongement de la droite im' et la tangente $m't'$ à la circonférence d'intrados.

L'angle GMP est facile à construire graphiquement ou à calculer. Si l'on appelle x l'abscisse et y l'ordonnée du point m', prises dans le cercle $a'b'c'$, et rapportées au centre o' de ce cercle, p la distance $o'i' = \mathrm{R} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \beta$, et enfin θ l'angle GMP cherché, on aura

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{im'}{on} = \frac{\sqrt{x^2+(y+p)^2}}{x \operatorname{tg} \beta} = \frac{\sqrt{\mathrm{R}^2 + 2py + p^2}}{x \operatorname{tg} \beta}.$$

Dans cette équation, θ doit être aigu pour une moitié de la tête, et obtus pour l'autre moitié. Le signe de x donne le signe à $\operatorname{tg} \theta$, en prenant le radical avec le signe $+$.

Pour $x = 0$, $\theta = 90°$. C'est ce qui a lieu à la clef de voûte.

L'abscisse x croissant d'une manière continue de o à R, du côté de l'angle obtus de la voûte, y décroît de R à o, et par suite θ va en décroissant d'une manière continue de 90° à la valeur θ' correspondante à $x = \mathrm{R}$, valeur donnée par l'équation

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{\sqrt{\mathrm{R}^2 + p^2}}{\mathrm{R} \operatorname{tg} \beta}.$$

Du côté de l'angle aigu, θ va en augmentant à mesure que les valeurs absolues des abscisses négatives s'accroissent, et a pour limite $180° - \theta'$.

Si l'on considère deux points de division M et M' symétriques par rapport à la clef, les angles TMG, TM'G' seront les mêmes pour ces deux points; mais le dièdre MG sera remplacé par le dièdre supplémentaire M'G', et l'angle θ, par le supplément de cet angle, $180° - \theta$.

La convergence des tangentes aux joints de parement en un point situé au-dessous du centre de la courbe de tête, rend les joints de plus en plus obliques dans les parements vus des voussoirs à mesure qu'on s'éloigne de la clef. Aussi l'appareil hélicoïdal est-il plus satisfaisant, comme aspect, pour les arcs de cercle que pour les pleins cintres.

CHAPITRE III.

VOUTES NON CYLINDRIQUES.

INTRADOS DE RÉVOLUTION.

317. Dans les voûtes dont l'intrados est une surface de révolution engendrée par un arc de cercle ou d'ellipse, ou par toute autre courbe concave vers le bas, tournant autour d'un axe vertical fixe tracé dans son plan, les *joints continus* sur l'intrados dessinent les *parallèles* de la surface de révolution, et les *joints discontinus*, des *arcs de méridiens*. Contrairement à ce qui a lieu pour une voûte en berceau, il n'est pas nécessaire pour l'équilibre que la voûte soit fermée. Dès qu'une assise quelconque est entièrement montée, on peut arrêter la pose à cette assise sans compromettre la stabilité de la portion posée.

Considérons une portion de voûte de révolution KLAD, comprise entre le lit des naissances LK et un lit quelconque de joint continu. L'anneau ABCD, formé par la dernière assise posée, forme un système matériel dont le poids est tenu en équilibre par les composantes

verticales des actions exercées sur cet anneau par les assises inférieures. Les composantes horizontales de ces mêmes actions, concourant au centre de l'anneau, exercent sur lui une compression uniforme.

Appelons ω l'aire de la section ABCD, obtenue en coupant l'anneau par un plan méridien;

ρ la distance du centre de gravité G′ de cette section à l'axe OZ de la voûte;

p le poids de l'unité de volume de la maçonnerie dont l'anneau est composé.

Le volume de l'anneau sera $\omega \times 2\pi\rho$, d'après le théorème de Guldin, et son poids, par conséquent, $2\pi\rho\omega p$.

Soit F la réaction mutuelle de l'anneau et de l'assise sur laquelle il repose, *rapportée à l'unité de longueur prise sur la circonférence moyenne* M du joint;

Fig. 272.

ρ' le rayon de cette circonférence moyenne;

α, l'angle formé par la réaction F avec le plan horizontal.

La somme des composantes verticales des forces F est donc égale à

$$F \times 2\pi\rho' \times \sin\alpha,$$

de sorte qu'on a l'équation d'équilibre

$$2\pi\rho\omega p = 2\pi\rho' F \sin\alpha;$$

on en déduit

$$F \sin\alpha = \omega p \times \frac{\rho}{\rho'}.$$

Les composantes horizontales des forces F exercent sur l'anneau une pression normale représentée par le produit $F\cos\alpha$, pour l'unité de longueur prise sur la circonférence $2\pi\rho'$. D'après un théorème connu, la résultante de ces actions normales exercées sur une demi-

circonférence est normale au diamètre qui ferme cette demi-circonférence, et égale à

$$F \cos \alpha \times 2\rho'.$$

Si donc on appelle K la pression par unité de surface dans la section ω de l'anneau, on aura

$$K\omega \times 2 = F \cos \alpha \times 2\rho'.$$

et par suite,

$$K = \frac{F \cos \alpha \times \rho'}{\omega}.$$

Cette équation est tout à fait semblable à celle qui détermine la pression moyenne dans une enveloppe de chaudière cylindrique, comprimée sur toute sa surface par une force normale $F \cos \alpha$, rapportée à l'unité de longueur du cylindre (§ 248).

Partageons la voûte en fragments égaux, infiniment petits, par des plans méridiens faisant entre eux un angle $d\theta$. Deux plans consécutifs Om, Om' isolent, dans la portion de voûte comprise entre les naissances et l'assise inférieure de l'anneau central, un fragment de voûte en berceau de longueur variable, mais partout infiniment petite; la poussée appliquée au voussoir le plus élevé de ce berceau a pour valeur $F \times \rho' \times d\theta$, et fait avec l'horizon l'angle α. Composant cette poussée avec le poids du fragment de voûte, appliqué en son centre de gravité, on a la pression développée sur un arc infiniment petit du lit des naissances.

Ne connaissant *à priori* ni la force F ni l'angle α, on a pris arbitrairement le point M où cette force s'applique; prenons de même le point I, où passe la réaction de la voûte sur les naissances. Ces deux points achèvent de déterminer toutes les inconnues du problème. Nous supposerons qu'on prenne le point I au milieu du joint LK, comme on a pris le point M au milieu du joint BC.

La composante verticale de la force $F\rho' d\theta$ se détermine au moyen de l'équation

$$F \sin \alpha = \omega p \times \frac{\rho}{\rho'},$$

qui donne

$$F\rho' d\theta \times \sin \alpha = p\omega\rho d\theta.$$

Représentons cette force par la droite verticale MV.

La composante horizontale MN de la même force est encore inconnue.

Prenons pour axe des z l'axe vertical OZ de la surface de révolution qui forme l'intrados, et pour axe des x, une droite OX, menée par une origine arbitraire O, perpendiculairement à OZ, et dans l'un des plans méridiens qui limitent latéralement l'élément de voûte. Désignons sommairement par z la portion EF de l'ordonnée correspondante à une abscisse quelconque $x = \text{OH}$, portion comprise entre l'intrados et l'extrados de la voûte, ou entre l'une de ces deux surfaces et la surface d'un joint.

La distance MP du point M à l'axe de révolution, ou l'abscisse du point M, est ce que tout à l'heure nous avons appelé ρ'.

Le centre de gravité G de l'élément de voûte compris, d'une part, entre les joints BC et KL, et de l'autre entre le plan de la figure et le plan méridien voisin, a pour abscisse, x_1, la quantité donnée par l'équation

$$x_1 = \frac{\int px^2 z dx d\theta}{\int pxz dx d\theta},$$

où p est le poids spécifique de la maçonnerie de la voûte, et où les intégrations sont étendues à tous les éléments du contour profilé en BCKL.

Le poids de l'élément BCKL est appliqué verticalement à ce point G, et est égal à $\int pxz dx d\theta$. Représentons-le par la force GU.

Les forces MV, GU, connues toutes deux, sont parallèles, et ont pour résultante une force ST égale à leur somme ; cette force ST, décomposée suivant les deux directions SM, SI, donne à la fois la composante horizontale de la force $F\rho' d\theta$, et la réaction de l'élément de voûte sur le lit des naissances.

Toutes les forces que nous avons considérées ont pour facteur

commun $d\theta$, dont on peut faire abstraction dans la composition de ces forces; on composera la force $MV = p\omega\rho$, verticale et appliquée en M, avec la force $GU = \int pxzdx$, verticale et appliquée en G; la résultante ST, verticale aussi, sera connue de grandeur et de position. En la décomposant suivant les directions SM et SI, la composante suivant SM sera égale à $F\cos\alpha \times \rho'$, c'est-à-dire à $K\omega$. La construction donne donc le produit $K\omega$, et fait connaître par suite la limite K de la compression dans l'anneau.

Connaissant les deux composantes de la force T, on pourra en déduire la force F en grandeur et en direction, et tracer ensuite la courbe des pressions dans le profil compris entre les joints BC et KL, en ayant toujours soin de prendre pour poids des éléments de voûte, les poids qui correspondent à la section donnée par le profil, *multipliés par leur distance à l'axe* OZ, altération par laquelle on tient compte des variations de la longueur de la voûte profilée en BCLK.

En résumé, dans une voûte de révolution, le dernier anneau posé est soumis à un effort différent de ceux qui se développent dans le reste de la voûte; il fait voûte à lui seul contre la poussée horizontale de cette partie; dans celle-ci, les pressions se répartissent comme dans une voûte en berceau, sauf l'introduction d'un facteur dans l'expression des poids des éléments du profil. Ce partage de la voûte est d'ailleurs hypothétique, et on peut en imaginer d'autres; par exemple, on peut regarder la voûte comme formée d'anneaux successifs subissant chacun une compression. Le docteur H. Schæffler a développé cette solution (1).

Lorsque la voûte est entièrement fermée, la clef remplit les fonctions de l'anneau central. Elle est comprimée sur toute sa surface. On peut aussi isoler par la pensée une calotte quelconque, qui résistera à la poussée de tout le reste de la voûte. Mais il est impossible d'admettre que la courbe des pressions parte directement de l'axe OZ, car il en résulterait qu'une pression finie serait appliquée sur une arête et non sur une surface, ce qui reviendrait à faire subir à la matière une pression infinie.

---

(1) *Traité de la résistance des matériaux par la théorie de la moindre résistance.*

318. La formule

$$x_1 = \frac{\int px^2zdx}{\int pxzdx}$$

donne la position de la verticale qui passe par le centre de gravité G de l'onglet compris entre deux plans méridiens faisant entre eux un angle dièdre infiniment petit; p est le poids de l'unité de volume de la matière de l'onglet à la distance x de l'axe de révolution.

La formule

$$x_2 = \frac{\int pxzdx}{\int pzdx}$$

donnerait de même la position de la verticale qui passe par le centre de gravité de la section méridienne de l'onglet, en attribuant à l'élément de section ce même poids p par unité de surface, prise à la distance x de l'axe de révolution.

En multipliant ces deux équations membre à membre, il vient

$$x_1x_2 = \frac{\int px^2zdx}{\int pzdx}.$$

Or, divisons les deux termes de la fraction par l'accélération g due à la pesanteur; le quotient

$$\frac{1}{g}\int px^2zdx$$

sera le *moment d'inertie* de la section méridienne par rapport à l'axe OZ, et

$$\frac{1}{g}\int pzdx$$

sera la *masse* de cette section; le quotient est donc égal au carré r^2 du *rayon de giration* de cette aire matérielle par rapport à l'axe OZ, et l'on a

$$x_1 x_2 = r^2.$$

On voit que, x_2 étant nécessairement plus petit que r, x_1 est supérieur à r.

On voit aussi que x_1 est la distance à l'axe OZ du *centre de percussion* de l'aire matérielle par rapport à cet axe, c'est-à-dire du point unique où une impulsion perpendiculaire à la surface peut être appliquée sans qu'il en résulte aucune pression sur l'axe. On sait en effet (§ 62) que le centre de percussion est à la distance $\frac{k^2}{x_2}$ d'un axe parallèle à OZ mené par le centre de gravité, k étant le rayon de giration autour de ce dernier axe; on a donc

$$x_1 = x_2 + \frac{k^2}{x_2},$$

et par suite (§ 49)

$$x_1 x_2 = x_2^2 + k^2 = r^2.$$

FRETTES MÉTALLIQUES.

319. On peut se proposer d'équilibrer la poussée horizontale d'une voûte de révolution en entourant les naissances de la voûte d'un cercle métallique. Le calcul indique les limites des dimensions à donner à cette armature. On considérera la frette comme recevant de dedans en dehors une pression normale qui sera égale à $F \cos \alpha \times \frac{\rho'}{\rho''}$ par unité de longueur de la frette, ρ'' étant son rayon. En effet, la composante horizontale $F\rho' \cos \alpha d\theta$ n'est pas altérée dans

toute l'étendue de chaque onglet élémentaire, puisque les forces qui agissent sur cet onglet sont toutes verticales; mais elle se trouve, aux naissances, répartie sur une longueur plus grande que dans le lit de joint BC; le rapport des poussées par unité de longueur est donc égal au rapport de ρ'' à ρ'. Si l'on appelle ω' la section de la frette, et K' la tension développée dans cette section par unité de surface, on aura l'équation :

$$2\omega'K' = F \cos\alpha \times \frac{\rho'}{\rho''} \times 2\rho'',$$

ou bien, en réduisant,

$$\omega'K' = F \cos\alpha \times \rho' = \omega K.$$

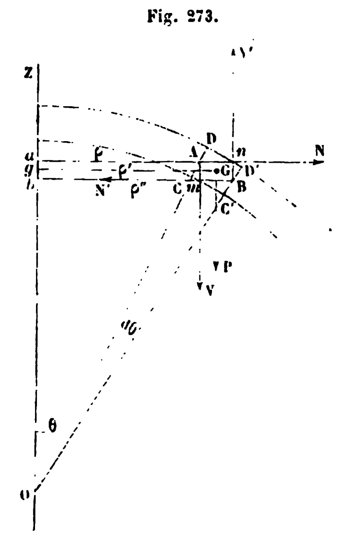
Pour appliquer cette équation, il faut chercher le maximum du produit $F \cos\alpha \times \rho'$, dont les deux facteurs sont variables avec les dimensions attribuées à l'anneau central.

On devra, pour cela, décomposer successivement la voûte en deux parties : l'une intérieure, que l'on regardera comme l'anneau central, l'autre entourant la première, que l'on partagera en éléments pour appliquer à l'un quelconque d'entre eux la méthode de la courbe des pressions. A chaque hypothèse correspondront des valeurs définies pour $F \times \cos\alpha$ et pour ρ', et par suite, une valeur du produit $F\rho' \cos\alpha$; on pourra donc construire une courbe représentative de ce produit, et le tracé de cette courbe indiquera la valeur maximum cherchée.

Les voûtes de révolution, et particulièrement les voûtes sphériques, sont employées pour couvrir les bassins circulaires, pour former les différents étages à l'intérieur d'une tour ronde; elles forment les coupoles de l'architecture byzantine. Elles ont pour caractère fondamental de donner peu de poussée sur les naissances, et de permettre l'emploi de cintres très-légers.

RÉPARTITION DES PRESSIONS DANS UNE VOUTE SPHÉRIQUE D'ÉPAISSEUR UNIFORME TRÈS-PETITE, MONTÉE PAR ANNEAUX CIRCULAIRES.

Fig. 273.



320. Soient

$R = OA$ le rayon moyen de la voûte,

ϵ l'épaisseur uniforme CD.

Considérons l'anneau engendré par la rotation autour de OZ de l'élément CDD'C'.

Cet anneau est soumis aux forces suivantes :

1° Son poids. — Soit P le poids de l'anneau rapporté à l'unité de longueur mesurée sur la circonférence décrite autour de OZ par le centre de gravité G de la section transversale CDD'C'; Π étant le poids spécifique des matériaux et ω la section CDD'C', on aura

$$P = \Pi\omega.$$

2° Les réactions exercées par les anneaux supérieurs sur le joint CD; on peut supposer la résultante appliquée au milieu A du joint, et décomposer cette force en deux composantes, l'une horizontale N, et l'autre verticale V; ces forces seront rapportées à l'unité de longueur mesurée sur la circonférence décrite par le point A.

3° Les réactions exercées par les anneaux inférieurs sur le joint C'D', réactions dont la résultante passe en B au milieu de ce joint, et s'y décompose de même en deux forces, V' et N', qui diffèrent de V et de N de quantités infiniment petites.

Désignons par ρ le rayon aA, par ρ' le rayon gG, et par ρ'' le rayon bB, des parallèles décrits par les trois points A, G, B; on aura, pour l'équilibre des composantes verticales,

$$V \times 2\pi\rho + P \times 2\pi\rho' = V' \times 2\pi\rho'';$$

ou bien, en remplaçant P par Πω, en supprimant le facteur 2π, et en observant que $V'\rho'' - V\rho$ est la différentielle du produit $V\rho$,

$$(1) \qquad d(V\rho) = \Pi\omega\rho' = \Pi\omega\rho;$$

nous confondons ρ' avec ρ, qui en diffère d'une quantité insensible.

Pour l'équilibre des composantes horizontales, coupons l'anneau par un plan conduit par l'axe OZ, et soit K la pression moyenne développée dans les deux sections ω par les composantes N et N'. Il viendra

$$2K\omega = N' \times 2\rho'' - N \times 2\rho,$$

ou bien

$$(2) \qquad K\omega = d(N\rho).$$

Enfin, considérons la portion d'anneau comprise entre deux plans méridiens faisant entre eux un angle infiniment petit $d\varphi$, et écrivons l'équation des moments des forces appliquées à cet élément, en prenant pour axe des moments la tangente au parallèle décrit par le point B.

Ces forces sont les poussées $N\rho d\varphi$, $V\rho d\varphi$, $N'\rho'' d\varphi$, $V'\rho'' d\varphi$, le poids $P\rho' d\varphi$, enfin les pressions Kω exercées sur les deux sections latérales. Il est facile de reconnaître que le poids $P\rho' d\varphi$ aura un moment infiniment petit du quatrième ordre, car $P\rho' d\varphi$ est déjà un infiniment petit du troisième ordre, qu'il faudra encore multiplier par la dis-

tance infiniment petite de la droite GP au point B. De même, les pressions latérales $K\omega$, qui sont du second ordre, et qui doivent être projetées sur le plan de la figure, seront multipliées par le cosinus d'un angle infiniment peu différent de l'angle droit, c'est-à-dire par un facteur infiniment petit; ensuite, il faudra les multiplier par la distance de leur projection au point B, qui est encore infiniment petite. Donc toutes ces forces donnent des moments négligeables, et il ne reste plus dans l'équation des moments que les forces dues aux réactions mutuelles dans les joints; on obtient ainsi l'équation

$$N\rho d\varphi \times nB = V\rho d\varphi \times Bm,$$

ou encore

$$(3) \qquad V = N \times \frac{Bn}{mB} = N \operatorname{tang} \theta,$$

ce qui revient à dire que la réaction totale est normale au joint.

Les trois équations (1) (2), et (3) résolvent le problème.

Remplaçons-y

$$\rho \text{ par } R \sin\theta,$$
$$\omega \text{ par } R\varepsilon d\theta.$$

Elles prennent la forme

$$d(V \sin\theta) = \Pi\varepsilon R \sin\theta\, d\theta,$$
$$d(N \sin\theta) = K\varepsilon\, d\theta,$$
$$V = N \operatorname{tang}\theta.$$

La première donne, en intégrant,

$$V \sin\theta = \Pi R\varepsilon\, (\cos\theta_0 - \cos\theta), \quad \text{ou} \quad V = \Pi R\varepsilon \left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin\theta}\right),$$

θ_0 étant l'angle correspondant au joint supérieur où s'arrête la voûte.

La troisième fait connaître N :

$$N = V \cot\theta = \Pi R\varepsilon \frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

et la seconde définit K :

$$K = \frac{d(N\sin\theta)}{\varepsilon d\theta} = \frac{d(V\cos\theta)}{\varepsilon d\theta} = \Pi R \frac{d}{d\theta}\left[\frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta}\right] = \Pi R \left(\cos\theta - \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta}\right).$$

On remarquera que $N = 0$ pour $\theta = \theta_0$ et pour $\theta = 90°$. La composante verticale V est nulle pour $\theta = \theta_0$; si la voute est fermée, elle est nulle pour $\theta = 0$; car la vraie valeur de $\dfrac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$ est zéro pour $\theta = 0$.

K varie entre $\Pi R \cos\theta_0$ pour $\theta = \theta_0$, lorsque θ_0 n'est pas nul,
et $- \Pi R \cos\theta_0$ pour les naissances.

Dans cette hypothèse, l'anneau inférieur résiste donc à l'extension produite par la poussée des anneaux supérieurs; ce qui justifierait l'emploi des frettes métalliques pour maintenir la partie inférieure de la voûte.

Si la voûte est fermée, la valeur de K au sommet s'obtient en faisant $\theta = 0$ et $\theta_0 = 0$ dans la formule; la vraie valeur que l'on obtient est $\frac{1}{2}\,\Pi R$. On a, en effet, en faisant $\theta_0 = 0$,

$$K = \pi R \left(\cos\theta - \frac{1 - \cos\theta}{\sin^2\theta}\right) = \pi R \left(\cos\theta - \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}\right) = \pi R \left(\cos\theta - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}\right)$$

les limites de θ sont alors :

$$K = \frac{1}{2}\,\Pi R \text{ pour le sommet,}$$
$$K = -\,\Pi R \text{ pour le plan des naissances.}$$

APPLICATION A LA VOUTE TERRESTRE (1).

321. Proposons-nous de calculer la pression R par unité de surface dans une voûte sphérique ayant une épaisseur uniforme *e*, très-petite, et dont tous les points sont également attirés par le centre de la surface.

On peut assimiler cette voûte à une enveloppe sphérique soumise à une pression qui s'exercerait de dehors en dedans, et qui serait égale à l'attraction du centre de la sphère sur les éléments de la voûte (§ 208). Appelons *p* l'attraction rapportée à l'unité de surface prise sur la surface sphérique moyenne dont nous représenterons le rayon par *a*. Nous aurons l'équation

$$R = \frac{ap}{2e}.$$

Nous appliquerons cette formule à la voûte terrestre, supposée rigoureusement sphérique, et détachée de son noyau intérieur. Nous admettrons, pour simplifier le problème, que la pesanteur s'exerce d'une manière égale en tous les points de sa surface. La température s'accroissant à l'intérieur de la terre d'un degré centigrade pour 30 mètres de profondeur, on ne peut attribuer à la croûte solide du globe terrestre une épaisseur supérieure à 45 kilomètres, car il en résulte déjà pour les points situés à l'intérieur de l'écorce une température de plus de 1500 degrés, suffisante pour maintenir à l'état liquide les matériaux dont elle est composée. Le rayon moyen de la voûte peut en définitive être pris égal à 6,341,000 mètres.

La densité moyenne du globe terrestre a été trouvée égale à 5,62 ;

---

(1) Cette question a été traitée avec beaucoup plus de détails par Lamé dans les §§ 88 et 89 de la *Théorie mathématique de l'élasticité*.

mais la densité des corps à la surface de la terre étant beaucoup moindre, il est probable que la densité des couches successives croît de la surface au centre; cependant, sur l'étendue des 45 premiers kilomètres, les variations de la densité moyenne ne sont sans doute pas très-rapides, et nous pouvons prendre le nombre 2 pour densité moyenne de l'écorce.

L'attraction exercée par la terre sur un point situé dans l'épaisseur du globe est proportionnelle à la distance de ce point au centre lorsqu'on suppose la densité constante. Mais le calcul direct montre que la diminution d'attraction est insensible pour des points appartenant à l'écorce solide, parce que le rapport des rayons de la surface interne et de la surface externe est très-peu différent de l'unité.

Nous calculerons donc l'attraction p par unité de surface, en prenant le poids d'une colonne de 45,000 mètres de hauteur, d'un mètre carré de base, pesant 2000 kilogrammes par mètre cube; il en résulte que p est égal à 90,000,000 de kilogrammes.

Donc R = 6,341,000,000 kilogrammes par mètre carré, ce qui équivaut à 634,100 kilogrammes par centimètre carré (1).

Une telle pression est trois cents fois plus forte que celle qui suffit pour produire l'écrasement du basalte le plus résistant. La croûte terrestre n'est donc en équilibre qu'à la condition de reposer sur le noyau liquide formant la masse centrale du globe : elle est comme une voûte posée sur cintre. Si par un retrait de la masse liquide, ou par une diminution de la pression intérieure que cette

---

(1) Le résultat n'est pas sensiblement modifié quand on adopte une autre épaisseur e, pourvu qu'elle soit toujours très-petite par rapport au rayon a, condition sans laquelle on ne pourrait plus appliquer la formule. On aura, en effet, en laissant e arbitraire,

$$p = e \times 2000;$$

et par suite

$$R = \frac{ae \times 2000}{2e} = a \times 1000,$$

ce qui donne $\frac{a}{10}$ kilogrammes par centimètre carré. Les petites variations de l'épaisseur e modifient très-peu la pression moyenne R. Ainsi $e = 40000$ mètres donnerait

$$R = 6\,343\,500 \times 1000 = 6\,343\,500\,000.$$

masse exerce sur l'intrados de la voûte, la croûte se trouvait abandonnée à elle-même, une rupture s'y produirait, et le tassement du cintre serait immédiatement suivi d'une dislocation, puis d'un tassement égal dans la voûte. Sous l'influence des énormes pressions qu'elle subit, l'enveloppe solide du noyau incandescent se comporte, au moins dans son ensemble, comme une enveloppe sans raideur, et par suite le noyau liquide, soumis comme l'Océan aux actions attractives du soleil et de la lune, doit aussi communiquer incessamment ses propres déformations à l'enveloppe flexible dont il est entouré (1).

RÉPARTITION DES PRESSIONS DANS L'INTÉRIEUR DE LA CROUTE TERRESTRE.

1° *Hypothèse sur la variation de densité des couches successives qui composent le globe.*

322. Nous développerons seulement l'hypothèse due à Legendre, et adoptée par Laplace dans le tome V de la *Mécanique céleste.*

Un point matériel extérieur à une couche sphérique homogène est attiré par cette couche comme si toute la masse était concentrée en son centre de figure. Un point intérieur à la couche n'est pas attiré. De cette loi très-simple résulte qu'une sphère massive de rayon R, formée de couches concentriques de rayon x et de densité ρ, exerce sur un point extérieur de masse égale à l'unité, placé à la distance a du centre, une attraction égale à

$$\frac{4\pi f\int_0^R \rho x^2 dx}{a^2},$$

et sur un point de masse 1, pris dans l'intérieur de la sphère à la distance r du centre, une attraction

$$(1) \qquad \varphi = \frac{4\pi f\int_0^r \rho x^2 dx}{r^2}.$$

Le coefficient f représente l'attraction de deux points de masse égale à l'unité, placés à l'unité de distance l'un de l'autre. Le nombre φ est l'accélération due à l'attraction du globe, pour un point matériel placé à la distance r du centre, toutes les fois que

(1) Une théorie récente admet que le globe terrestre est entièrement refroidi de la surface au centre, et nie l'existence actuelle du noyau en fusion. On peut consulter sur ce sujet une conférence sur les volcans, par M. C. Vogt, professeur à l'Université de Genève (Association française pour le développement des sciences, congrès de Lyon, 21 août 1873).

$r < R$. L'équation de l'hydrostatique (*Hydr.*, § 16, page 25), lie à cette accélération φ la variation dp des pressions subies par les différentes couches successives; on a en effet

$$(2) \qquad dp = -\rho\varphi dr,$$

en mettant le signe — devant le second membre, parce que la pression p croît à mesure que le rayon r diminue.

L'hypothèse de Legendre et de Laplace consiste à établir entre p et ρ la relation

$$(3) \qquad \frac{dp}{d\rho} = 2K\rho,$$

K étant une constante; ou bien, sous forme intégrale,

$$p = K(\rho^2 - \rho'^2),$$

ρ' étant la densité de la matière formant l'intérieur du globe, soumise à une pression nulle.

De l'équation (2) on tire

$$\varphi = -\frac{dp}{\rho dr},$$

et substituant à dp la valeur tirée de l'équation (3),

$$\varphi = -\frac{2K\rho d\rho}{\rho dr} = -2K\frac{d\rho}{dr}.$$

D'où résulte, pour déterminer ρ en fonction de r, l'équation

$$(4) \qquad -2K\frac{d\rho}{dr} = \frac{4\pi f\int_0^r \rho x^2 dx}{r^2}.$$

Posons, pour abréger $\frac{2\pi f}{K} = n^2$ quantité constante; il viendra

$$(5) \qquad r^2 d\rho = -n^2 dr\int_0^r \rho x^2 dx.$$

Il convient alors de changer de variable et de poser

$$(6) \qquad \rho_1 = r\rho.$$

On en déduit

$$\rho = \frac{\rho_1}{r},$$

$$d\rho = \frac{r d\rho_1 - \rho_1 dr}{r^2},$$

L'équation (5) se transforme donc en celle-ci,

$$(7) \qquad r d\rho_1 - \rho_1 dr + n^2 dr\int_0^r \rho x^2 dx = 0,$$

ou bien

$$r\frac{d\rho_1}{dr} - \rho_1 + n^2\int_0^r \rho x^2 dx = 0.$$

Différentions cette dernière équation, c'est-à-dire changeons-y r en $r + dr$, et cherchons la variation correspondante de ρ_1. Il vient, en divisant par dr,

$$\left(r\frac{d^2\rho_1}{dr^2} + \frac{d\rho_1}{dr}\right) - \frac{d\rho_1}{dr} + n^2 \times \rho r^2 = 0,$$

ou bien

$$r\frac{d^2\rho_1}{dr^2} + n^2 \times \rho_1 r = 0,$$

ou encore, en supprimant le facteur r,

$$(8) \qquad \frac{d^2\rho_1}{dr^2} + n^2\rho_1 = 0.$$

L'intégrale de cette équation est, avec deux constantes arbitraires A et B,

$$\rho_1 = A\sin nr + B\cos nr,$$

et, par suite,

$$(9) \qquad \rho = \frac{A\sin nr + B\cos nr}{r}.$$

La densité ρ ne peut être infinie pour $r = 0$; donc $B = 0$, et il vient simplement

$$(10) \qquad \rho = \frac{A\sin nr}{r}.$$

La densité moyenne du globe, ρ_0, s'obtiendra en divisant la somme des masses par le volume total, ce qui donne

$$\rho_0 = \frac{4\pi\int_0^R \rho r^2 dr}{4\pi\int_0^R r^2 dr} = \frac{\int_0^R A\sin nr \times r dr}{\frac{1}{3}R^3}.$$

La densité moyenne ρ_0 est connue par l'expérience de Cavendish, qui lui attribuait la valeur 5,48. On a adopté généralement la valeur un peu plus forte 5,50.

Cette hypothèse a depuis été modifiée par M. Roche, qui exprime $\frac{dp}{d\rho}$ par la somme de deux termes, proportionnels l'un à ρ, l'autre au carré de ρ. Cette nouvelle hypothèse conduit à une variation de densité entre une couche quelconque et le centre du globe, proportionnelle au carré du rayon de la couche. Soit ρ' la densité au centre du globe; la densité à la distance r sera donnée par la formule

$$\rho = \rho'\left(1 - \frac{4r^2}{5R^2}\right),$$

et on aura

pour la densité au centre.	10,5,
pour la densité à la surface.	2,1,
la densité moyenne étant supposée de. . . .	5,5.

Cette théorie justifierait le poids spécifique de 2000 kilog. par mètre cube, que nous avons adopté pour la croûte solide extérieure.

2° Répartition des pressions dans l'intérieur de la croûte, en tenant compte du poids des couches dont elle se compose.

323. Nous continuerons à supposer les couches sphériques, et sollicitées seulement par l'attraction du globe, sans tenir compte de l'aplatissement, ni du mouvement de rotation et des forces centrifuges qu'il faudrait introduire pour compléter le problème.

Les formules du § 253 sont alors applicables, sauf que chaque couche sphérique subit l'action extérieure de son poids outre les pressions des couches voisines.

Soit q le poids spécifique des matériaux composant la croûte, supposé constant dans l'épaisseur des 45 kilomètres. Nous aurons toujours pour une couche en particulier les équations

$$(2) \qquad \delta r = r\frac{R}{E},$$

$$(3) \qquad \delta dr = -mdr\frac{E}{R}.$$

Mais l'équation (1) deviendra, en tenant compte du poids,

$$(1) \qquad R\times 2\pi r dr = p\times\pi r^2 - (p+dp)(r+dr)^2 - q\times\pi r^2 dr = -\pi d(pr^2) - \pi q r^2 dr,$$

ou bien

$$R = -\frac{1}{2}\frac{d(pr^2)}{rdr} - \frac{qr}{2}.$$

Des équations (2) et (3) on tire

$$(4) \qquad R = \frac{A}{r^{1+m}}, \text{ A étant une constante;}$$

et l'on a, par conséquent, pour déterminer p en fonction de r, l'équation

$$\frac{d(pr^2)}{2rdr} + \frac{qr}{2} + \frac{A}{r^{1+m}} = 0,$$

ou bien

$$(5) \qquad \frac{d(pr^2)}{dr} + qr^2 + \frac{2A}{r^m} = 0.$$

Intégrant, il vient

$$pr^2 = C - \frac{qr^3}{3} + \frac{2A}{(m-1)r^{m-1}},$$

ou

$$p = \frac{C}{r^2} - \frac{qr}{3} + \frac{2A}{(m-1)r^{m-3}}.$$

Appelons r_0 et r_1 le rayon interne et le rayon externe de la croûte, p_0 et p_1 les pressions correspondantes; il viendra, pour déterminer A, les équations

$$\frac{C}{r_0^2} + \frac{(m-1)r_0^{m-3}}{2A} = p_0 + \frac{qr_0}{3},$$

$$\frac{C}{r_1^2} + \frac{(m-1)r_1^{m-3}}{2A} = p_1 + \frac{qr_1}{3},$$

d'où l'on déduit

$$A = \frac{\left(p_0 + \frac{qr_0}{3}\right)r_0^2 - \left(p_1 + \frac{qr_1}{3}\right)r_1^2}{\frac{m-1}{2}\left(\frac{1}{r_0^{m-1}} - \frac{1}{r_1^{m-1}}\right)} = \frac{(p_0 r_0^2 - p_1 r_1^2) - \frac{1}{3}q(r_1^3 - r_0^3)}{\frac{m-1}{2}\left(\frac{1}{r_0^{m-1}} - \frac{1}{r_1^{m-1}}\right)};$$

de sorte que, moyennant une pression intérieure p_0 suffisamment grande, la valeur numérique de A peut être rendue aussi petite qu'on voudra, malgré la grandeur du terme $\frac{1}{3}q(r_1^3 - r_0^3)$, qui, au facteur 4π près, représente le poids de la croûte.

On voit aussi que la pression R est à peu près la même en tous les points, à cause de la petitesse de l'épaisseur $r_1 - r_0$ par rapport au rayon moyen $\frac{r_1 + r_0}{2}$. La croûte terrestre se comporte en un mot comme une enveloppe de chaudière d'épaisseur extrêmement petite, où les tensions sont à peu près également réparties.

VOUTES QUELCONQUES.

324. La méthode pour déterminer les conditions de stabilité d'une voûte quelconque consiste à décomposer cette voûte en parties qui puissent être considérées comme des voûtes en berceau. Pour les voûtes en *arc de cloître*, par exemple, on cherchera la poussée des quatre berceaux tronqués qui viennent s'appuyer sur les quatre faces de la clef de voûte. Les plans verticaux conduits par les arêtes opèrent la décomposition convenable. Dans les *voûtes d'arêtes*, ou intersection de deux berceaux de même montée, on peut couper les deux berceaux par deux séries de plans verticaux, parallèles aux berceaux, et infiniment rapprochés. On admettra ensuite que les poussées exercées simultanément par deux fragments aboutissant à un même point de l'arête, ont une résultante dirigée dans le plan vertical de cette arête, et que cette résultante ne doit point sortir de l'épaisseur de la maçonnerie. Cette considération conduit à nourrir les arêtes au moyen de nervures saillantes, et à les exécuter avec des matériaux de choix d'après l'appareil des voûtes en berceau. Le reste de la construction peut se faire avec des matériaux plus légers, et forme comme une série de petites voûtes d'une portée variable, jetées d'une arête à l'autre.

Le pilier qui supporte la retombée d'une arête unique reçoit une poussée horizontale dirigée dans le plan de cette arête. Un pilier supportant deux arêtes appartenant à deux voûtes d'arêtes égales en prolongement l'une l'autre, en reçoit deux poussées horizontales, dont la résultante est perpendiculaire à l'axe commun des deux voûtes. Si une série de voûtes d'arêtes à base carrée se retourne à angle droit, pour entourer une cour quadrangulaire, par exemple, les deux piliers d'angle sont soumis chacun à l'action d'une poussée unique dirigée dans le plan vertical conduit suivant l'arête diagonale du carré situé dans l'angle.

Les contre-forts des cathédrales du moyen âge sont destinés à équilibrer la poussée des voûtes d'arêtes situées à l'intérieur de ces édifices. L'arc en maçonnerie qui rattache le contre-fort au vaisseau principal aboutit en général au pilier qui supporte la voûte, à la hauteur des naissances. La réaction de la voûte se décompose en deux forces : l'une, verticale, est supportée directement par le pilier; l'autre, horizontale, égale à la poussée de la voûte à la clef, est transmise à l'arc-boutant. Cette poussée se compose avec le poids de l'arc pour produire la force qui agit sur le contre-fort lui-même. La poussée horizontale des voûtes est ainsi transportée du pilier de la nef sur un pilier extérieur, à une moindre hauteur au-dessus du sol.

Les escaliers *vis à jour* sont de véritables voûtes où chaque marche forme un voussoir particulier, qui s'engage d'un côté dans le mur d'une tour ronde, et qui repose par un angle rentrant sur la marche immédiatement inférieure. Le mur de la tour remplit l'office d'une frette qui serrerait les marches vers le centre vide; les marches sont donc sollicitées par cette pression dans le sens horizontal, et comme les voussoirs d'une voûte en berceau, ils s'appuient latéralement sur deux culées, le palier inférieur et le palier supérieur. Les efforts développés dans la matière ne dépendent plus seulement du poids des voussoirs et des surcharges; ils dépendent principalement des circonstances de la pose des marches et des maçonneries qui les entourent; la détermination de ces efforts échappe en conséquence au calcul.

Les principaux problèmes relatifs aux voûtes d'arêtes, aux escaliers,

aux arcs de cloître, aux voûtes d'arêtes en tour ronde, aux voûtes coniques, etc., appartiennent plutôt à la coupe des pierres qu'à la résistance des matériaux.

CHAPITRE IV.

POUSSÉE DES TERRES. — STABILITÉ DES REVÊTEMENTS.

325. Nous avons déjà reconnu (§ 266) qu'il se développe dans les terres deux genres de résistance au déplacement relatif des molécules, le frottement et la cohésion.

Le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes, indépendant, entre certaines limites, de la vitesse relative, et proportionnel à la composante normale de la pression mutuelle dès que le glissement commence. Le rapport du frottement à la pression est pour chaque nature de terre un certain nombre f; à ce nombre, considéré comme une tangente trigonométrique, correspond un angle qu'on appelle *l'angle de frottement*. C'est la limite supérieure de l'angle que peut former avec l'horizon le talus naturel de la terre fraîchement remuée.

La cohésion est proportionnelle à l'étendue des surfaces de contact et indépendante de la pression mutuelle. On l'évalue par un coefficient γ, qui représente un certain nombre de kilogrammes par mètre carré.

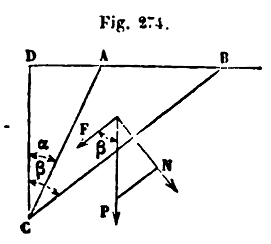
Nous nous proposons de déterminer, dans ce chapitre, l'effort auquel un mur de revêtement qui coupe le talus naturel d'un massif de terre peut être appelé à résister, et de déterminer par suite les dimensions à donner à ce mur.

La théorie que nous allons exposer est celle de Coulomb (1), complétée par Poncelet (2) et résumée par Bélanger dans ses cours et dans ses derniers ouvrages (3).

326. Cherchons d'abord à déterminer expérimentalement ces deux coefficients f et γ. Pour cela nous traiterons les problèmes suivants, qui sont empruntés aux leçons de Navier sur la résistance des matériaux.

Nous supposerons qu'un massif de terre soit profilé suivant le contour BAC; la face AB appartient à un plan horizontal indéfini. La face AC est un plan dont l'inclinaison est inconnue. On demande de déterminer la limite jusqu'à laquelle cette inclinaison peut être raidie sans compromettre l'équilibre du massif.

Fig. 274.



La hauteur verticale CD est donnée, et égale à h;

Π est le poids de l'unité de volume de terre;

f et γ sont les deux coefficients du frottement et de la cohésion;

α est l'angle inconnu de la face AC avec la verticale AD.

Par l'horizontale projetée en C, menons un plan quelconque CB, faisant avec la verticale CD un angle β; ce plan sépare, dans le massif de terre, un prisme triangulaire dont la base est ABC, et dont le poids P par unité de longueur est égal à

$$P = \frac{1}{2}\Pi h^2(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha). \tag{1}$$

Ce prisme est en équilibre sous l'action de son poids et des réactions développées dans le plan CB; décomposons le poids P en deux composantes, l'une, N, normale, l'autre, F, parallèle à CB; la limite du frottement dans le plan CB sera le produit fN, et la cohé-

(1) Académie des sciences, *Mémoires des savants étrangers*, 1773.
(2) *Mémorial de l'officier du génie*, 1840.
(3) *Dynamique des systèmes matériels* (appendice), 1866.

sion dans ce même plan sera égale à la surface CB multipliée par le coefficient γ ; on la représentera par l'expression $\frac{\gamma h}{\cos\beta}$. La condition d'équilibre est donc :

$$F \underset{<}{=} fN + \frac{\gamma h}{\cos\beta},$$

ou bien, en remplaçant F par $P\cos\beta$, N par $P\sin\beta$, et enfin P par sa valeur donnée par l'équation (1),

$$\frac{1}{2}\Pi h^2(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)\cos\beta \underset{<}{=} \frac{1}{2}f\Pi h^2(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)\sin\beta + \frac{\gamma h}{\cos\beta}.$$

Cette inégalité donne, en isolant le terme en $\operatorname{tg}\alpha$ dans le premier membre, et en divisant par $\frac{1}{2}\Pi h^2$,

$$(\cos\beta - f\sin\beta)\operatorname{tg}\alpha \underset{>}{=} \operatorname{tg}\beta(\cos\beta - f\sin\beta) - \frac{2\gamma}{\Pi h}\frac{1}{\cos\beta}.$$

Le facteur $\cos\beta - f\sin\beta$ est nécessairement positif. En effet f est la tangente de l'angle φ du frottement; $\cos\beta - f\sin\beta$ a le même signe de $\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi$ ou que $\cos(\beta+\varphi)$, c'est-à-dire le signe +, si la somme $\beta+\varphi$ est moindre que 90°. Or on ne peut donner à la variable β de valeurs supérieures au complément de l'angle φ; car pour des valeurs au-dessous de cette limite, l'équilibre du prisme sur le plan CB serait assuré par le frottement seul, et le glissement ne serait plus possible.

On peut donc diviser l'inégalité par $\cos\beta - f\sin\beta$ sans en changer le sens, et il vient

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\alpha \underset{>}{=} \operatorname{tg}\beta - \frac{2\gamma}{\Pi h}\frac{1}{\cos^2\beta(1 - f\operatorname{tg}\beta)}.$$

Cette relation nous montre qu'une quantité *constante*, $\operatorname{tg}\alpha$, doit être égale ou supérieure à une certaine fonction de la variable β, pour toutes les valeurs de β comprises entre α et $90° - \varphi$. La plus

petite valeur admissible pour α est donc celle qui rend $\operatorname{tg}\alpha$ égal au maximum du second membre pris par rapport à la variable β.

Cherchons ce maximum. Pour cela, posons (1)

$$1 - f \operatorname{tg}\beta = x,$$

ou bien

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1-x}{f}, \text{ et } \frac{1}{\cos^2\beta} = 1 + \operatorname{tg}^2\beta = 1 + \left(\frac{1-x}{f}\right)^2.$$

La fonction à rendre maximum devient alors

$$\frac{1-x}{f} - \frac{1}{af^2}\,\frac{f^2+(1-x)^2}{x}$$

en appelant a la quantité constante $\frac{\Pi h}{2\gamma}$. Opérons les réductions, il viendra la fonction

$$\frac{1}{af^2}\left(2 + af - (1+af)x - \frac{(1+f^2)}{x}\right).$$

Le *maximum* de cette expression correspond au *minimum* de la somme $(1+af)x + \frac{1+f^2}{x}$ des termes variables, et, comme le produit des deux parties de cette dernière somme est constant et égal à $(1+af)\times(1+f^2)$, le minimum correspond à la valeur de x pour laquelle les deux parties sont égales, c'est-à-dire à la valeur

$$x = \sqrt{\frac{1+f^2}{1+af}}.$$

Substituant cette valeur de x dans la relation (2), il vient pour le minimum de $\operatorname{tg}\alpha$

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{f} + \frac{2}{f^2}\left(\frac{2\gamma}{\Pi h} - \sqrt{\frac{2\gamma}{\Pi h}\left(\frac{2\gamma}{\Pi h} + f\right)(1+f^2)}\right).$$

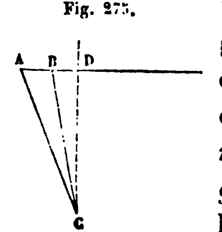
---

(1) M. Bresse, *Résistance des matériaux*, 2[e] édition, p. 405.

Si le plan AC a cette inclinaison, on dira que *le massif* ACB *est à la limite de stabilité correspondante à sa hauteur* h.

Cette valeur tg α est une fonction de h. Il existe une certaine valeur de h pour laquelle $\alpha = o$, alors la terre peut se tenir à pic ; pour une valeur moindre de h, tg α serait négatif; mais ce résultat n'est pas admissible, car si la terre était profilée suivant l'angle aigu BAC, un prisme CAB pourrait se détacher sans glisser sur la face CB, et la cohésion qui le retiendrait serait une sorte de *cohésion normale* à la surface CB, et non une cohésion *tangentielle*, comme le suppose l'analyse du problème. Les lois de cette cohésion sont différentes de celles que nous avons prévues, et les formules ne sont plus applicables.

Fig. 275.



Pour $h = \infty$, l'équation (3) devient simplement $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{f}$. L'inclinaison-limite est alors celle du talus naturel. La cohésion, qui est proportionnelle à la longueur CB, disparaît devant le frottement, qui est proportionnel à la surface CBA. La cohésion peut donc être négligée devant le frottement lorsque la hauteur h devient suffisamment grande.

L'angle α peut varier entre o et $90° - \varphi$; il est nul pour la valeur particulière de h qui annule le second membre de l'équation (3), c'est-à-dire pour

$$h = \frac{4\gamma}{\Pi}\left(f + \sqrt{1 + f^2}\right).$$

Telle est la plus grande hauteur sur laquelle les terres puissent se tenir à pic.

Au moyen de ces formules, on a déterminé, par une série d'observations portant sur les hauteurs h, les valeurs des coefficients f et γ.

Pour les terres, le coefficient f varie de 0.60 (sable fin et sec) à 1.43 (sol le plus dense), et est en moyenne voisin de l'unité; l'angle φ varie dans les mêmes circonstances de 31° à 55°, et est en moyenne voisin de 45°.

Le coefficient γ est plus difficile à connaître avec précision : d'après

les observations de Navier sur la hauteur-limite que peuvent conserver des terres coupées à pic, on peut admettre que, pour une terre franche peu cohérente, le coefficient γ est égal à 148 kilogr. par mètre carré; pour la même terre, $f = 1.07$; pour une terre très-forte, $\gamma = 662$ kilogr. par mètre carré, et $f = 1.43$.

Le poids des terres par mètre cube varie de 1400 kil. à 1900 kil.

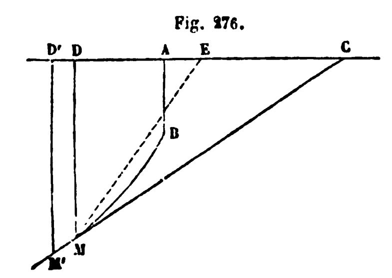
327. Navier observe aussi que, lorsqu'un massif de terre est exposé à l'air et qu'il subit tous les changements de température, les alternatives de sécheresse et d'humidité, les gelées, les pluies, sa surface extérieure tend à prendre avec le temps les inclinaisons qu'elle aurait prises si la cohésion n'eût pas existé. Les parties voisines de la surface sont retenues par la cohésion seule, et comme la cohésion est variable avec les intempéries, ces parties se détachent au moment où la cohésion a sa plus faible valeur. Petit à petit, le massif revient à la forme d'équilibre qu'il aurait reçue si la cohésion n'était pas intervenue d'une manière accidentelle.

La cohésion étant mal connue, on la négligera dans les problèmes sur la poussée des terres, et l'on n'y admettra que le frottement. La cohésion n'est considérée, à ce point de vue, que comme produisant un surcroît de stabilité, sur lequel il ne serait pas prudent de compter d'une manière absolue.

328. Problème. — Un massif de terre d'une nature déterminée et terminé à un plan horizontal AC, peut se tenir à pic sur une hauteur $h' = AB$. On demande de tracer la courbe BM du profil inférieur au point B, de manière que le massif soit en tous les points de ce profil à la limite de stabilité.

Considérons un point M du profil cherché. Abaissons la perpendiculaire MD sur AC; soient $DM = y$ et $AD = x$, et proposons-nous de chercher la relation entre x et y.

Fig. 276.



Par le point M menons une droite ME telle, que l'aire retranchée au profil MBA soit égale à l'aire ajoutée. Menons en outre un plan quelconque MC; relativement au glisse-

ment du massif sur ce plan, tout se passera comme si le profil ABM était remplacé par le profil rectiligne ME.

Appelant donc α l'angle DME, nous pourrons poser, comme dans le paragraphe précédent,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{f} + \frac{2}{f^2}\left(\frac{2\gamma}{\Pi y} - \sqrt{\frac{2\gamma}{\Pi y}\left(\frac{2\gamma}{\Pi y} + f\right)(1 + f^2)}\right),$$

équation qui est celle de la courbe cherchée dans un système particulier de coordonnées, y et α.

Il s'agit de revenir de ces coordonnées particulières, α et y, aux coordonnées ordinaires, x et y.

On y parvient de la manière suivante.

L'aire du triangle DME est égale à $\frac{1}{2}y^2 \operatorname{tang}\alpha$.

Prenons sur la courbe un point M' infiniment voisin; à ce point correspondra un accroissement de l'aire de la courbe cherchée égal à la surface DD'M'M, ou à ydx; donc

$$ydx = d\left(\frac{1}{2}y^2 \operatorname{tg}\alpha\right) = y \operatorname{tg}\alpha dy + \frac{1}{2}y^2 d(\operatorname{tg}\alpha),$$

ou bien

$$dx = \operatorname{tg}\alpha dy + \frac{1}{2} yd(\operatorname{tg}\alpha).$$

Mais l'équation de condition nous donne pour $\operatorname{tg}\alpha$ une fonction connue de y. Posons, pour abréger,

$$\operatorname{tg}\alpha = \varphi(y).$$

On en déduit

$$d(\operatorname{tg}\alpha) = \varphi'(y)dy,$$

et par suite, l'équation différentielle de la courbe cherchée est

$$dx = \varphi(y)dy + \frac{1}{2} y\varphi'(y)dy.$$

Cette équation peut s'intégrer par une seule quadrature.

Nous avons en effet, en appelant C une constante arbitraire ,

$$x = C + \int \varphi(y)dy + \frac{1}{2}\int y\varphi'(y)dy.$$

Posons

$$\int \varphi(y)dy = \Phi(y);$$

nous aurons, en intégrant par parties ,

$$\int y\varphi'(y)dy = y\varphi(y) - \int \varphi(y)dy = y\varphi(y) - \Phi(y)$$

Donc enfin

$$x = C + \frac{1}{2}\,\Phi(y) + y\varphi(y)$$

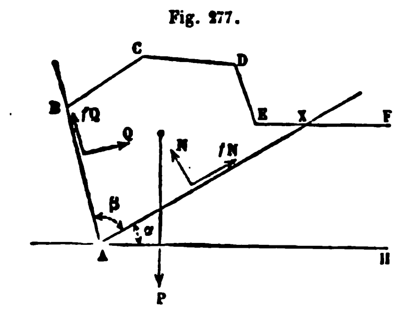
est l'équation du lieu. La constante C se détermine en observant que $x = 0$ donne $x = h'$.

Nous ne nous arrêterons pas à développer cette solution, qui n'offre aucune difficulté : le radical carré qui entre dans la fonction $\varphi(y)$ ne portant que sur un polynôme du second degré, les intégrations sont possibles.

DÉTERMINATION DU PRISME DE PLUS GRANDE POUSSÉE.

329. Soit ABCDEF le profil d'un massif de terre, appuyé par la face AB sur un mur de revêtement. On demande de déterminer l'effort maximum auquel le mur puisse être appelé à résister.

Fig. 277.



Par l'arête projetée en A menons arbitrairement un plan AX. qui isole dans le massif un prisme ABCDEX, et cherchons les conditions d'équilibre de ce prisme, en supposant qu'il soit sur le point de glisser sur les faces AB. AX, à

la façon d'un coin qui s'avancerait pour séparer le mur et le massif de terre FXAH.

Les forces qui agissent sur ce système sont la pesanteur et les réactions du mur et du plan AX. Menons par le point A une horizontale AH ; appelons α l'angle variable du plan AX avec cette horizontale, et β l'angle du coin BAX.

Les réactions du mur et du plan AX se réduisent chacune, puisque la cohésion est supposée nulle, à une composante normale et à une force de frottement ; et comme on suppose que le glissement est sur le point de se produire, le frottement est proportionnel à la pression normale.

Soit N la réaction normale du plan AX ; le frottement sera égal à Nf, et sera dirigé de bas en haut, dans le sens contraire au mouvement supposé.

Appelons de même Q la réaction normale du plan AB ; $f'Q$ sera le frottement développé sur ce plan, et il sera dirigé aussi de bas en haut. Le coefficient f' du frottement des terres sur le mur peut être différent du coefficient f relatif au glissement de terre sur terre.

Soit enfin P le poids du prisme ABCDEX, rapporté, comme les autres forces N et Q, à l'unité de longueur.

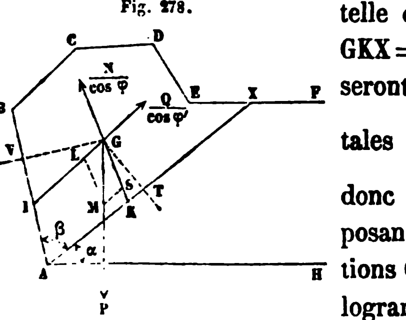
Il y aura équilibre entre les forces P, Q, N, fN, fQ ; on pourra donc déterminer les forces inconnues N et Q au moyen de deux équations, par exemple des équations des projections des forces sur deux axes rectangulaires, l'un parallèle à AX, l'autre perpendiculaire.

Les deux forces N et fN se composent en une seule, égale à $\frac{N}{\cos\varphi}$, en appelant φ l'angle dont la tangente est f, et cette résultante fait avec la force N un angle égale à φ. De même, si l'on compose Q et $f'Q$, on aura pour résultante une force $\frac{Q}{\cos\varphi'}$, faisant avec la normale à AB un angle égal à φ'.

Par là on ramène le problème à l'équilibre de trois forces dont les directions sont connues et dont les positions restent d'ailleurs indéterminées.

Par un point G de la force P menons une droite GI telle, qu'elle fasse avec AB un angle $GIB = 90° - \varphi'$; puis menons une droite GK telle qu'elle fasse avec AX un angle $GKX = 90° - \varphi$. Ces droites prolongées seront les directions des réactions totales $\frac{Q}{\cos\varphi'}$ et $\frac{N}{\cos\varphi}$. On obtiendra donc ces réactions totales en décomposant la force P suivant les directions GK, GI, au moyen du parallélogramme GLMS.

Fig. 278.



L'inconnue de la question est Q; le côté GL du parallélogramme étant proportionnel à $\frac{Q}{\cos\varphi'}$, et la diagonale GM à P, le triangle GLM donne la proportion

$$\frac{\left(\frac{Q}{\cos\varphi'}\right)}{P} = \frac{\sin GML}{\sin MLG}.$$

L'angle MLG est égal au supplément de l'angle LGS. Abaissons du point G une perpendiculaire GT sur AX. L'angle TGV est le supplément de l'angle BAX; on a donc

$$TGV = 180° - \beta,$$

et par suite

$$IGK = LGS = TGV - KGT - IGV = TGV - \varphi - \varphi' = 180° - \beta - \varphi - \varphi'.$$

Donc enfin

$$\sin MLG = \sin(180° - \beta - \varphi - \varphi') = \sin(\beta + \varphi + \varphi').$$

On a d'ailleurs

$$GML = MGS = TGM - TGK = \alpha - \varphi,$$

et par conséquent

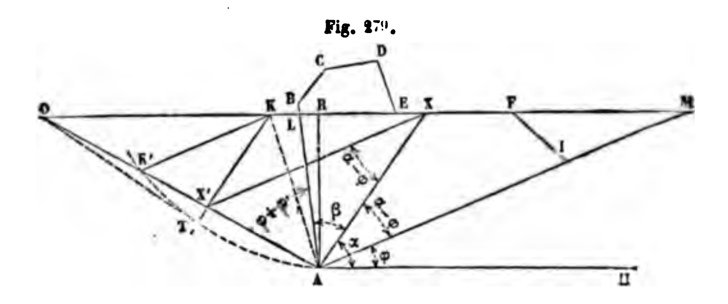
$$\frac{Q}{\cos\varphi'} = P\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi + \varphi')},$$

équation qui fait connaître Q, valeur de la poussée normale, ou $\frac{Q}{\cos\varphi'}$, valeur de la poussée oblique exercée par les terres sur le mur.

P et β sont des fonctions de l'angle α ; on pourra donc, en donnant successivement à α diverses valeurs, calculer les valeurs correspondantes de $\frac{Q}{\cos\varphi'}$, et déterminer le maximum de cette réaction. C'est cette recherche que Poncelet a ramenée à de simples opérations géométriques.

RECHERCHE DU MAXIMUM DE LA RÉACTION DU MUR.

Fig. 279.



330. Il s'agit de déterminer l'angle α de manière que la force

$$\frac{Q}{\cos\varphi'} = P\,\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi + \varphi')}$$

soit un maximum, P étant une fonction connue de α, proportionnelle à l'aire du prisme AXEDCBA, et β étant l'angle qui, ajouté à α, donne l'angle constant BAH de la face interne du mur avec l'horizontale AH.

Prolongeons indéfiniment le côté EF du profil où l'on suppose placé le point X; sur ce côté prenons un point K tel, que le triangle KAL soit équivalent à l'aire du profil EDCBLE, supprimée par le prolongement de la direction FE. De cette manière, le triangle KAX est équivalent à l'aire AXEDCBA, à laquelle le poids P est proportionnel.

Menons ensuite par le point A deux droites AM, AO, telles que l'angle MAH soit égal à φ, et que l'angle OAL soit égal à $\varphi + \varphi'$. Il en résulte que l'angle MAX sera égal à $\alpha - \varphi$, et l'angle OAX à $\beta + \varphi + \varphi'$.

Du point A, abaissons la perpendiculaire AR sur KX; le triangle KAX a pour mesure $\frac{1}{2} \times AR \times KX$; et le poids du prisme de terre séparé par le plan AX a pour valeur

$$\frac{\Pi}{2} \times AR \times KX.$$

Le problème est donc ramené à déterminer le point X de manière à rendre maximum l'expression

$$(1) \qquad \frac{\Pi}{2} \times AR \times KX \times \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi + \varphi')}.$$

Menons par le point X une parallèle XX' à AM. L'angle XAM sera égal à AXX'. Le triangle AXX' a donc pour angles, au point X, $\alpha - \varphi$, et au point A, $\beta + \varphi + \varphi'$. Le rapport des sinus est égal au rapport des côtés opposés; donc

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi + \varphi')} = \frac{AX'}{XX'}.$$

Menons de même une droite KK' parallèle à AM. Les deux droites OM, OA, étant coupées par trois droites parallèles, KK', XX', AM, on a les proportions :

$$(2) \qquad \frac{KX}{K'X'} = \frac{OM}{OA},$$

$$\frac{XX'}{OX'} = \frac{AM}{OA}.$$

Remplaçons dans l'expression (1) le rapport des sinus par le rapport égal $\frac{AX'}{XX'}$; puis, dans l'expression résultante, remplaçons KX

et XX' par leurs valeurs tirées des égalités (2) ; il viendra, en omettant provisoirement le facteur constant $\frac{\Pi}{2}$,

$$\text{AR} \times \frac{\text{K'X'} \times \text{OM}}{\text{OA}} \times \frac{\text{AX'}}{\text{OX'} \times \frac{\text{AM}}{\text{OA}}} = \left(\text{AR} \times \frac{\text{OM}}{\text{AM}}\right) \times \frac{\text{K'X'} \times \text{AX'}}{\text{OX'}}.$$

Le premier facteur ne dépend pas de la position du point X sur le côté EF ; le second facteur seul est variable, et les opérations que nous venons de faire ont ramené les diverses variables à être toutes des longueurs comptées sur une même droite OA.

L'expression $\text{AR} \times \frac{\text{OM}}{\text{AM}}$ est égale au double de la surface du triangle OAM, divisée par le côté AM ; c'est donc la longueur de la perpendiculaire abaissée du point O sur la direction AM, ou enfin c'est le produit du côté OA par le sinus de l'angle compris OAM, qui est égal à

$$(\beta + \varphi + \varphi') + (\alpha - \varphi) \quad \text{ou à} \quad \beta + \alpha + \varphi'.$$

L'expression à rendre maximum est donc simplement

$$\text{OA} \sin(\beta + \alpha + \varphi') \times \frac{\text{K'X'} \times \text{AX'}}{\text{OX'}}.$$

Faisons

$$\text{OX'} = x, \text{ variable,}$$
$$\text{OA} = a, \text{ constante,}$$
$$\text{OK'} = k, \text{ constante.}$$

Ces trois quantités sont des longueurs comptées sur la droite OA à partir du point O.

K'X' sera égal à $x - k$ et AX' à $a - x$.

Il s'agit donc de rendre maximum la fonction

$$\frac{(x-k)(a-x)}{x} = a + k - x - \frac{ak}{x}.$$

Le maximum cherché répond au minimum de la partie négative, $\left(x + \frac{ak}{x}\right)$, qui est seule variable, et comme le produit des deux termes dont cette partie se compose est constant, son minimum correspond à l'égalité des deux termes, ou à $x = \sqrt{ak}$. La quantité cherchée OX' est donc la moyenne proportionnelle entre OA et OK', et si l'on fait passer par les points A et K' une circonférence de cercle de rayon quelconque, on résoudra le problème en menant par le point O une tangente, OT, à cette circonférence, et en prenant sur OA une longueur $OX' = OT$. On achèvera la solution en menant par le point X' ainsi déterminé une parallèle X'X à AM jusqu'à la rencontre X du côté EF. La droite AX sera le profil du plan demandé. La solution n'est admissible qu'autant que le point X tombe entre les points E et F, où se termine ce côté sur le contour effectif du massif de terre.

La pression totale du mur sur le massif, ou la pression totale du massif sur le mur, sera donnée par l'expression

$$\begin{aligned}
\frac{Q}{\cos\varphi'} &= \frac{\Pi}{2} \times OA \sin(\beta + \alpha + \varphi') \times (a + k - 2\sqrt{ak}) \\
&= \frac{\Pi}{2} \times OA \sin(\beta + \alpha + \varphi') \times (\sqrt{a} - \sqrt{k})^2 \\
&= \frac{\Pi}{2} \times \sin(\beta + \alpha + \varphi') \times a(\sqrt{a} - \sqrt{k})^2 \\
&= \frac{\Pi}{2} \times \sin(\beta + \alpha + \varphi') \times (a - \sqrt{ak})^2.
\end{aligned}$$

Or

$$a - \sqrt{ak} = OA - OX' = AX',$$

et l'on a enfin

$$\frac{Q}{\cos\varphi'} = \frac{\Pi}{2} \sin(\beta + \alpha + \varphi') \times \overline{AX'}^2.$$

331. Si le point O était très-éloigné, les constructions graphiques seraient peu commodes; alors on aurait recours au calcul. Dans le triangle AOL on connaît le côté AL, l'angle $OAL = \varphi + \varphi'$, et l'angle OLA que nous désignerons par la lettre θ. On peut en déduire:

$$OA = AL \times \frac{\sin\theta}{\sin(\theta + \varphi + \varphi')},$$

$$OL = AL \times \frac{\sin(\varphi + \varphi')}{\sin(\theta + \varphi + \varphi')}.$$

Mais

$$OK' = OK \times \frac{OA}{OM} = (OL - KL) \times \frac{OA}{OL + LM},$$

expression où l'on peut introduire, à la place de OA et de OL, leurs valeurs en fonctions de AL; les quantités KL, LM sont connues sur l'épure. On aura donc OK' par le calcul; ensuite on déterminera le point X' par l'équation

$$AX' = OA - \sqrt{OA \times OK'}.$$

332. Si l'on joint KX', on peut remarquer qu'on a la proportion

$$\frac{OX'}{OA} = \frac{OK'}{OX'} = \frac{OK}{OX}.$$

Donc les droites KX' et AX sont parallèles, et l'on peut déterminer le point X en menant par le point A une parallèle à la droite KX', au lieu de mener par le point X' une parallèle à la droite AM. On en conclut aussi l'égalité

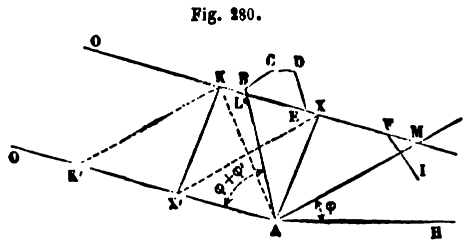
$$\overline{OX}^2 = OK \times OM.$$

333. Si le point X, obtenu par ces constructions, ne tombe pas entre les points E et F, le plan cherché ne rencontre pas le profil entre les points E et F; et l'on devra recommencer la construction en se servant d'un autre côté, ED ou FI, suivant que le point X tombe à gauche du point E ou à droite du point F.

EXAMEN DE CERTAINS CAS PARTICULIERS.

334. Lorsque les droites AO et EF sont parallèles, la construction doit être modifiée. Dans ce cas, le point X' est le milieu de la distance AK'; de sorte qu'il suffit de mener par le point K une parallèle, KK', à la droite AM, et de prendre le milieu de la droite finie AK'.

Fig. 280.

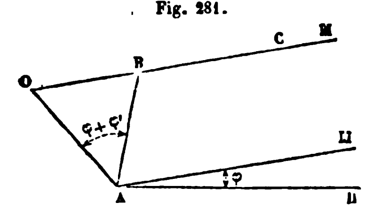


Si le point M est infiniment éloigné, le point O restant à distance finie, la quantité OM devient infiniment grande, et, par suite, $OK' = OK \times \frac{OA}{OM}$ est nul. Dans ce cas, le point K' coïncide avec le point O, et la poussée $\frac{Q}{\cos\varphi'}$ est égale à

$$\frac{\Pi}{2} \sin OAM \times \overline{OA}^2.$$

Ce cas se présente lorsqu'un mur AB est destiné à soutenir un massif de terres de hauteur indéfinie, terminé latéralement par un plan à l'inclinaison du talus naturel.

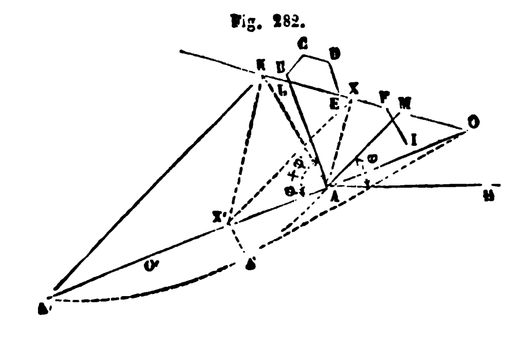
Fig. 281.



Le plan AX qui donne la poussée maximum se confond avec le plan AM lui-même, et le prisme de poussée maximum se change en une tranche à faces parallèles, indéfinie dans le sens parallèle à son talus.

Enfin, il peut arriver telle disposition de la figure que le point O tombe du côté opposé à celui où nous l'avons supposé d'abord; cela a lieu lorsque l'angle $\varphi + \varphi'$ est assez grand pour que la droite LM soit inclinée en sens contraire de la droite AO. La construction n'est pas modifiée par ce renversement de la figure.

Fig. 282.



REMARQUE SUR LA RECHERCHE DU MAXIMUM.

335. Nous avons vu (§ 333) que, si le point X ne tombait pas sur le côté EF entre les points E et F, il fallait en conclure que le point cherché n'appartenait pas à ce côté, et qu'alors on devait recommencer les constructions en se servant d'un autre côté, soit FI, soit ED,... Il est possible (fig. 283) que la construction faite sur le côté EF donne un point X situé sur le prolongement de EF vers la gauche, et que la construction faite sur le côté adjacent, ED, donne un point X' situé sur le prolongement de DE vers la droite. Dans ce cas particulier, le plan AE serait le plan cherché. En effet le point X situé sur le prolongement de FE correspond au prisme de poussée maximum parmi les prismes de terre terminés à un plan mobile Ax, lorsque le point x se déplace le long de la direction indéfinie FE; le prisme terminé au plan AE donne donc une poussée plus grande que tout autre prisme terminé à un plan Ax qui couperait FE entre les points E et F. On prouverait de même que le prisme terminé au plan AE donne une poussée plus grande que tout autre prisme terminé à un plan Ax' qui couperait ED entre E et D. Donc enfin AE est le plan cherché.

Pour traiter autrement ce cas particulier, construisons (fig. 284) une courbe représentant par ses ordonnées les valeurs successives de la poussée $\frac{Q}{\cos\varphi'}$, et dont les abscisses soient proportionnelles aux angles α; la courbe présenterait un certain nombre d'arcs qui ne se raccorderaient pas tangentiellement les uns aux autres, comme l'indique la figure suivante :

Fig. 283.

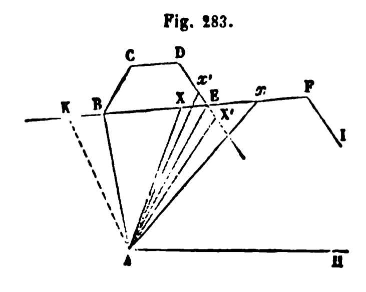
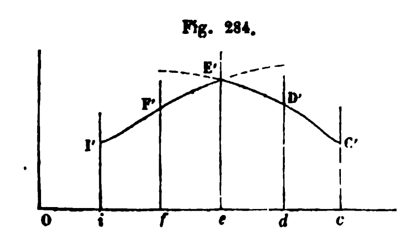


Fig. 284.

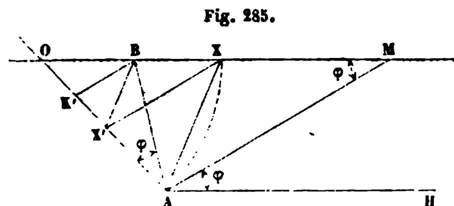


Si la ligne représentative des valeurs de $\frac{Q}{\cos\varphi}$, a la forme I'F'E'D'C'..., le maximum de la poussée a lieu évidemment pour $\alpha = Oe$, c'est-à-dire pour le plan AE (fig. 283); c'est un maximum arithmétique, et non pas un maximum analytique correspondant à la plus grande ordonnée des courbes F'E' ou E'D, indéfiniment prolongées en dehors des intervalles *fe*, *ed*, les seuls où elles soient admissibles.

THÉORÈME DE FRANÇAIS (ANCIENNE THÉORIE).

336. Avant Poncelet, on supposait que la réaction du mur était normale, ce qui revenait à faire $\varphi' = 0$. Si l'on admet de plus que le profil des terres se réduise à une droite horizontale indéfinie, on arrive à un théorème intéressant, démontré pour la première fois par Prony en 1802, pour le cas où la face AB du mur est verticale, et étendu en 1820 par Français au cas où elle est inclinée.

Fig. 285.



Le point K, le point B et le point L se confondent en un seul point; menons AM, qui fait avec AH, ou avec MB, l'angle φ; puis AO, qui fait avec BA un angle égal à φ, puisque φ' est supposé nul. Par le point B menons BK' parallèle à AM; puis prenons un point X' tel que $\overline{OX'}^2$ soit égal à $OK' \times OA$; menons enfin X'X parallèle à AM, et nous aurons le point X où aboutit le plan AO qui limite le prisme

de plus grande poussée. Nous savons (§ 332) que $\overline{OX}^2 = OB \times OM$. Mais dans le triangle OAM, l'angle OAB étant égal à l'angle M, on a $\overline{OA}^2 = OB \times OM$. Donc $OX = OA$, et comme BX' et AX sont aussi parallèles, $OB = OX'$.

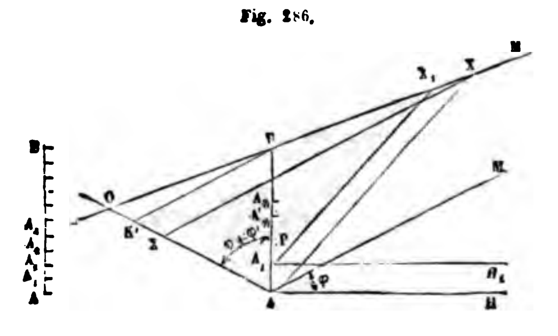
On peut ajouter que AX est la bissectrice de l'angle BAM. En effet, dans le triangle OAX, l'angle OXA est égal à OAX, parce que les côtés opposés OX, OA sont égaux. Mais $OXA = XAH$, à cause du parallélisme des droites BM, AH. Donc $OAX = XAH$; et retranchant de part et d'autre $OAB = MAH = \varphi$, il vient $BAX = XAM$.

RECHERCHE DE LA RÉPARTITION DES POUSSÉES.

337. La méthode générale pour résoudre cette seconde partie de la question consiste à décomposer la hauteur AB du mur, en parties suffisamment petites, AA_1, A_1A_2, A_2A_3,... égales ou inégales; puis à chercher la poussée correspondante à la hauteur AB; à chercher ensuite la poussée correspondante à la hauteur A_1B; la différence de ces deux poussées sera la poussée afférente à l'élément AA_1; de même, après avoir déterminé la poussée correspondante à la hauteur A_2B, la différence entre cette poussée et la poussée exercée sur A_1B, sera la poussée subie par l'élément A_1A_2. On conçoit donc qu'on puisse parvenir par cette méthode à partager la poussée totale qui s'exerce sur AB en parties appliquées séparément aux éléments successifs, AA_1, A_1A_2,....

Cette méthode se simplifie lorsque le profil des terres se réduit à une droite indéfinie, BM.

Fig. 286.



Soit BM le profil, et BAX le prisme de poussée maximum pour toute la hauteur AB. Si l'on répète les constructions sur une hauteur moindre, A_1B, on trouvera pour résultat une droite A_1X_1 parallèle à AX, et l'épure se réduit ainsi successivement, quelle que soit la hauteur BA pour laquelle on l'ait d'abord construite, sans cesser d'être semblable à elle-même. Le point B est le centre de similitude de toutes ces figures. Soit donc z la distance du point B à un point quelconque A_n de la droite BA; la poussée qui s'exerce sur la hauteur BA tout entière a pour expression

$$\frac{\Pi}{2}\sin \mathrm{OAM} \times \overline{\mathrm{AX}}^2;$$

pour une autre hauteur $BA_n = z$, la poussée sera représentée, en vertu de la similitude, par l'expression

$$\frac{\Pi}{2}\sin \mathrm{OAM} \times \overline{\mathrm{AX}'}^2 \times \frac{z^2}{\mathrm{AB}^2},$$

ou bien par l'expression Az^2, en désignant par A le produit des facteurs constants

$$\frac{\Pi}{2}\sin \mathrm{OAM} \times \left(\frac{\mathrm{AX}'}{\mathrm{AB}}\right)^2.$$

La poussée qui s'exerce sur une hauteur BA'_n, infiniment peu différente de BA, est donc égale à $A(z+dz)^2$, et par suite la poussée particulière supportée par l'élément $A_n A_n'$, ou par dz, est égale à la différentielle $2Azdz$. On trouvera donc le centre de poussée des terres sur une hauteur donnée $BP = a$ du mur, en composant toutes les poussées parallèles $2Azdz$ entre les limites B et P; l'équation des moments donne l'ordonnée z_1 du centre de poussée :

$$z_1 \times \int_0^a 2Azdz = \int_0^a 2Az^2dz,$$

ou bien

$$z_1 \times Aa^2 = \frac{2}{3}Aa^3,$$

ou enfin

$$z_1 = \frac{2}{3} a.$$

Le centre de poussée est donc dans ce cas situé aux deux tiers de la hauteur BP à partir du haut.

Pour la paroi entière, le centre de poussée serait au tiers de AD à partir du point A.

Ce résultat est exactement celui qu'on trouverait pour un liquide pressant la paroi BA. Seulement dans le cas d'un massif de terre, la poussée fait avec la paroi un angle égal à $90° - \varphi'$, tandis que la poussée d'un liquide ferait avec la paroi un angle droit.

338. Dans les travaux publics, il arrive généralement que la masse de terre à soutenir est profilée suivant une ligne droite; on connaît alors immédiatement, par le théorème précédent, le point de passage de la résultante de la poussée sur une hauteur quelconque de mur. Dans les travaux du génie militaire, au contraire, les murs de revêtement soutiennent presque toujours des surcharges de terre qui compliquent beaucoup la recherche du centre de poussée, parce que les figures successives que l'on obtient en relevant le point A le long de AB, ne sont plus alors semblables à elles-mêmes. On doit suivre dans ce cas la méthode générale, et répéter la construction de l'épure pour un certain nombre de points A, pris à égale distance sur la paroi AB.

Dans tous les cas, on peut parvenir à connaître les poussées exercées sur des éléments plus ou moins grands de cette paroi, et, par suite, on peut construire la courbe des pressions dans le mur, pour vérifier si les conditions de la stabilité sont remplies. Il suffit pour cela de composer, à partir du haut du mur, la première poussée élémentaire avec le poids de la portion de maçonnerie à laquelle elle est appliquée; de composer ensuite la résultante avec la seconde poussée et le poids de la seconde portion, et ainsi de suite jusqu'à la base du mur. La stabilité du mur est assurée si la courbe des pressions ne sort pas de l'épaisseur de la maçonnerie, si elle ne

Fig. 287.

coupe pas les joints sous des angles moindres que le complément de l'angle du frottement de pierre sur pierre, si enfin elle ne donne pas de trop grandes pressions sur les arêtes et sur le plan de la fondation.

EXPÉRIENCE DE M. ARDANT SUR LE POINT DE PASSAGE DE LA POUSSÉE.

339. M. Ardant a décrit dans un mémoire sur la poussée des terres (*Mémorial du génie*, 1848) une expérience qui met en évidence l'influence du frottement des terres et du mur de soutenement.

Sur une table horizontale PQ, on pose horizontalement l'arête C d'un prisme triangulaire en bois, profilé en CAB et qui remplacera le mur. L'angle BAC est droit; on place ce prisme de telle manière que la médiane CI soit verticale, et on a construit le triangle sous la condition que l'angle ICA soit égal à 35°, angle du talus naturel du sable siliceux sec. Le côté AC est appuyé latéralement au massif QCAH, qui fait corps avec la table. Dans cette position, le prisme, ayant son centre de gravité sur CI, est dans un équilibre instable, et le moindre ébranlement suffit pour qu'il se renverse en tournant de droite à gauche autour de l'arête C.

Fig. 288.

La face AB est recouverte d'une petite couche de gomme, saupoudrée de sable; cette précaution a pour but de rendre l'angle φ' du frottement des terres sur le mur, égal à l'angle φ du frottement des terres sur elles-mêmes (1).

---

(1) Latéralement, le prisme de bois et le massif de sable sont limités par deux piliers fixes, et pour empêcher les pertes de sable à travers les interstices, sans nuire à la liberté que doit conserver le prisme de tourner autour de l'arête C, on remplit les joints avec du saindoux.

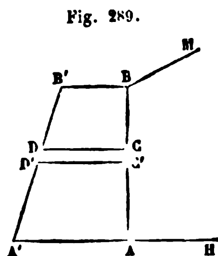
On verse alors du sable derrière la face AB jusqu'au niveau BM ; et l'on constate que lorsque le mur est ainsi chargé, son équilibre devient stable.

Ce phénomène s'explique en observant que la poussée du sable sur le mur passe en un point compris entre les points A et I ; si elle était normale à la face AB, comme le supposaient les anciens auteurs, Coulomb, de Prony, Français, elle tendrait à faire tourner le prisme autour du point C, et le prisme se renverserait à gauche; mais elle fait avec la face AB un angle égal à $90° - \varphi$, c'est-à-dire qu'elle est parallèle à la médiane CI, ou qu'enfin elle est verticale. Elle passe donc à droite du point C, et empêche le prisme de basculer pour se coucher sur sa face CB.

CONSTRUCTION DE LA COURBE DES CENTRES DE PRESSION DANS UN MUR SOUTENANT DES TERRES.

340. Nous supposerons que la face AB du mur soit verticale, et que le massif de terre se termine à une droite indéfinie BM. Le profil du mur ABB'A' est donné, et on propose d'y tracer la courbe des centres de pression.

Fig. 289.



Comptons les ordonnées $BC = z$ à partir du point B, dans le sens BA.

Nous allons exprimer l'équilibre d'une tranche infiniment mince CDD'C' du mur, comprise entre deux plans horizontaux infiniment voisins, définis par les abscisses z et $z + dz$.

La poussée totale sur la longueur BC est représentée par l'expression Az^2, et par suite la poussée totale sur CC' est égale à $2Az dz$. Elle fait un angle φ' avec la normale à la face AB; elle a donc pour composante horizontale

$$2Az dz \times \cos \varphi',$$

et pour composante verticale, dirigée de haut en bas ,

$$2Azdz \sin \varphi'.$$

La face CD reçoit la pression des assises supérieures ; soit I (Fig. 290) le point de passage de cette pression, F sa composante horizontale, P sa composante verticale ; soit y la distance IC, ordonnée de la courbe des centres de pression ; soit enfin u la longueur CD, ordonnée de la face B'A' du mur.

L'élément CDD'C' est sollicité par les forces suivantes :

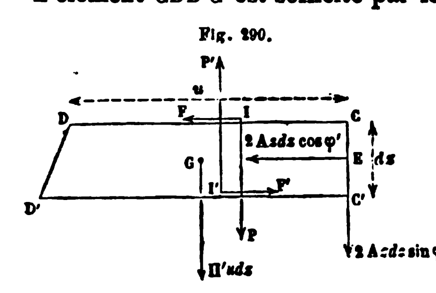


Fig. 290.

1° Sur la face CC', la poussée des terres que nous avons déjà évaluée, et qui s'applique au milieu E de l'intervalle CC' ;

2° La réaction des parties supérieures à CD ; elle se décompose en deux forces, F et P, appliquées au point I ;

3° La réaction des parties inférieures à C'D' ; elle s'applique en un point I', défini par son ordonnée $y + dy$, et se décompose en deux forces,

$$F' = F + dF, \quad P' = P + dP;$$

les forces F' et P' sont dirigées en sens contraire de F et P.

4° Enfin, le poids de l'élément, que nous représenterons par $\Pi' udz$, Π' étant le poids de l'unité de volume de la maçonnerie ; cette force est appliquée au centre de gravité de l'aire CDD'C', ou à la moitié de la distance $CD = u$.

L'équilibre est exprimé par les trois équations suivantes :

Composantes verticales :

$$(1) \qquad dP = \Pi' udz + 2Azdz \sin \varphi';$$

Composantes horizontales :

$$(2) \qquad dF = 2Azdz \cos \varphi';$$

Moments par rapport au point E :

$$(P + dP)(y + dy) - Py - F\frac{dz}{2} - (F + dF)\frac{dz}{2} - \Pi'\frac{u^2}{2}dz = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(3) \qquad ydP + Pdy - Fdz - \frac{1}{2}\Pi' u^2 dz = 0.$$

De l'équation (2) on tire

$$F = Az^2 \cos\varphi',$$

sans constante, parce que $z = 0$ doit donner $F = 0$.

L'équation (1) donne aussi P au moyen d'une quadrature :

$$P = \int_0^z (\Pi' u + 2Az\sin\varphi')dz = Az^2\sin\varphi' + \Pi'\int_0^z udz.$$

L'équation (3) va nous donner y, c'est-à-dire l'ordonnée du centre de pression. Observons que $ydP + Pdy$ est la différentielle de Py; il vient donc, en intégrant,

$$Py = \int_0^z Fdz + \frac{1}{2}\Pi'\int_0^z u^2 dz,$$

ou, remplaçant F par sa valeur $Az^2\cos\varphi'$, et effectuant l'intégration,

$$Py = \frac{1}{3}Az^3\cos\varphi' + \frac{1}{2}\Pi'\int_0^z u^2 dz.$$

L'équation de la courbe des centres de pression est donc

$$y = \frac{\frac{1}{3}Az^3\cos\varphi + \frac{1}{2}\Pi'\int_0^z u^2 dz}{Az^2\sin\varphi + \Pi'\int_0^z udz}.$$

Les quadratures sont faciles à faire lorsque la forme du mur est donnée ; car u est alors connu en fonction de z.

Si au lieu de terres, le mur soutient une charge d'eau, on doit faire $\varphi' = 0$; en même temps, $A = \frac{\Pi}{2}$, Π étant le poids de l'unité de volume d'eau. L'équation de la courbe des centres de pression devient dans ce cas :

$$y = \frac{\frac{1}{6}\Pi z^3 + \frac{1}{2}\Pi' \int_0^z u^2 dz}{\Pi' \int_0^z u dz}.$$

341. Supposons, par exemple, que le mur soit à faces parallèles. Alors u sera constant, et l'équation de la courbe des centres de pression sera

$$y = \frac{1}{6}\frac{\Pi}{\Pi'}\frac{z^2}{u} + \frac{1}{2}u,$$

équation d'une parabole KL, qui part du milieu K de la base supérieure du mur. Pour que les conditions de stabilité soient satisfaites, il est nécessaire que y soit partout moindre que u; si donc on fait $z = h$, hauteur totale du mur, il faut qu'on ait

Fig. 291.

$$\frac{1}{6}\frac{\Pi}{\Pi'}\frac{h^2}{u} + \frac{1}{2}u < u,$$

ce qui donne

$$h < u \times \sqrt{\frac{3\Pi'}{\Pi}},$$

ou bien

$$u > h\sqrt{\frac{\Pi}{3\Pi'}}.$$

Cette condition n'est pas suffisante, mais elle est nécessaire.

Si l'on fait $\Pi = 1\,000$ kil., et $\Pi' = 2\,500$ kil., ce qui convient à l'eau et à la maçonnerie, on a pour condition de stabilité du mur

$$u > h\sqrt{\frac{1000}{3 \times 2500}},$$

ou

$$\frac{u}{h} > 0,36.$$

342. Supposons encore qu'on donne à la face B'A' un fruit extérieur, et que u_0 étant la base BB', la largeur u varie suivant la loi représentée par l'équation

$$u = u_0 + nz,$$

n étant un nombre constant; on aura

$$\int_0^z udz = u_0 z + \frac{1}{2} nz^2,$$

$$\int_0^z u^2 dz = u_0^2 z + u_0 nz^2 + \frac{1}{3} n^2 z^3.$$

L'équation de la courbe sera alors

$$y = \frac{1}{2}\frac{\Pi}{\Pi'}\frac{z^3}{u_0 z + \frac{1}{2}nz^2} + \frac{1}{2}\frac{u_0^2 z + u_0 nz^2 + \frac{1}{3}n^2 z^3}{u_0 z + \frac{1}{2}nz^2} = \frac{1}{6}\frac{\Pi}{\Pi'}\frac{z^2}{u_0 + \frac{nz}{2}} + \frac{1}{2}\frac{u_0^2 + u_0 nz + \frac{1}{3}n^2 z^2}{v_0 + \frac{nz}{2}},$$

équation d'une hyperbole qui part du point $\left(z = 0,\ y = \frac{1}{2} u_0\right)$, ou du milieu K de la base supérieure BB'.

ÉQUILIBRE D'UN MUR VERTICAL SOUTENANT UN MASSIF DE TERRE PROFILÉ SUIVANT LE TALUS NATUREL.

343. Nous supposerons $\varphi = \varphi'$.

Soit AB la face interne du mur, que nous supposerons verticale;

BM, le talus indéfini des terres;

AM, une droite faisant l'angle MAH $= \varphi$ avec l'horizontale AH;

La droite AM sera parallèle à BM.

La construction de Poncelet consiste à faire l'angle $OAB = \varphi + \varphi'$, c'est-à-dire $= 2\varphi$. Or si nous abaissons AI perpendiculairement à BM, l'angle $IAB = \varphi$. Doublant cet angle, on aura la droite OA, et la poussée oblique $\frac{Q}{\cos\varphi}$ sera donnée par la formule

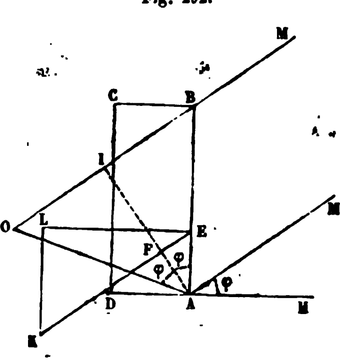


Fig. 292.

$$\frac{Q}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\Pi \sin OAM \times \overline{AO}^2,$$

ou bien, puisque $AB = AO$, et que $OAM = 90° + \varphi$,

$$\frac{Q}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\Pi \cos\varphi \times \overline{AB}^2;$$

on en déduit :

$$Q = \frac{1}{2}\Pi \overline{AB}^2 \times \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\Pi \times \overline{AI}^2.$$

La composante normale $Q = EL$ de la poussée est donc égale à la poussée totale qui serait exercée sur la paroi AI par un liquide dont le poids spécifique serait Π, si la verticale avait la direction AI. Les deux poussées totales ont d'ailleurs une seule et même direction; car l'une EK passe au point E, tiers de la hauteur AB, et fait avec la normale EL un angle $LEK = \varphi$; l'autre est la normale à AI, et passe par le tiers F de cette longueur AI. Donc elle coïncide avec la direction de la poussée cherchée $EK = \frac{Q}{\cos\varphi}$.

Prenant sur l'horizontale EL une longueur égale à $\frac{1}{2}\Pi \times \overline{AI}^2$, il suffira de mener la verticale LK par le point L, jusqu'à la rencontre de EK, normale à AI; la longueur EK ainsi déterminée représentera la poussée totale $\frac{Q}{\cos\varphi}$.

Faisons $AB = H$.

La largeur $AD = u$ du mur doit être telle que le mur ne bascule

pas sous cette poussée autour de son arête extérieure D.

Π' étant le poids du mètre cube des matériaux du mur, le moment du poids du mur, par rapport à l'arête D, est $\Pi' u H \times \frac{u}{2}$.

La poussée $EK = \frac{Q}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\Pi H^2 \cos\varphi$ a une composante verticale $\frac{1}{2}\Pi H^2 \cos\varphi$, dont le bras de levier est u; cette composante tend à appliquer le mur sur sa base AD; son moment s'ajoute donc au moment du poids. L'autre composante est horizontale; elle a pour valeur $\frac{1}{2}\Pi H^2 \cos^2\varphi$, et pour bras de levier $\frac{H}{3}$. Elle tend à renverser le mur.

L'équilibre exige qu'on ait l'inégalité

$$\Pi' u H \times \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\Pi H^2 \cos\varphi \sin\varphi \times u > \frac{1}{2}\Pi H^2 \cos^2\varphi \times \frac{H}{3}.$$

La limite inférieure de u est la valeur qui rend les deux membres égaux, c'est-à-dire qui satisfait à l'équation

$$u^2 + \frac{\Pi}{\Pi'} H \cos\varphi \sin\varphi \times u - \frac{\Pi}{3\Pi'} H^2 \cos^2\varphi = 0.$$

On trouve pour cette limite, en prenant la racine positive,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\Pi}{2\Pi'} H \cos\varphi \sin\varphi + \sqrt{\left(\frac{\Pi}{2\Pi'} H \cos\varphi \sin\varphi\right)^2 + \frac{\Pi}{3\Pi'} H^2 \cos^2\varphi} \\ &= \frac{\Pi}{\Pi'} H \cos\varphi \left(-\frac{\sin\varphi}{2} + \sqrt{-\frac{\sin^2\varphi}{4} + \frac{\Pi'}{3\Pi}}\right). \end{aligned}$$

Cette valeur est la limite inférieure de l'épaisseur nécessaire; si on l'adoptait, la courbe des pressions passerait au point D, et il y aurait écrasement en ce point. Il convient donc de grossir cette limite en la multipliant par un certain coefficient de stabilité, qu'on prendra, par exemple, égal à $\frac{4}{3}$.

Si l'on suppose

$$\varphi = 35°$$

et

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{2}{3},$$

on trouve pour limite inférieure de $\frac{u}{H}$ le rapport 0,26, et pour limite pratique

$$0,26 \times \frac{4}{3} = 0,34.$$

ÉPAISSEUR DES MURS DE REVÊTEMENT AVEC SURCHARGE DE TERRE.

344. Poncelet a donné, dans son ***Mémoire sur la stabilité des revêtements***, une table qui fait connaître l'épaisseur d'un mur destiné à soutenir une charge de terre. Nous reproduisons ici cette table, dont les constructeurs ont fréquemment à se servir.

Soit H la hauteur du mur, supposé vertical sur ses deux faces;

h la hauteur de la surcharge au-dessus du niveau du sommet du mur;

Π' le poids de l'unité de volume de la maçonnerie du mur;

Π le poids de l'unité de volume de terres;

f le coefficient du frottement de terre sur terre ou la tangente de l'angle φ; on admet que l'angle φ' est égal à l'angle φ;

b la *berme*, ou la distance laissée libre entre l'arête extérieure du mur à son sommet et le pied du talus de la surcharge.

Fig. 293.

L'épaisseur du mur *u* sera donnée par le tableau suivant :

RAPPORT de la hauteur de la surcharge h à la hauteur du mur H	RAPPORT DE L'ÉPAISSEUR DU MUR u A LA HAUTEUR H											
	pour $\frac{\Pi'}{\Pi} = 1$				pour $\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{3}{2} = 1,50$		pour $\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{5}{3} = 1,667$					
	$f = 0,6$ $\varphi = \varphi' = 31°$		$f = 1,4$ $\varphi = \varphi' = 51°25'$		$f = 1$ $\varphi = \varphi' = 45°$		$f = 0,6$ $\varphi = \varphi' = 31°$		$f = 1,4$ $\varphi = \varphi' = 54°25'$			
	$b = 0$	$b = 0,2H$	$b = 0$	$b = 0,2H$	$b = 0$	$b = 0,2H$	$b = 0$	$b = 0,2H$	$b = 0$	$b = 0,2H$		
0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,350	0,350	0,198	0,198		
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,393	0,393	0,272	0,229		
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,439	0,445	0,249	0,262		
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,532	0,522	0,303	0,299		
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,617	0,572	0,360	0,328		
0,8	0,867	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,668	0,610	0,418	0,357		
1	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,707	0,636	0,457	0,384		
2	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,811	0,705	0,622	0,475		

345. On trouve dans cette table les valeurs convenables du rapport $\frac{u}{\Pi}$, en fonction du rapport $\frac{h}{H}$ et des autres éléments, $\frac{\Pi'}{\Pi}$, f et b; si les valeurs de ces rapports ne sont pas comprises parmi les données de la table, on aura recours aux interpolations.

La formule suivante,

$$u = 0{,}845\,(H + h)\sqrt{\frac{\Pi}{\Pi'}} \times \text{tang}\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right),$$

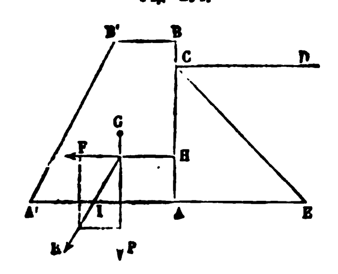
donne approximativement les mêmes valeurs que la table; si l'on calcule la valeur de u par cette formule en faisant $\varphi = 45°$ et $\frac{\Pi'}{\Pi} = 1{,}50$, on trouve $u = 0{,}285\,(H + h)$. Lorsqu'il n'y a pas de surcharge, on prend ordinairement $u = \frac{1}{3}$ H. Pour les murs de quai à la mer, il est prudent de faire $u = 0{,}40$ H.

Poncelet a aussi donné dans son mémoire des tables qui abrégent le calcul de la poussée totale, $\frac{Q}{\cos\varphi'}$.

REMARQUE SUR LES MURS DE RÉSERVOIRS.

346. Soit ABB'A' le profil transversal d'un mur de réservoir, soutenant les eaux sur sa face verticale AB. L'autre face B'A' présente une certaine inclinaison.

Prenons sur l'horizontale du point A une longueur AE = AC. La poussée de l'eau sera appliquée au point H au tiers de la hauteur AC, et elle sera représentée par le poids du triangle d'eau EAC, ou $\frac{1}{2}\Pi h^2$, en appelant Π le poids du mètre cube d'eau, et h la hauteur AC.



Le poids du mur peut être supposé

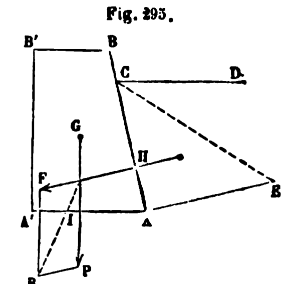
appliqué au centre de gravité G du trapèze ABB'A', et il est égal à $\frac{\Pi'}{2} H \times (b+b')$, b et b' étant les bases, AA' et BB', du profil, H sa hauteur. et Π' le poids du mètre cube de maçonnerie.

Si la résultante R des forces F et P vient couper la base en un point I, voisin du milieu de AA', la pression sera répartie à peu près également sur la fondation du mur.

Le fruit donné au mur sur la face A'B' rapproche, à égalité de surface transversale, le centre G de la face BA, et l'éloigne de l'arête A'; cette inclinaison contribue donc à égaliser les pressions dans le plan de la base.

Si au contraire la face inclinée du mur était celle sur laquelle s'exerce la poussée de l'eau, le fruit, à égalité de surface, rapprocherait de l'arête A' le point de passage, I, de la résultante des forces F et P, et par suite la répartition des pressions sur la base AA' serait très-inégale, et il pourrait y avoir écrasement des matériaux au point A'.

Fig. 295.



347. Lorsqu'un mur de réservoir reçoit la poussée de l'eau sur l'une de ses faces, on détermine ordinairement les sections transversales de ce mur de manière que chacune résiste à la poussée individuelle qu'elle reçoit; alors le mur résiste, pour ainsi dire, à la façon d'un barrage à aiguilles. Lorsque la vallée qu'on se propose de fermer par un mur est très-étranglée à l'aval, on peut adopter une autre solution, et donner à ce mur, en plan, la forme d'une voûte, dont les *sections horizontales* résistent individuellement à la poussée de l'eau; le mur résiste alors à la manière d'un *barrage à poutrelles.* Dans certains cas, cette seconde solution peut être plus économique que la première.

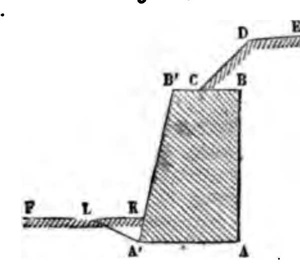
BUTÉE DES TERRES.

348. Poncelet a donné le nom de *butée des terres* à la résistance qu'un mur de revêtement éprouverait, s'il cédait à la poussée du massif qu'il supporte, de la part des terres qui sont situées au pied de ce mur, sur sa face extérieure.

Le mur ABB'A', par exemple, reçoit la poussée des terres profilées en CDE, et *bute* contre les terres FK, qui s'élèvent sur la hauteur A'K de la face extérieure du mur.

Poncelet a appliqué à la butée des terres les principes qui lui ont servi à résoudre le problème de la poussée; il a admis que lorsque le mur se déplace latéralement sous l'action de la poussée du massif CDE, un prisme A'LK des terres butantes tend à remonter le long du plan A'L; et il a cherché l'inclinaison à attribuer à ce plan pour que la résistance correspondante, opposée au déplacement du mur, soit la plus petite possible. Ce minimum une fois déterminé peut servir à calculer la réduction d'épaisseur qu'il convient de donner à la maçonnerie pour tenir compte du surcroît de stabilité fourni par la présence des terres en FK.

Fig. 296.



Cette théorie ingénieuse repose sur une hypothèse que l'observation ne vérifie pas. Lorsqu'un mur cède à la poussée des terres, on remarque que le massif de terre se disjoint à peu près suivant un plan incliné passant par l'arête A la plus basse, ce qui est d'accord avec les suppositions qui servent de base à la théorie de la poussée. Mais on ne remarque pas que les terres butantes se séparent pour remonter le long d'un plan incliné passant par l'arête A' du mur; tantôt elles se compriment, tantôt elles glissent sans se diviser, tantôt elles maintiennent immobile le pied du mur, et

contribuent ainsi à le faire basculer autour de l'arête A'. Il serait donc bien difficile de traiter la question de la butée dans toute sa généralité, et il est plus sûr de ne pas chercher dans la butée une raison de réduire les dimensions du mur. La présence des terres butantes augmentera la stabilité du revêtement, calculé pour résister à la poussée des terres qu'il soutient.

SUPPLÉMENT AU LIVRE IV.

RÉPARTITION DES PRESSIONS DANS UN MASSIF INDÉFINI EN UN SENS DE TERRE SANS COHÉSION (1).

349. *Distribution des pressions autour d'un point* O.

Fig. 297.

Par le point O, ou plutôt par la droite projetée sur la figure en ce point, menons deux plans rectangulaires OX, OY; leur intersection projetée en O est parallèle à la dimension indéfinie du massif; coupons ce massif par un plan AB, mené, parallèlement à cette intersection, à une distance infiniment petite du point O, et écrivons les équations d'équilibre du système prismatique compris sous les trois faces AB, BO, OA.

Les forces qui agissent sur ce système sont les pressions totales du milieu environnant, et la force extérieure appliquée directement aux molécules comprises sous ces trois plans; mais les pressions sont proportionnelles aux surfaces sur lesquelles elles s'exercent, tandis que la force extérieure est proportionnelle au volume du prisme, lequel est infiniment petit par rapport aux surfaces, quand on fait décroître indéfiniment les dimensions AO et OB. Dans nos équations d'équilibre, nous n'avons donc pas à tenir compte de la force extérieure. (Cf. *Hydraulique*, § 5.)

La pression totale qui s'exerce sur une face quelconque OA n'est pas nécessairement normale à cette face; mais elle est décomposable en deux forces, l'une N_1 normale, l'autre T tangentielle, chacune de ces composantes représentant la force rapportée à l'unité de surface (ou à l'unité de longueur mesurée dans le plan de la figure, en admettant que le prisme ait perpendiculairement à ce plan une longueur égale à l'unité).

De même, sur la face OB, nous aurons, par unité de surface, une force normale N_2 et une force tangentielle T. Cette force tangentielle est égale à celle qui agit sur la

---

(1) Théorie de M. Maurice Lévy, ingénieur des ponts et chaussées (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 21 juin 1869). — Voir sur le même sujet dans les *Annales des ponts et chaussées*, année 1870, un article de M. Considère, et année 1873, un article de M. Flamant, résumant les recherches de Rankine. On peut consulter sur la question un travail de M. Cesare Ceradini, intitulé : *Esposizione elementare della teoria dell' equilibrio delle terre prive di coesione*. (Extrait du *Politecnico*, vol. XXIII.)

face OA, en vertu du principe indiqué dans la note de la page 202; car les deux faces OA et OB forment entre elles un angle droit.

Sur la face oblique AB, nous aurons une composante normale N' et une tangentielle T', que nous pouvons déterminer en fonction de N_1, N_2 et T, en employant les équations d'équilibre des forces projetées sur les axes OX et OY.

Soit $BAX = \alpha$; la force T' fait avec l'axe OX un angle égal à α, et avec l'angle OY un angle $\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; la force N', normale à T', fait avec les mêmes axes des angles $-\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ et α.

Soit $AB = a$; nous aurons

$$OA = a\cos(\pi - \alpha),$$
$$OB = a\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

et les équations des projections des forces deviennent, parallèlement à l'axe OX,

$$N_2 \times a\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + T \times a\cos(\pi - \alpha) + N'a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + T'a\cos\alpha = 0,$$

et parallèlement à l'axe OY,

$$N_1 \times a\cos(\pi - \alpha) + T \times a\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + N'a\cos\alpha + T'a\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

ou bien, en supprimant le facteur a et en réduisant,

$$N_2\sin\alpha - T\cos\alpha - N'\sin\alpha + T'\cos\alpha = 0,$$
$$T\sin\alpha - N_1\cos\alpha + N'\cos\alpha + T'\sin\alpha = 0,$$

équations qu'on peut résoudre par rapport à N' et T'.

Il vient

$$N' = N_1\cos^2\alpha + N_2\sin^2\alpha - 2T\cos\alpha\sin\alpha,$$
$$(1) \qquad T' = (N_1 - N_2)\sin\alpha\cos\alpha + T(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

De ces relations on tire les conséquences suivantes :

1° On peut toujours trouver deux directions rectangulaires suivant lesquelles l'effort tangentiel T' soit nul.

Il suffit en effet de poser

$$(N_1 - N_2)\sin\alpha\cos\alpha + T(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{2}(N_1 - N_2)\sin 2\alpha + T\cos 2\alpha = 0,$$

ce qui donne

$$(2) \qquad \operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{2T}{N_1 - N_2}.$$

A cette valeur de tang 2α correspondent deux arcs compris entre zéro et 2π, et différant entre eux de la demi-circonférence; ce qui fait pour α deux valeurs comprises entre zéro et π, et différant de $\frac{\pi}{2}$.

En chaque point du massif passent deux éléments rectangulaires le long desquels les pressions sont normales. Les courbes, ou plutôt les surfaces, le long desquelles cette propriété a lieu sont appelées *isostatiques* ou *orthopiésiques*. Le long de ces surfaces, le massif a la principale propriété des fluides en repos, de développer des pressions normales aux éléments sur lesquels elles s'exercent.

2° En chaque point, le rapport $\frac{T'}{N'}$ change avec l'angle α, et sa valeur absolue passe par un maximum, qui ne peut être supérieur, dans un massif en équilibre, à la valeur $f = \text{tang}\,\varphi$ du coefficient du frottement des terres, car la résistance au glissement ne croît pas au delà de la limite fN. On se placera donc dans la condition la plus défavorable à la stabilité du massif, en supposant que ce rapport atteigne sa valeur absolue la limite f.

Pour chercher les directions suivant lesquelles $\frac{T'}{N'}$ a sa plus grande valeur, nous pouvons supposer que les axes OX, OY ont été dirigés au point O suivant les lignes pour lesquelles le frottement est nul, et faire $T = 0$ dans les équations (1); accentuant les lettres N_1 et N_2 pour distinguer leur nouvelle signification, il vient

$$(3) \qquad N' = N'_1 \cos^2\alpha + N'_2 \sin^2\alpha,$$

$$T' = \frac{1}{2}(N'_1 - N'_2)\sin 2\alpha,$$

et l'on a à déterminer la valeur de α qui rend maximum le rapport

$$(4) \qquad \frac{T'}{N'} = \frac{\frac{1}{2}(N'_1 - N'_2)\sin 2\alpha}{N'_1\cos^2\alpha + N'_2\sin^2\alpha}.$$

Abstraction faite du facteur constant $N'_1 - N'_2$, on peut mettre ce rapport sous la forme

$$\frac{1}{N'_1 \cot\alpha + N'_2 \,\text{tang}\,\alpha},$$

de sorte que le maximum cherché correspond au minimum du dénominateur

$$N'_1 \cot\alpha + N'_2\,\text{tang}\,\alpha;$$

on obtiendra la valeur de α en égalant à zéro la dérivée de cette fonction, ce qui donne

$$N'_2 \times \frac{1}{\cos^2\alpha} - N'_1 \times \frac{1}{\sin^2\alpha} = 0,$$

ou bien

$$(5) \qquad \text{tang}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{N'_1}{N'_2}}.$$

De la relation (5) on tire

$$\cos^2\alpha = \frac{N'_2}{N'_1 + N'_2}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{N'_1}{N'_1 + N'_2},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{N'_1 N'_2}}{N'_1 + N'_2}.$$

Substituant dans (4) et faisant $\frac{T'}{N'} = \pm f$, il vient

$$(6) \qquad f = \pm\frac{(N'_1 - N'_2)\sqrt{N'_1 N'_2}}{2N'_1 N'_2} = \pm\frac{1}{2}\,\frac{N'_1 - N'_2}{\sqrt{N'_1 N'_2}}.$$

Les deux directions définies par ces valeurs particulières de l'angle α sont symétriques par rapport aux lignes isostatiques. Ce sont les directions des *lignes de glissement du massif.*

Pour les déterminer dans le cas général où les axes ne sont pas dirigés suivant les lignes orthopiésiques, on remarquera qu'il suffit d'ajouter l'angle dont la tangente est égale à $\sqrt{\frac{N'_1}{N'_2}}$ à l'angle donné par l'équation (2), qui définit ces dernières lignes.

L'équation (6), qui suppose les axes dirigés d'une manière particulière, se transforme dans le cas général en y mettant pour N'_1 et N'_2 les valeurs des pressions normales suivant les mêmes directions.

Or, on peut écrire les équations (1) sous la forme

$$N' = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) + \frac{N_1 - N_2}{2}\cos 2\alpha - T\sin 2\alpha,$$

$$T' = \frac{1}{2}(N_1 - N_2)\sin 2\alpha + T\cos 2\alpha,$$

en remplaçant $\cos^2\alpha$ par $\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ et $\sin^2\alpha$ par $\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

De l'équation (2) on tire

$$\sin 2\alpha = \pm \frac{2T}{\sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}},$$

$$\cos 2\alpha = \mp \frac{N_1 - N_2}{\sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}}.$$

Donc

$$N' = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) \pm \frac{(N_1 - N_2)}{2} \times \frac{(N_1 - N_2)}{\sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}} \pm T \times \frac{2T}{\sqrt{4T + (N_1 - N_2)^2}},$$

les signes se correspondant ; ou bien

$$N' = \frac{1}{2}(N_1 + N_2) \pm \frac{1}{2}\frac{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}{\sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}} = \frac{1}{2}\left[N_1 + N_2 \pm \sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}\right].$$

Telles sont les valeurs des pressions normales suivant les deux lignes orthopiésiques. Leur différence

$$N'_1 - N'_2 \text{ est égale à } \sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2},$$

et leur moyenne propoptionnelle

$$\sqrt{N'_1 N'_2} = \frac{1}{2}\sqrt{(N_1 + N_2)^2 - 4T^2 - (N_1 - N_2)^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (6), il vient entre les trois forces N_1, N_2 et T l'équation de condition

$$(7) \qquad \frac{\sqrt{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}}{\sqrt{(N_1 + N_2)^2 - 4T^2 - (N_1 - N_2)^2}} = \pm f = \sqrt{\frac{4T^2 + (N_1 - N_2)^2}{4N_1 N_2 - 4T^2}},$$

qui exprime qu'en chaque point passent deux courbes le long desquelles le massif est sur le point de glisser.

Si l'on pose $f = \tang \varphi$, l'équation (7) devient

$$(8) \qquad 4T^2 + (N_1 - N_2)^2 - (N_1 + N_2)^2 \sin^2\varphi = 0.$$

350. *Variation des pressions d'un point à l'autre du massif.*

Fig. 298.

Prenons deux axes, l'un OX horizontal, l'autre OY vertical, et exprimons, comme on le fait en hydrostatique, l'équilibre du prisme rectangulaire indéfini projeté en ABCD, sous l'action de son poids $\Pi dx dy$, et des pressions tangentielles et normales qui agissent sur ses quatre faces.

Les composantes parallèles à OX nous donneront, en supposant que les pressions se retrouvent sur deux faces opposées, changées de signe et augmentées de leur différentielle partielle relative à la coordonnée qui varie,

$$\left[N_2 - \left(N_2 + \frac{dN_2}{dx}\,dx\right)\right]dy + T dx - \left(T + \frac{dT}{dy}\,dy\right)dx = 0,$$

ou bien en réduisant

$$(9) \qquad \frac{dN_2}{dx} + \frac{dT}{dy} = 0.$$

Les composantes parallèles à OY donnent de même

$$\left[N_1 - \left(N_1 + \frac{dN_1}{dy}\,dy\right)\right]dx + \left[T - \left(T + \frac{dT}{dx}\,dx\right)\right]\Pi dy - dx dy = 0,$$

équation qui se réduit à

$$(10) \qquad \frac{dN_1}{dy} + \frac{dT}{dx} + \Pi = 0.$$

L'équation des moments ne nous apprendrait qu'une chose que nous savons déjà, savoir que les composantes tangentielles T sont les mêmes sur les deux faces rectangulaires.

Ces deux équations (9) et (10), jointes à l'équation de condition (8), définissent analytiquement les trois fonctions N_1, N_2 et T.

La fonction T s'exprime facilement à l'aide des deux autres; car si l'on multiplie l'équation (9) par dy, l'équation (10) par dx, et qu'on ajoute, on obtient la relation générale

$$(11) \qquad dT + \Pi dx + \frac{dN_1}{dy}\,dx + \frac{dN_2}{dx}\,dy = 0;$$

dT et Πdx étant des différentielles exactes, il est nécessaire que la fonction

$$\frac{dN_1}{dy}\,dx + \frac{dN_2}{dx}\,dy$$

soit aussi intégrable, ce qui fournit la nouvelle condition

$$(12) \qquad \frac{d^2N_1}{dy^2} = \frac{d^2N_2}{dx^2}.$$

Nous ne suivrons pas M. Lévy dans l'intégration des trois équations (8), (9) et (10), et nous donnerons seulement les principaux résultats auxquels conduit son analyse.

Les surfaces de glissement, dont la théorie de Poncelet faisait des surfaces planes, sont en général des surfaces courbes. Elles sont planes cependant dans le cas particulier où le massif se termine à un talus indéfini, incliné à l'horizon d'un angle φ égal à celui du frottement. Dans ce cas, les deux théories sont d'accord.

Si le massif se termine à un plan incliné faisant avec l'horizon un angle ω moindre que φ, on obtient, pour un point quelconque situé à une profondeur verticale h au-dessous de la surface libre, les valeurs suivantes des forces N_1, N_2 et T :

$$N_1 = \frac{\Pi h}{\cos^2\varphi}(\cos^2\varphi + R\sin^2\omega),$$

$$N_2 = \frac{\Pi h \cos^2\omega}{\cos^2\varphi} R,$$

$$T = \frac{\Pi h \sin\omega\cos\omega}{\cos^2\varphi} R,$$

le facteur R étant donné par l'équation

$$R = \cos 2\omega + \sin^2\varphi - 2\cos\varphi\sqrt{\sin(\varphi+\omega)\sin(\varphi-\omega)}.$$

La poussée totale, $\frac{Q}{\cos\varphi}$, exercée sur la paroi verticale d'un mur de hauteur H par un massif dont le profil supérieur est incliné au talus-limite, a la valeur

$$\frac{Q}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\Pi H^2\cos\varphi,$$

comme l'indiquerait la théorie de Poncelet.

M. de Saint-Venant a reconnu un autre cas où il y a accord complet entre les deux théories : c'est celui où la paroi du mur est inclinée vers le dehors d'un angle $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, et où le massif est arasé horizontalement au niveau du couronnement du mur. La poussée totale a pour valeur

$$\frac{Q}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\Pi H^2\frac{\sin\varepsilon}{\cos^2\varepsilon}.$$

351. Signalons aussi le mémoire de M. Curie, commandant du génie, sur la poussée des terres. M. Curie adopte les bases des théories de Coulomb et de Poncelet, mais au lieu de chercher le maximum de la poussée totale, il cherche le maximum du moment de cette poussée par rapport à l'arête inférieure du mur autour de laquelle le renversement tend à s'opérer. Cette méthode peut conduire à une certaine augmentation de l'épaisseur des murs de soutènement. Quelle que soit la méthode suivie, les formes et les dimensions de murs adoptées par Vauban, et sanctionnées depuis par deux siècles de pratique, peuvent servir de guides et fournissent à l'art de l'ingénieur de précieux renseignements (1).

---

(1) La dépense de construction des murs n'est pas proportionnelle à leur épaisseur, car au prix du cube de la maçonnerie s'ajoute le prix des ragréments et des rejointoiements, sans compter le prix du cordon et du parapet. Concluons de là avec Dupuit (*Traité de l'équilibre des voûtes*, p. 8) qu'il n'y a pas intérêt à réduire au minimum strict l'épaisseur d'un mur de soutènement, et qu'on peut se donner à bon marché, en suivant les exemples connus, une sérieuse garantie de stabilité.

Nous nous contenterons d'en donner quelques exemples. Soient :

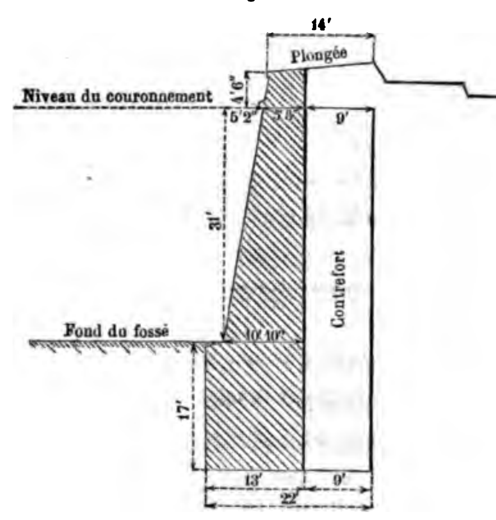
H la hauteur d'un mur, entre le plan et la fondation et le couronnement;

h la hauteur de la surcharge, c'est-à-dire du massif de la plongée au-dessus du couronnement;

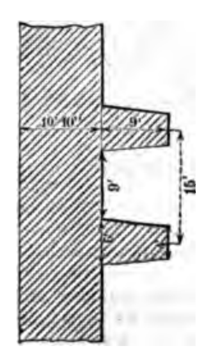
e l'épaisseur du mur en couronne.

(Cotes en pieds de Roi)

Fig. 299.



Plan à la hauteur du fond du fossé,



Les dimensions adoptées par Vauban et relevées, sur un grand nombre de ses ouvrages, sont données approximativement par la formule empirique

$$e = 0{,}18\mathrm{H} + 0{,}20h + 1^{\mathrm{m}}{,}24.$$

Le mur reçoit un fruit extérieur de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{6}$. La face interne est verticale.

Le mur est renforcé du côté des terres par des contre-forts dont la saillie est donnée par la formule

$$\frac{\mathrm{H}}{5} + 0^{\mathrm{m}}{,}65.$$

La largeur du contre-fort à sa racine est $\frac{\mathrm{H}}{10} + 0{,}65$; la queue n'a en largeur que les $\frac{2}{3}$ de cette dimension. Le contre-fort monte verticalement du haut en bas, depuis le fond de la fondation jusqu'au couronnement.

L'espacement des contre-forts d'axe en axe est généralement de 15 pieds ($4^{\mathrm{m}},80$), pour les grands murs jusqu'à 35 pieds de hauteur ($11^{\mathrm{m}},20$); Vauban le réduisait à 12 pieds ($3^{\mathrm{m}},84$) pour les petits murs, tels que les contrescarpes. Les figures ci-contre montrent le type des murs de la place d'Ypres, construite en 1699.

LIVRE HUITIÈME.

ÉQUILIBRE DE CERTAINS SYSTÈMES ARTICULÉS.

---

352. La plupart des systèmes que nous nous proposons d'étudier dans ce livre peuvent être rangés dans la classe des *systèmes articulés* où l'on suppose le frottement nul.

La charpente Polonceau, dont nous nous sommes déjà occupés (§ 131), rentre dans cette classe.

Ce qui caractérise la liaison articulée de deux corps, c'est la possibilité pour chacun de tourner sans éprouver de résistance autour d'un axe ou d'un point appartenant à l'autre. En général, l'articulation est fictive, et l'on substitue par la pensée aux assemblages rigides des différentes pièces d'un système, des liaisons articulées qui permettraient aux angles de ces pièces entre elles de varier sans développer aucune résistance. Si l'équilibre individuel des pièces est assuré avec cette condition, il le sera à plus forte raison lorsqu'on imposera au système les liaisons réelles, qui sont plus étroites que les liaisons imaginées par le calcul (1).

Nous nous occuperons spécialement dans cette partie du cours des ponts à poutre droite.

---

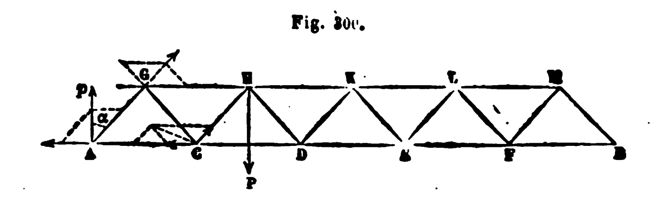
(1) Il faut toutefois que l'ajustage des pièces entre elles n'ait pas créé de tensions étrangères à la résistance de l'ensemble : autrement les efforts locaux pourraient, par suite de ce vice de construction, surpasser les efforts calculés.

CHAPITRE PREMIER.

TREILLIS SIMPLE.

353. Supposons une poutre droite formée d'un certain nombre de triangles égaux entre eux, et reposant sur deux appuis de niveau A et B.

Fig. 306.



Les côtés des triangles AC, CG, GA, GH,...... sont articulés aux sommets A, C, G,...... On suspend des poids donnés à ces sommets, et on demande la répartition des pressions dans toutes les pièces du système.

Supposons, par exemple, qu'un poids P soit suspendu au sommet H.

L'ensemble du système reposant sur deux appuis A et B, on peut déterminer par la statique les réactions verticales de ces appuis; soient p et p' les réactions de A et de B.

Considérons l'équilibre du sommet A, que l'on suppose articulé Il est soumis à trois forces : les pressions ou tensions inconnues des tiges AG, AC, qui sont dirigées suivant leurs longueurs, et la réaction p de l'appui, qui est connue de grandeur et de position. On aura donc les tensions cherchées en décomposant la force p suivant les directions AG et CA. Cette construction montre que la tige AG est

comprimée, et que sa compression est $\frac{p}{\cos\alpha}$; et que la tige AC est étendue, et que sa tension est $p \operatorname{tg}\alpha$.

La compression $\frac{p}{\cos\alpha}$ s'exerce au point G dans le sens AG, et le point G est en équilibre sous l'action des forces appliquées aux trois côtés GA, GC, GH; l'une de ces forces étant connue, on la décomposera suivant les deux autres directions, et l'on aura ainsi la compression développée suivant GH, et l'extension développée suivant GC.

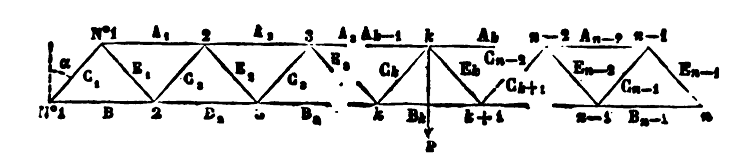
On connaîtra donc la traction exercée au point C par la tige GC; on connaît déjà la traction qui s'exerce dans la tige AC; ces deux forces ont une résultante qu'on peut déterminer de grandeur et de position, et qui, décomposée suivant les directions CH et CD, donnera les valeurs de la tension de la seconde tige et de la compression de la première. On ira ainsi de proche en proche, et la construction des parallélogrammes suffira pour trouver toutes les forces qui correspondent au poids P.

S'il y avait plusieurs poids suspendus à divers sommets, on pourrait opérer de la même manière, en prenant pour point de départ la réaction totale p sur l'appui, correspondant à l'ensemble des poids donnés; on pourrait aussi prendre séparément chaque poids, calculer la distribution des pressions correspondantes, et additionner *algébriquement* tous les résultats.

354. Lorsque les poids sont égaux, ou lorsqu'ils sont répartis suivant une loi régulière, on peut traiter le problème par le calcul et trouver des formules qui donnent directement l'effort développé dans une tige quelconque.

Supposons, par exemple, qu'il n'y ait qu'un poids appliqué au sommet supérieur N° k, conformément aux indications de la figure suivante:

Fig. 101.



Appelons A_x la tension développée dans la tige supérieure horizontale comprise entre les sommets N° x et N° $(x+1)$;

B_x, la compression développée dans la tige inférieure horizontale comprise entre les sommets N° (x) et N° $(x+1)$;

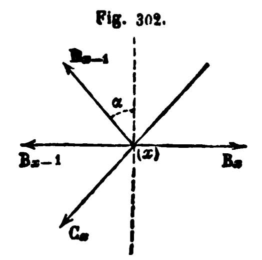
C_x, l'effort de compression développé dans la tige inclinée N° (x, x);

E_x, l'effort d'extension développé dans la tige inclinée en sens contraire [N° x, N° $(x+1)$].

Ces efforts sont pris positivement dans le cas où ils sont dirigés comme nous venons de le supposer, et négativement dans le cas contraire.

Nous aurons les équations suivantes:

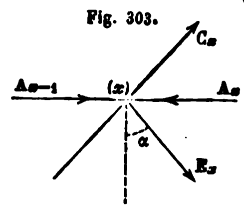
Fig. 302.



Pour l'équilibre d'un sommet inférieur quelconque N° (x) (Fig. 302), sauf les deux sommets extrêmes N° 1 et N° n, ceux-ci étant exclus à cause de la présence des forces p et p',

$$1 < x < n \quad (a) \begin{cases} B_x - B_{x-1} - (C_x + E_{x-1}) \sin \alpha = 0, & \text{composantes horizontales,} \\ E_{x-1} = C_x, & \text{composantes verticales.} \end{cases}$$

Fig. 303.



Pour l'équilibre d'un sommet supérieur quelconque (Fig. 303), sauf le sommet k, où s'applique la force P,

$$x < k,\ x > k \quad (b) \begin{cases} A_{x-1} - A_x + (C_x + E_x) \sin \alpha = 0, \\ E_x = C_x. \end{cases}$$

Dans l'application de cette formule au cas de $x=1$, il faudra convenir que A_0 sera considéré comme nul ; de même, $A_{n-1}=0$ pour $x=n-1$.

Enfin, aux points (1) et (n) du longeron inférieur et au point (k) du longeron supérieur, on aura les relations :

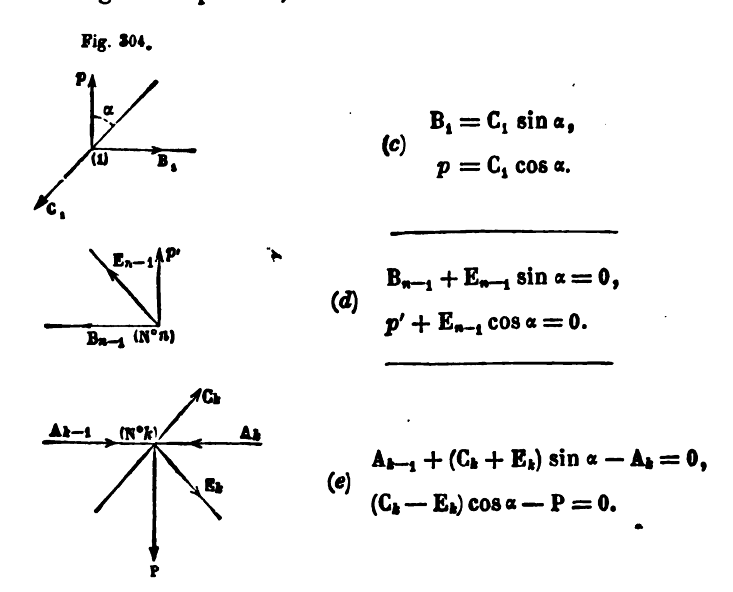


Fig. 304.

$$(c)\quad \begin{cases} B_1 = C_1 \sin\alpha, \\ p = C_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} B_{n-1} + E_{n-1} \sin\alpha = 0, \\ p' + E_{n-1} \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} A_{k-1} + (C_k + E_k) \sin\alpha - A_k = 0, \\ (C_k - E_k) \cos\alpha - P = 0. \end{cases}$$

Si l'on écrit toutes ces équations les unes à la suite des autres, pour toutes les valeurs des indices x, on aura tout ce qui est nécessaire pour la détermination des inconnues. On obtient ainsi le tableau suivant :

Sommets inférieurs.

N° 1 $\begin{cases} p = C_1 \cos\alpha \\ B_1 = C_1 \sin\alpha \end{cases}$

N° 2 $\begin{cases} E_1 = C_2 \\ B_2 - B_1 - 2C_2 \sin\alpha = 0 \end{cases}$

N° 3 $\begin{cases} E_2 = C_3 \\ B_3 - B_2 - 2C_3 \sin\alpha = 0 \end{cases}$

⋮

N° k $\begin{cases} E_{k-1} = C_k \\ B_k - B_{k-1} - 2C_k \sin\alpha = 0 \end{cases}$

N° $k+1$ $\begin{cases} E_k = C_{k+1} \\ B_{k+1} - B_k - 2C_{k+1} \sin\alpha = 0 \end{cases}$

⋮

N° $(n-1)$ $\begin{cases} E_{n-2} = C_{n-1} \\ B_{n-1} - B_{n-2} - 2C_{n-1} \sin\alpha = 0 \end{cases}$

N° (n) $\begin{cases} p' + E_{n-1} \cos\alpha = 0 \\ B_{n-1} + E_{n-1} \sin\alpha = 0 \end{cases}$

Sommets supérieurs.

N° 1 $\begin{cases} E_1 = C_1 \\ A_1 - 2C_1 \sin\alpha = 0 \end{cases}$

N° 2 $\begin{cases} E_2 = C_2 \\ A_1 - A_2 + 2C_2 \sin\alpha = 0 \end{cases}$

N° 3 $\begin{cases} E_3 = C_3 \\ A_2 - A_3 + 2C_3 \sin\alpha = 0 \end{cases}$

⋮

N° $(k-1)$ $\begin{cases} E_{k-1} = C_{k-1} \\ A_{k-2} - A_{k-1} + 2C_{k-1} \sin\alpha = 0 \end{cases}$

N° k $\begin{cases} (C_k - E_k) \cos\alpha - P = 0 \\ A_{k-1} - A_k + (C_k + E_k) \sin\alpha = 0 \end{cases}$

N° $(k+1)$ $\begin{cases} E_{k+1} = C_{k+1} \\ A_k - A_{k+1} + 2C_{k+1} \sin\alpha = 0 \end{cases}$

⋮

N° $(n-1)$ $\begin{cases} E_{n-1} = C_{n-1} \\ A_{n-2} - A_{n-1} + 2C_{n-1} \sin\alpha = 0 \end{cases}$

$(A_{n-1} = 0)$

Il résulte de ce tableau que, jusqu'au sommet supérieur N° k, les compressions C des barres qui montent de gauche à droite sont positives, égales entre elles, et égales aux tensions des barres qui descendent de droite à gauche.

Au delà du sommet supérieur (k), les compressions C deviennent négatives, et les tensions E aussi; ce qui indique que les barres $(k, k+1)$, $(k+1, k+2)$, sont comprimées, tandis que les autres

sont étendues ; et la tension des unes est égale à la compression des autres.

Les différences $B_2 - B_1$, $B_3 - B_2$,...... sont donc constantes jusqu'à $B_k - B_{k-1}$; elles sont égales à $2C_1 \sin\alpha$; de sorte que B_1, B_2...... B_k forment une progression arithmétique, dont le premier terme est $C_1 \sin\alpha = p \operatorname{tg}\alpha$, et la raison, $2C_1 \sin\alpha = 2p \operatorname{tg}\alpha$: on a donc

$$B_x = p \operatorname{tg}\alpha + 2p \operatorname{tg}\alpha \times (x-1) = (2x+1) p \operatorname{tg}\alpha,$$

pour toute valeur entière de x de $x = 1$ à $x = k$.

On a de même

$$A_2 - A_1 = A_3 - A_2 = A_4 - A_3 = \ldots\ldots = A_{k-1} - A_{k-2} = 2C_1 \sin\alpha = 2p \operatorname{tg}\alpha,$$

ce qui donne une progression arithmétique pour les forces A_1, A_2...... A_{k-1}; par suite

$$A_x = 2C_1 \sin\alpha + (x-1) \times 2p \operatorname{tg}\alpha = 2p \operatorname{tg}\alpha \times x$$

pour toutes valeurs de x de $x = 1$ à $x = k - 1$.

Les valeurs successives de B jusqu'à B_k sont donc proportionnelles aux nombres impairs, et les valeurs de A, jusqu'à A_{k-1}, aux nombres pairs : la distribution des efforts dans les différentes parties des longerons est représentée sur la figure suivante :

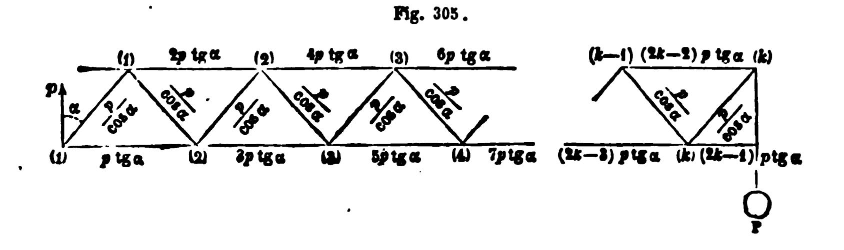


Fig. 305.

Pour l'autre partie de la poutre, on aurait une distribution analogue, dans laquelle figurerait la portion p' du poids P qui porte sur la seconde culée.

Il est à remarquer qu'une compression égale à

$$(2k-1)p \operatorname{tg} \alpha$$

est développée dans la section k du longeron supérieur où se réunissent les deux régions de la poutre.

Exemple d'un treillis composé de sept triangles, et chargé au second sommet supérieur :

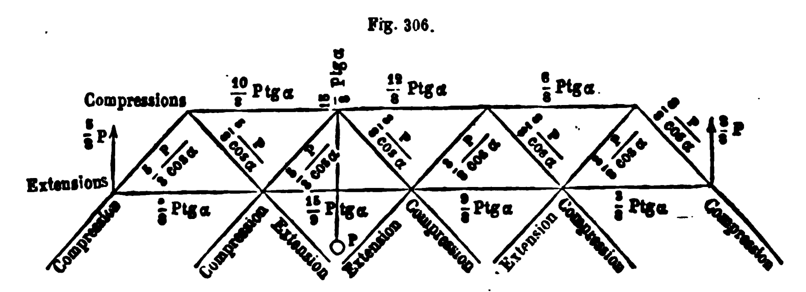


Fig. 306.

On traiterait par une méthode semblable le problème dans lequel le poids P serait suspendu à un sommet inférieur.

Le viaduc de Crumlin, en Angleterre, est construit dans ce système de treillis à grandes mailles.

La distribution des efforts est ici complétement définie, sans qu'on ait recours à d'autre hypothèse que celle de la libre articulation en tous les sommets.

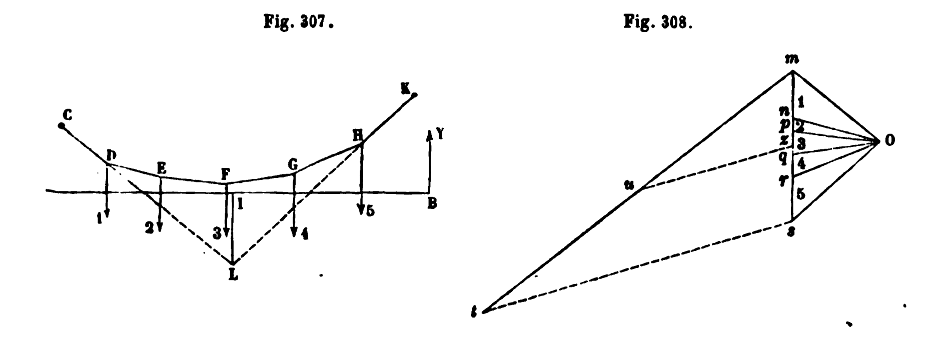
Pour trouver la déformation de la poutre, on n'aurait qu'à calculer successivement les extensions des pièces étendues, et les compressions des pièces comprimées, puis à construire la série des triangles juxtaposés qui composent la poutre en se servant pour cette construction des nouvelles longueurs de leurs côtés.

Si au lieu d'un poids unique suspendu à l'un des sommets des triangles successifs, il y en avait plusieurs répartis entre divers sommets, on pourrait traiter chaque poids isolément, et additionner ensuite algébriquement les efforts correspondants dans chaque barre. On pourrait aussi traiter la question directement pour l'ensemble des poids, en partant d'une culée, et en faisant à chaque sommet la décomposition des forces suivant les côtés aboutissant à ce sommet.

RECHERCHE GRAPHIQUE DE LA RÉPARTITION DES TENSIONS DANS LES SYSTÈMES ARTICULÉS.

355. Nous supposerons que le système articulé dont il s'agit soit formé de triangles juxtaposés, de sorte qu'il ne soit soumis à d'autres déformations que celles qui proviennent de l'élasticité des pièces. On obtient ainsi les systèmes matériels appelés par les Anglais *Frames* ou *Frameworks*, par les Allemands *Fachwerke*, et par les Italiens *Travature reticolari;* nous l'appellerons, à l'exemple de ces derniers, *travées réticulées*. Nous supposerons en outre que des forces extérieures données sont appliquées aux sommets de ce système articulé, et que les réactions des appuis, appliquées en deux autres sommets déterminés, les tiennent en équilibre. Un tel système présente, au point de vue du calcul, un avantage important : les tensions et les pressions des différentes pièces sous l'action de forces extérieures données sont déterminées par les simples lois de la statique, indépendamment de toute hypothèse sur le jeu des forces élastiques. A cet avantage correspond un inconvénient pratique : la stabilité de l'ensemble est entièrement compromise si une pièce quelconque vient à être coupée.

La première recherche à faire consiste à déterminer les réactions des appuis. Supposons, pour fixer les idées, que les forces qui agissent sur la travée réticulée soient verticales, et que les réactions



doivent l'être aussi ; c'est ce qui a lieu le plus souvent dans les applications. Une construction graphique très-simple peut conduire à la détermination de ces réactions inconnues.

Imaginons un polygone funiculaire tenant en équilibre les poids donnés (1), (2), (3), (4) et (5). Pour tracer un tel polygone funiculaire, on commencera par construire le polygone auxiliaire de Varignon, en portant sur une verticale indéfinie des segments successifs, $mn = (1)$, $np = (2)$ $pq = (3)$,....., et en joignant les points m, n, p, q..... à un même point O. Les droites Om, On, Op,....., seront parallèles aux côtés successifs du polygone funiculaire, et seront proportionnelles aux tensions de ces côtés. On construira donc le polygone funiculaire en menant les droites

CD, DE, EF, FG, GH, HK,

respectivement parallèles aux droites

Om, On, Op, Oq, Or, Os,

et se coupant sur les directions successives des lignes représentatives des poids (1), (2),....., (5).

Cela posé, les tensions des côtés extrêmes CD, HK font équilibre à l'ensemble des poids intermédiaires, et par suite, ces côtés prolongés se coupent en un point L qui appartient à la verticale passant par le centre de gravité du poids total P, somme des poids donnés. Projetons le point L en I sur la droite qui joint les deux appuis A et B. Les réactions X et Y seront déterminées par la double condition que leur somme soit égale au poids P, qui est représenté sur l'épure par la droite ms, et que leur rapport soit l'inverse du rapport des segments adjacents AI, IB. Par le point m menons une droite quelconque, sur laquelle nous porterons bout à bout $mu = \mathrm{BI}$ et $ut = \mathrm{IA}$. Joignons ts, et menons uz parallèle à cette droite ; nous aurons

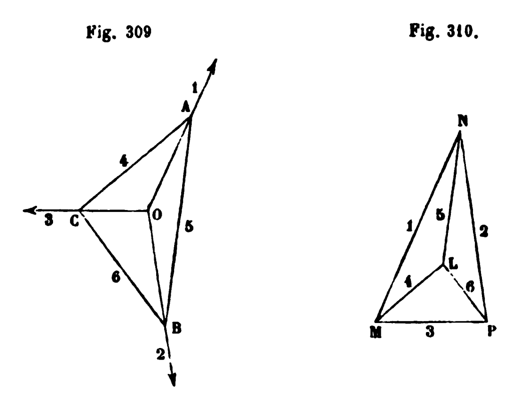
$$mz + zs = ms = \mathrm{P}, \quad \text{et} \quad \frac{mz}{zs} = \frac{mu}{ut} = \frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IA}};$$

donc enfin,

$$X = mz \quad \text{et} \quad Y = zs.$$

Dans le cas général où les forces données (1), (2),....., seraient quelconques, on pourrait toujours se servir d'un polygone funiculaire pour les composer; mais les réactions des appuis n'étant pas nécessairement verticales, le problème revient à décomposer une force donnée en deux composantes passant par deux points donnés, ce qui peut se faire généralement d'une infinité de manières. Il faut donc qu'on se donne une condition de plus pour achever de déterminer la question, par exemple la direction suivant laquelle agit l'une des deux réactions inconnues.

356. Nous supposerons, dans ce qui suit, que cette première partie du problème ait été résolue, de sorte que nous n'ayons plus à nous occuper que de la recherche des tensions des barres sous l'action de forces toutes connues, appliquées aux sommets du réseau. Là encore les constructions graphiques conduisent très-aisément à la solution, par l'usage d'une *figure réciproque*. Des exemples feront comprendre cette méthode.



Soit d'abord un triangle ABC, sollicité par des forces (1), (2), (3), appliquées respectivement à ses sommets. Pour l'équilibre, il faut et il suffit que les trois forces (1), (2) et (3) concourent en un même point O, et que chacune soit égale et opposée à la résultante des deux

autres. Par un point M du plan menons MN égale et parallèle à la force (1), puis par le point N, NP égale et parallèle à la force (2), enfin par le point P, une droite égale et parallèle à la force (3). Cette dernière droite PM devra fermer le triangle MNP, qui est le polygone de composition des trois forces en équilibre (1), (2) et (3).

Pour trouver les tensions des côtés du triangle ABC par le point M, intersection des forces (1) et (3) dans le polygone auxiliaire, menons une droite ML parallèle au côté AC qui joint les points d'application de ces deux forces sur la figure principale. De même par le point N, intersection de forces (1) et (2) de la figure auxiliaire, menons NL, parallèle au côté AB qui joint les points d'application A et B des forces (1) et (2) sur la figure principale. Ces deux droites NL, ML se coupent en un point L, et l'on peut regarder la droite MN comme la résultante des deux composantes NL, LM. Ce triangle NLM est donc semblable à celui que l'on formerait au point A en décomposant la force (1) suivant les directions AC, AB, et par conséquent les longueurs ML, LN représentent respectivement les valeurs des tensions des deux côtés 4 et 5 de la figure. Par la même raison, la droite LP représente la tension du côté 6, et doit être parallèle à ce côté.

La recherche des tensions s'effectue donc très-simplement en construisant la figure auxiliaire MNPL, et cette figure est *réciproque* de la figure donnée ABCO : aux sommets

A, B, C, O,

points de concours des quatre groupes de trois droites

(1, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 6, 4), (1, 2, 3),

correspondent respectivement dans la figure auxiliaire les triangles

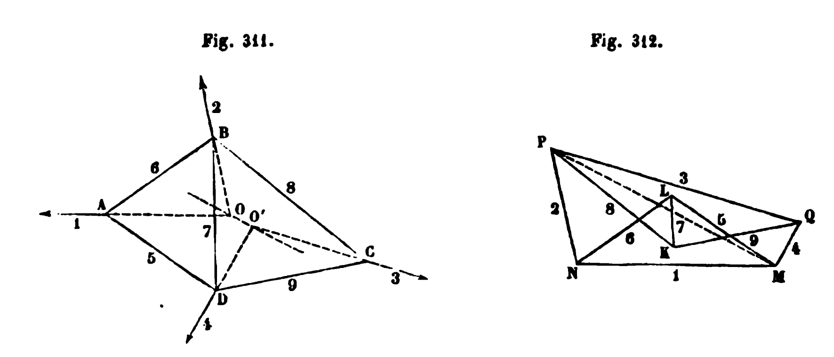
MNL, NPL, PML, MNP,

dont les trois côtés représentent les forces qui sont appliquées aux sommets correspondants et s'y font équilibre. On serait arrivé au même résultat en décomposant les forces (1), (2) et (3), aux points A,

B, C, suivant les côtés contigus du triangle ABC, par la règle du parallélogramme.

357. Prenons pour second exemple un quadrilatère articulé ABCD, formé par deux triangles ABD, BDC construits, sur une base commune BD, et sollicité, en ses sommets, par des forces données (1), (2), (3) et (4).

Fig. 311. Fig. 312.



Il faut d'abord s'assurer que les quatre forces se font équilibre. Pour cela, composons les forces (1) et (2) au point O où elles se rencontrent; les forces (3) et (4) au point O′ où leurs direction se coupent. Il faudra et il suffira, pour l'équilibre, que la résultante des forces (1) et (2), et celles des forces (3) et (4), soient égales et agissent en sens contraires suivant la direction OO′. Si donc on donne les directions des quatre forces, et la grandeur de l'une d'elles, les grandeurs des trois autres seront déterminées par une construction géométrique, sauf le cas où les points O et O′ coïncideraient, car alors la direction des résultantes ne serait pas définie, et il faudrait donner la grandeur de deux des forces au lieu d'une seule.

Pour former la figure réciproque du quadrilatère donné, menons MN égale et parallèle à la force (2), PQ égale et parallèle à la force (3), QM égale et parallèle à la force (4). Le polygone se fermera de lui-même en M, puisqu'il y a équilibre entre les quatre forces. Par les points M et N, extrémités du côté 1, menons des parallèles ML au côté AD, et NL au côté AB de la figure principale; ces droites, qui se coupent en un point L, déterminent des longueurs dont l'une, ML,

représente la tension du côté parallèle AD, et l'autre la tension du côté AB. En définitive, au sommet A, où s'équilibrent trois forces (1), (5) et (6), correspond dans la figure auxiliaire un triangle MNL, dont les côtés sont proportionnels à ces trois forces.

De même, menons par P et Q des parallèles PK, QK, aux côtés BC, CD, de la figure principale; cela revient à décomposer la force PQ = (3), appliquée au sommet C, en deux composantes PK, QK, tensions des côtés 8 et 9, qui tiennent en équilibre la force (3).

La force (2) est équilibrée par les tensions des côtés 6 et 8, et par la tension de la diagonale BD, qui porte le n° 7 sur la figure principale. La force (4) est tenue en équilibre par les tensions des côtés 5 et 9, et de la même diagonale 7. Sur la figure auxiliaire, ces forces sont représentées respectivement par les côtés NP, QM; les tensions des côtés adjacents, déjà trouvées, sont représentées par les droites NL, PK, pour les côtés 6 et 8, et par les droites ML et QK, pour les côtés 5 et 9. La tension de la diagonale 7 complète l'équilibre, et par conséquent, elle est représentée sur l'épure par la droite KL qui ferme à la fois les deux quadrilatères PKLN, QKLM; de sorte que la droite KL est nécessairement parallèle à la droite BD. Ces deux quadrilatères correspondent respectivement aux deux *nœuds* B et D de la figure principale, où se réunissent quatre forces en équilibre : savoir, une force extérieure et les tensions de trois liens concourants.

La diagonale MP du quadrilatère auxiliaire représente en grandeur et en direction la résultante des forces (1) et (2), comme aussi celle des forces (3) et (4). Cette droite PM doit donc être parallèle à la droite OO', suivant laquelle agissent ces deux résultantes.

358. Revenons à la travée réticulée dont nous nous sommes occupés tout à l'heure.

Répétons le polygone des forces (1), (2), (3), (4) et (5), qui ici se réduit à une droite, et partageons cette droite de manière que *mz* soit la réaction (7) du point A, et *zs* la réaction (6) du point B. Par le point *m*, extrémité commune au segment *mz* et à la force (1), menons une parallèle au côté 8 du polygone articulé qui joint les mêmes forces. Par l'autre côté *z*, menons une parallèle au côté (9). Le triangle auxiliaire *zmα* correspondra aux trois droites concourantes (7),

(8) et (9) de la figure principale, et les côtés $m\alpha$ et αx de ce triangle seront les tensions et pressions des côtés qui aboutissent au point A, car elles ont pour résultante la force (7) $= mz = X$. Il est facile de

Fig. 313.

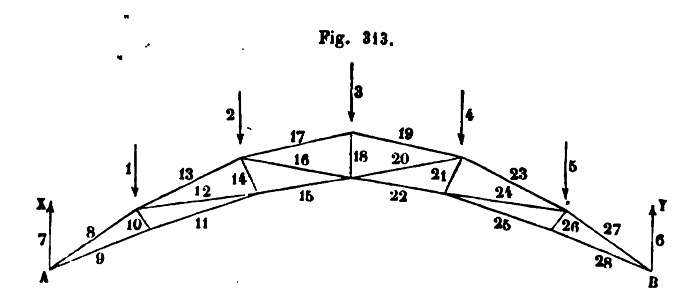
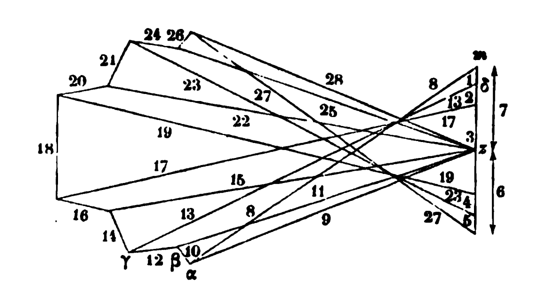


Fig. 314.



voir que la force (8) est une pression et la force (9) une tension. L'équilibre du nœud C est établi par les actions simultanées des trois côtés 9, 10 et 11 qui s'y rencontrent. Connaissant la force (9) $= \alpha z$, il n'y aura donc qu'à mener par le point α une parallèle au côté 10, et par le point z une parallèle au côté 11. Les droites $z\beta$, $\alpha\beta$, seront les forces développées dans les côtés 11 et 10.

Le nœud D est en équilibre sous l'action des cinq forces (1), (8), (10), (12) et (13), dont les trois premières sont connues. Pour déterminer les deux autres, menons par le point β une parallèle $\beta\gamma$ au côté 12, et par le point δ, commun aux forces (1) et (2) sur l'épure auxiliaire, une parallèle au côté 13. Ces deux droites se couperont en γ et détermineront un pentagone $m\alpha\beta\gamma\delta$, qui correspond aux cinq rayons émanant du point D, et qui exprime l'équilibre des cinq

forces concourantes agissant suivant ces rayons. On passera ensuite à l'équilibre du point E sous l'action des tensions des quatre liens 11, 12, 14 et 15; de ces tensions, deux (11) et (12) sont déjà connues. On déterminera les deux autres en menant par γ une parallèle $\gamma\varepsilon$ au côté 14, et par z une parallèle $z\varepsilon$ au côté 15; le quadrilatère $z\beta\gamma\varepsilon$ correspondra aux quatre forces concourantes (11), (12), (14) et (15), et ses côtés seront proportionnels aux tensions des côtés correspondants de la travée réticulée. On continuera ainsi en prenant successivement les sommets du polygone, de manière à n'avoir jamais à déterminer plus de deux tensions inconnues à chaque construction d'un nouveau polygone partiel auxiliaire. L'ordre de succession des côtés successifs de chacun de ces polygones doit être l'ordre même dans lequel les forces correspondantes se succèdent quand on fait le tour de leur point commun d'application.

Les lignes de la figure auxiliaire, recevant les numéros respectifs des côtés correspondants de la travée réticulée, donneront par leurs longueurs les valeurs des tensions ou des pressions de ces mêmes côtés.

Il reste à distinguer les barres comprimées des barres étendues. La règle pour cela consiste à définir le sens dans lequel le polygone qui correspond à chaque nœud doit être parcouru, pour que la résultante des tensions fasse équilibre à la force extérieure qui agit en ce point. Cela fait, les sens dans lesquels agissent les tensions sont complétement déterminés, et il suffit d'imaginer qu'on les transporte parallèlement à elles-mêmes sur les lignes correspondantes de la figure principale, pour juger immédiatement si ces lignes se trouvent étendues ou comprimées. Cette recherche se fera en partant d'un des points d'appui, auquel cas le polygone des forces correspondant est un triangle, et en allant de proche en proche, comme pour la construction même de la figure réciproque.

CHAPITRE II.

POUTRES A TREILLIS PROPREMENT DITES.

359. La théorie des poutres à treillis peut se ramener aux principes que nous avons employés pour les treillis simples. Mais la marche suivante, indiquée dans les *Annales des ponts et chaussées*, année 1864, paraît plus simple et plus rapide. Les hypothèses sont du reste identiques dans les deux méthodes, et les résultats pratiques sont tout à fait les mêmes. Nous nous bornerons donc à développer la seconde.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

360. Une poutre droite, à treillis, repose horizontalement sur deux appuis fixes. On connaît la hauteur, le poids et la portée de la poutre, et il s'agit de déterminer les conditions de l'équilibre intérieur de cette pièce.

Dans une poutre pleine, les pressions et les tensions du métal varient d'une manière continue d'un point à l'autre de la portée Cette continuité n'existe plus dans les treillis ; les efforts développés dans les tables horizontales y subissent des variations brusques d'un côté à l'autre des points où s'attachent les barres composant la jonction des deux tables. L'expérience démontre cependant que ces variations sont généralement assez petites pour qu'on puisse regarder comme continus les efforts auxquels est soumise la matière dans des

constructions de cette nature (1). Aussi appliquerons-nous à la recherche de ces efforts le calcul infinitésimal et non le calcul aux différences finies, dont l'emploi serait plus rigoureusement justifié dans la solution du problème proposé. De même on traite habituellement par le calcul différentiel la question de l'équilibre des ponts suspendus, où la discontinuité des efforts est peut-être encore plus frappante.

Quel que soit le détail de la poutre à treillis que nous avons à étudier, nous y trouverons toujours une *table supérieure* A, une *table inférieure* B, et un *treillis* intermédiaire E réunissant ces deux tables.

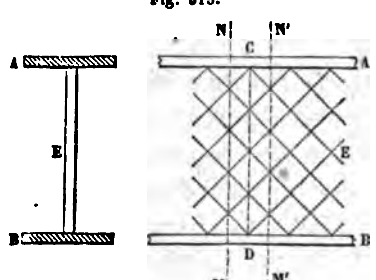


Fig. 315.

Coupons la poutre par deux plans verticaux MN, M'N', conduits perpendiculairement à l'axe de la construction; nous regarderons ces plans comme infiniment rapprochés; l'un passe en deçà, l'autre au delà des points C et D où le treillis s'attache aux deux tables, et au milieu des intervalles compris entre ces points et les points d'insertion des barres voisines. Après avoir isolé le système solide compris entre ces deux plans, il faut, pour rétablir l'équilibre, introduire dans chaque partie coupée une force équivalente aux actions moléculaires qui s'y exerçaient avant la coupure.

Admettons, pour fixer les idées, que la table supérieure A soit comprimée et la table inférieure B distendue. La suite du calcul rectifierait d'ailleurs cette supposition si elle était contraire à la vérité. Soit x l'abscisse du plan MN comptée le long de la poutre à partir d'une origine quelconque, de l'une des extrémités de la poutre par exemple ; $x + dx$ sera l'abscisse du plan M'N'. Soit encore F la force de compression à appliquer à la table supérieure dans le plan MN, et

(1) Si les efforts ne varient pas d'une manière continue, on peut admettre du moins qu'ils varient d'une manière graduelle d'un point à l'autre d'une même pièce, ce qui crée une sorte de continuité suffisante pour qu'on applique le calcul.

F' la force d'extension à appliquer dans le même plan à la table inférieure. Les forces à appliquer aux deux tables dans le plan voisin M'N seront dirigées en sens contraires de F et de F', et seront respectivement égales à $F + \frac{dF}{dx}dx$, $F' + \frac{dF'}{dx}dx$, en vertu de la continuité que nous avons admise.

Nous sommes conduit à faire ici une première hypothèse, celle de la répartition uniforme des pressions et des tensions, entre toutes les barres du treillis aux points où elles sont rencontrées par un même plan vertical, ce qui revient à substituer une pression et une tension moyennes aux pressions et tensions différentes de chaque barre prise en particulier. Soit n le nombre des barres *montantes*, ou des barres *descendantes*, rencontrées par une même verticale, le système montant et le système descendant comprenant un nombre égal de barres; soit α l'angle constant qu'elles font avec la verticale, les unes dans un sens, les autres en sens contraire. D'après notre hypothèse, il suffira de considérer deux forces φ et φ', dirigées, la première suivant chacune des barres du système montant, la seconde suivant chacune des barres du système descendant. Il est facile de prévoir, et le calcul nous démontrerait au besoin, que si l'une est une force de compression, l'autre est une force d'extension. Ces forces φ et φ' se retrouveront dans les barres du treillis à la rencontre du plan M'N', dirigées en sens contraire et augmentées de leurs différentielles (1).

Nous désignerons par p le poids de la poutre par unité de longueur, y compris la surcharge, de sorte que pdx sera le poids total de l'élément limité par les plans MN, M'N'.

Enfin H représentera la distance des forces horizontales F et F'; si les actions moléculaires étaient uniformément réparties sur la section des tables, la quantité H serait la distance des centres de gravité de ces sections.

(1) Notre analyse ne suppose pas nécessairement que les forces φ et φ' sont les mêmes dans toutes les barres d'un même système à la rencontre d'une même verticale. Il suffit, pour qu'elle soit admissible, que la résultante de toutes les forces φ et φ' appliquées aux divers points d'une section verticale, coupe cette verticale à une même hauteur dans toute section.

361. Nous allons écrire les équations d'équilibre des forces qui agissent sur l'élément considéré; ces équations sont au nombre de trois, puisque les forces peuvent être supposées contenues dans le plan longitudinal moyen de la ferme. Le problème consiste à trouver les valeurs des quatre forces F, F', φ, φ' en fonction de l'abscisse x, et l'on voit sur-le-champ qu'au point de vue analytique ce problème est indéterminé, puisque la statique ne fournit que trois équations entre quatre inconnues. L'équilibre intérieur de la poutre est donc possible d'une infinité de manières, et ce sont les diverses circonstances de la pose et de l'ajustage des pièces qui achèvent dans chaque cas particulier de déterminer le problème. Une nouvelle hypothèse est donc nécessaire pour compléter la solution, et nous choisirons celle qui la simplifie davantage.

Prenons les composantes horizontales des forces agissant sur l'élément de ferme; nous aurons l'équation

$$n(\varphi-\varphi')\sin\alpha+F-F'-n\left(\varphi+\frac{d\varphi}{dx}dx-\varphi'-\frac{d\varphi'}{dx}dx\right)\sin\alpha-F+F'-\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF'}{dx}dx=0$$

qui se réduit à

$$n\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\varphi'}{dx}\right)\sin\alpha+\frac{dF}{dx}-\frac{dF'}{dx}=0.$$

Cette équation nous montre qu'indépendamment de toute hypothèse nouvelle, la fonction $n(\varphi-\varphi')\sin\alpha+F-F'$ est constante dans toute l'étendue de la poutre. Cette force horizontale se retrouve donc tout entière à l'extrémité de la poutre, et doit y être équilibrée par la composante horizontale de la réaction de la culée; mais nous admettons que la poutre pose sur ses appuis sans y exercer de poussée latérale, et par suite la fonction $n(\varphi-\varphi')\sin\alpha+F-F'$, égale à zéro sur la culée, est nulle en tous points de la portée.

On satisfait très-simplement à cette condition en posant $F=F'$, ce qui entraîne en même temps $\varphi=\varphi'$; et c'est cette hypothèse que nous adopterons pour achever la détermination des inconnues. On voit qu'elle consiste à admettre que, dans les poutres à treillis comme

dans les poutres pleines, la compression d'une des tables est égale à l'extension de la table opposée ; il en résulte l'égalité des pressions et des tensions dans les deux systèmes de barres du treillis. Nous n'avons plus alors que deux inconnues F et φ, et les équations des composantes verticales et des moments nous en font connaître les valeurs.

1° Équation des composantes verticales (1) :

$$2n\varphi \cos\alpha = pdx + 2n\left(\varphi + \frac{d\varphi}{dx}dx\right)\cos\alpha,$$

laquelle se réduit à l'équation suivante :

$$(1) \qquad 2n\frac{d\varphi}{dx}\cos\alpha + p = 0.$$

2° Équation des moments, pris par rapport à un point quelconque, le point D, par exemple.

La somme des moments des forces appliquées aux deux tables par rapport à ce point est égale à $-\frac{dF}{dx}dx \times H$. Nous donnons le signe — à ce moment, parce que la force qui y entre seule tend à faire tourner de droite à gauche son point d'application autour du centre des moments.

Le poids pdx, dont la direction passe par le point D, a un moment nul.

Les $2n$ forces φ, appliquées en différents points du plan MN, ont une résultante verticale, montante, et égale à $2n\varphi\cos\alpha$. Les $2n$ forces $\left(\varphi + \frac{d\varphi}{dx}dx\right)$, appliquées en différents points du plan M'N', ont une résultante verticale, mais descendante, et égale à $2n\left(\varphi + \frac{d\varphi}{dx}dx\right)\cos\alpha$. La somme des moments de ces deux forces

(1) Nous négligeons, suivant l'usage adopté par les constructeurs, la portion de résistance à l'effort tranchant développée par les tables.

par rapport au point D est positive, et égale à l'expression

$$2n\varphi \cos\alpha\, dx' + 2n \frac{d\varphi}{dx} \cos\alpha \times \frac{\overline{dx}^2}{2},$$

qui se réduit à son premier terme en effaçant le terme infiniment petit du second ordre.

L'équation des moments est donc en définitive :

$$(2) \qquad H \frac{dF}{dx} = 2n\varphi \cos\alpha.$$

L'équation (1) donne la loi de variations des forces φ, et montre que φ est une fonction linéaire de l'abscisse x; l'équation (2) exprime la loi de variation des forces F, et montre que F est une fonction entière du second degré de cette même variable x. Ces deux équations peuvent d'ailleurs s'interpréter autrement : le produit HF est en effet le *moment fléchissant* de la poutre dans le plan MN, et $2n\varphi \cos\alpha$ est l'*effort tranchant* dans ce même plan. Désignant par M le moment de rupture et par A l'effort tranchant, les équations (1) et (2) se transforment dans les deux suivantes :

$$dA + pdx = 0, \qquad dM = Adx,$$

lesquelles sont les équations générales applicables à toutes les poutres droites (§ 105), tandis que les équations (1) et (2) ne conviennent qu'aux poutres à treillis.

L'intégration des équations (1) et (2) est facile, et introduit deux constantes arbitraires qu'il faut déterminer dans chaque cas particulier.

L'intégrale de l'équation (1) est

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{px}{2n \cos\alpha};$$

la constante arbitraire φ_0 est la valeur de la force φ pour $x = 0$. Si donc on prend pour origine des abscisses l'aplomb de la culée, φ_0 est la force développée dans une barre aboutissant à la culée, et la somme $2n\varphi_0 \cos\alpha$ des composantes verticales des forces φ_0 est

égale à la réaction de la culée, ou à $\frac{1}{2}pl$, l étant la portée de la poutre ; donc

$$\varphi_0 = \frac{pl}{4n \cos \alpha},$$

et

$$\varphi = \frac{p}{2n \cos \alpha}\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Cette équation nous apprend que φ est nul au milieu de la portée, et change de signe d'un côté à l'autre de ce point ; les barres d'une même inclinaison sont donc comprimées dans une des moitiés de la poutre et étendues dans l'autre moitié.

En substituant dans l'équation (2) cette valeur de φ, on parvient à l'intégrale suivante :

$$\text{HF} = \frac{1}{2} px(l - x).$$

La constante arbitraire introduite par l'intégration est nulle ici, parce que la poutre est simplement posée sur la culée à partir de laquelle on compte les abscisses. On reconnaît sur-le-champ que F est nul pour $x = 0$ et pour $x = l$, c'est-à-dire sur les culées, et qu'il est maximum pour $x = l - x$, c'est-à-dire au milieu de la portée.

Nous avons ainsi trouvé les formules générales qui donnent φ et F, et reconnu que φ varie proportionnellement aux ordonnées, $\frac{l}{2} - x$, d'une ligne droite, tandis que F varie proportionnellement aux ordonnées, $x(l - x)$, d'une parabole à axe vertical : résultats utiles en ce qu'ils permettent de construire une épure qui indique en chaque point la valeur des forces auxquelles la matière de la poutre doit être en mesure de résister.

362. Avant de pousser plus loin la discussion des équations (1) et (2), nous observerons que le calcul aux différences finies ne nous aurait pas conduit à d'autres résultats que ceux que nous venons de formuler. Pour ce calcul, dx devrait être remplacé par une quantité

constante Δx, finie et égale à la distance horizontale de deux barres consécutives. L'équation (1) deviendrait dans cette nouvelle hypothèse :

$$2n\Delta\varphi \cos\alpha + p\Delta x = 0,$$

d'où l'on tirerait, comme de l'équation différentielle,

$$\varphi = \frac{p}{2n\cos\alpha}\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

en observant toutefois que, dans cette équation, x ne doit recevoir que des valeurs discontinues, o, Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$,... dont la différence soit constante et égale à Δx. L'équation (2), où l'on conserverait le terme du second ordre en Δx, deviendrait

$$H\Delta F = 2n\varphi \cos\alpha\Delta x + n\Delta\varphi \cos\alpha\Delta x,$$

ou bien, en remplaçant φ et $\Delta\varphi$ par leurs valeurs en x et Δx,

$$H\Delta F = p\left(\frac{l}{2} - x\right)\Delta x - \frac{1}{2}p\overline{\Delta x}^2.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$H\Delta F = \frac{pl}{2}\Delta x - \frac{1}{2}p\left[(\overline{\Delta x}^2 + 2x\Delta x + x^2) - x^2\right],$$

ou bien encore sous celle-ci

$$H\Delta F = \frac{pl}{2}\Delta x - \frac{1}{2}p\left[(x+\Delta x)^2 - x^2\right] = \frac{pl}{2}\Delta x - \frac{1}{2}p\Delta(x^2);$$

et, par suite, en passant aux sommes,

$$HF = \frac{pl}{2}x - \frac{1}{2}px^2 = \frac{1}{2}px(l-x),$$

sans constante, puisque F est nul pour $x = 0$. C'est la même équation que tout à l'heure.

Les valeurs de F varient donc d'une manière discontinue, et sont représentées en réalité par les ordonnées des sommets d'un contour polygonal inscrit dans la parabole à laquelle conduit l'hypothèse de la continuité. De même les valeurs exactes de φ sont proportionnelles aux ordonnées de points tous situés sur la droite dont nous avons indiqué plus haut l'équation.

Évidemment il n'y a dans la pratique aucun inconvénient à substituer des lignes continues à ces contours polygonaux composés ordinairement d'un grand nombre d'éléments tous très-petits.

La théorie des ponts suspendus offre l'exemple d'une substitution analogue.

DISCUSSION ET APPLICATION DES FORMULES.

363. Le problème qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer le minimum des sections nécessaires pour qu'en aucun point de la poutre le métal ne subisse, par unité de surface, un effort supérieur à une limite donnée.

L'analyse nous permet de fixer d'une manière générale la valeur de l'angle α qui correspond au moindre poids du treillis.

En un point quelconque de la portée, la section d'une barre doit être proportionnelle à l'effort φ que cette barre supporte ; le poids du métal contenu dans le treillis entre les plans MN et M'N' est donc proportionnel au produit $\varphi \times \frac{dx}{\sin\alpha}$, dans lequel φ représente, à un facteur constant près, la section de la barre, et $\frac{dx}{\sin x}$ est la longueur de cette barre comprise entre les deux plans. Si l'on substitue dans cette expression la valeur de φ en fonction de x, il vient

$$\frac{p}{2n}\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}\left(\frac{l}{2}-x\right)dx=\frac{p}{n\sin 2\alpha}\left(\frac{l}{2}-x\right)dx,$$

et le seul élément que l'on soit maître d'altérer dans cette fonction

est le diviseur sin 2α. Le minimum du poids du treillis correspond donc au maximum de ce diviseur, c'est-à-dire au cas où l'angle α est égal à 45°, et où les deux systèmes de barres se coupent orthogonalement.

364. Les sections des barres du treillis, déterminées en fonction de la force φ, décroîtront à partir de la culée jusqu'au milieu du pont. On peut pour arriver à ce résultat, faire varier soit la largeur de la barre, soit son épaisseur, soit enfin ses deux dimensions à la fois. A s'en rapporter aveuglément au calcul que nous avons présenté, la section des barres au milieu de la portée pourrait être réduite à zéro : résultat paradoxal, qui s'explique en observant que notre calcul a supposé une répartition uniforme de la surcharge, ce qui n'est jamais réalisé dans la pratique, sauf en certaines circonstances exceptionnelles. Lorsque la surcharge n'occupe qu'une partie de la longueur du pont, les réactions des culées sont généralement inégales, et le point où l'effort tranchant est nul n'est plus au milieu de la portée. Nous avons fait voir (§ 85), que dans ce cas l'effort tranchant au milieu a pour limite supérieure, en valeur absolue, le quart de sa plus grande valeur à l'aplomb de la culée, et nous avons montré comment on pouvait tracer la parabole-limite des valeurs maximum de l'effort tranchant en chaque point de la portée. Le tracé de cette parabole permet de calculer les sections des barres du treillis de manière qu'en aucun point l'effort subi par le métal ne dépasse une limite fixée d'avance ; et il est d'usage, pour simplifier la fabrication, de partager les barres du treillis en groupes contenant chacun un nombre à peu près égal de barres d'un même modèle.

Tracé de la parabole-limite des efforts tranchants.

Fig. 316.

A I B

365. La courbe des valeurs du moment de rupture M est définie de même par les équations

$$dA + pdx = 0,$$
$$dM = Adx,$$

d'où l'on tire, en éliminant A : $\frac{d^2M}{dx^2} = -p$.

L'intégrale de cette équation est $M = A_0 x - \frac{1}{2}px^2$, sans ajouter d'autre constante que A_0, car la poutre n'étant pas encastrée, on doit avoir à la fois $M = 0$ et $x = 0$. La quantité A_0 est la réaction de la culée.

Nous avons déjà reconnu (§ 85) qu'il est inutile pour la recherche des maxima du moment M de supposer la charge incomplétement répartie sur la poutre; car l'hypothèse qui donne en tout point le maximum de M correspond à une surcharge complète.

Nous n'aurons donc qu'à déduire différentes valeurs de F de l'équation

$$HF = \frac{1}{2} px(l - x).$$

Abstraction faite des variations peu sensibles du facteur H, F varie proportionnellement aux ordonnées de la parabole $y = x\ (l - x)$. La valeur de F est d'autant moindre que le facteur H est plus grand. Mais dans la pratique ce facteur n'est jamais arbitraire, et quelquefois il est loin d'atteindre la hauteur entière de la ferme. C'est ce qui arrive quand on est forcé de dédoubler les paquets de tôles à assembler, le calcul leur assignant une épaisseur totale qui rendrait les rivures impraticables. Enfin la hauteur de la poutre, d'où se déduit le bras de levier H, est limitée par d'autres circonstances encore; elle varie dans les grands ponts du huitième au douzième de la portée (1); elle ne doit pas excéder une certaine proportion, les $\frac{3}{2}$ ou les $\frac{7}{5}$, de la largeur du pont, pour que la poutre ait sur les culées une assiette suffisante (2); elle est commandée en certaines circon-

Coupe d'une table horizontale dédoublée.

Fig. 317.

(1) Ce rapport, comme on le verra (§ 369), a une grande influence sur la raideur de la poutre.

(2) Cette proportion est celle que les anciens architectes recommandaient pour la

stances par l'obligation de maintenir à des niveaux définis le dessous des fermes, le plan des rails ou de la voie, et en même temps le dessus des fermes pour assurer un contreventement au pont sans gêner le passage des véhicules et des chargements.

Au centre de la portée, on a

$$\mathrm{HF} = \frac{1}{8}pl^2,$$

et, par suite,

$$\mathrm{F} = \frac{\frac{1}{8}pl^2}{\mathrm{H}}.$$

On en déduit la section maximum de la table. Du centre aux deux culées, cette section est graduellement réduite par la suppression d'un certain nombre de feuilles. Les nécessités de la fabrication entraînent toujours dans les environs des culées un excès notable de matière.

366. Enfin, dans la portion de la poutre qui repose sur la culée, et qui ordinairement est formée d'une partie pleine arrêtant le treillis, il est nécessaire, pour prévenir l'écrasement de cette partie sous la réaction de la culée, de donner à la paroi une section horizontale proportionnelle à cette réaction.

---

coupe des poutres en charpente. Soit a la hauteur d'une poutre, b sa largeur; la résistance de la poutre à la flexion dans le plan vertical est proportionnelle au produit a^2b (§ 96); et comme la poutre est supposée extraite d'un arbre ayant la forme d'un cylindre à base circulaire, dont le rayon R peut être regardé comme donné, on a aussi

Fig. 318.

$$a^2 + b^2 = 4\mathrm{R}^2.$$

Le problème de la meilleure coupe revient donc à déterminer a et b, de manière que a^2b soit maximum lorsque la somme $a^2 + b^2$ est constante. Il faut pour cela que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Les fractions $\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{5}$ sont des réduites de la fraction continue

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}$$

qui représente le développement de $\sqrt{2}$.

COMPARAISON D'UNE POUTRE A TREILLIS AVEC UNE POUTRE PLEINE DE MÊMES DIMENSIONS.

367. A ne considérer que superficiellement les poutres à treillis, on est tenté de croire qu'à égalité de portée, un tel système doit conduire à une réduction du poids des poutres. Il y a avantage, en effet, à éloigner de l'axe neutre les fibres résistantes qui composent une poutre, et à les concentrer dans deux bandes séparées l'une de l'autre par le plus grand intervalle possible : telle est la considération qui a pu conduire à évider la région voisine de l'axe neutre, et à transformer en treillis la paroi pleine. Ce raisonnement est démenti et par l'expérience et par la théorie. L'expérience démontre que les poutres à treillis sont un système assez lourd, et que les économies de métal qu'on veut y faire sont toujours, au delà d'une certaine limite, préjudiciables à la durée de l'ouvrage. La théorie met en évidence le rôle que joue dans la résistance de la ferme la paroi, pleine ou évidée, qui rattache l'une à l'autre les deux tables d'une poutre métallique.

Cette paroi est l'organe par lequel s'opère la transmission des tensions et des pressions d'une région à l'autre de la pièce, et elle a besoin d'être nourrie en vue de ce travail indispensable à l'équilibre moléculaire de la construction.

Nous avons vu que l'effort tranchant A, en un point quelconque de la ferme défini par l'abscisse x, est la dérivée par rapport à x du moment de rupture M dans la section correspondante à cette même abscisse. Dans une poutre à treillis, l'effort A s'exerce obliquement sur $2n$ barres auxquelles on peut faire supporter une pression ou une tension-limite de R kilogrammes par millimètre quarré de section; le minimum de la section droite d'une barre est donc donné par la fraction $\frac{A}{2n\cos\alpha\times R}$, et le volume du treillis, pour un élément de longueur dx, est égal à

$$\frac{A}{2n\cos\alpha\times R}\times\frac{dx}{\sin\alpha}\times 2n=\frac{2Adx}{R\sin 2\alpha},$$

stances par l'obligation de maintenir à des niveaux définis le dessous des fermes, le plan des rails ou de la voie, et en même temps le dessus des fermes pour assurer un contreventement au pont sans gêner le passage des véhicules et des chargements.

Au centre de la portée, on a

$$HF = \frac{1}{8} pl^2,$$

et, par suite,

$$F = \frac{\frac{1}{8} pl^2}{H}.$$

On en déduit la section maximum de la table. Du centre aux deux culées, cette section est graduellement réduite par la suppression d'un certain nombre de feuilles. Les nécessités de la fabrication entraînent toujours dans les environs des culées un excès notable de matière.

366. Enfin, dans la portion de la poutre qui repose sur la culée, et qui ordinairement est formée d'une partie pleine arrêtant le treillis, il est nécessaire, pour prévenir l'écrasement de cette partie sous la réaction de la culée, de donner à la paroi une section horizontale proportionnelle à cette réaction.

---

coupe des poutres en charpente. Soit a la hauteur d'une poutre, b sa largeur; la résistance de la poutre à la flexion dans le plan vertical est proportionnelle au produit a^2b (§ 96); et comme la poutre est supposée extraite d'un arbre ayant la forme d'un cylindre à base circulaire, dont le rayon R peut être regardé comme donné, on a aussi

Fig. 318.

$$a^2 + b^2 = 4R^2.$$

Le problème de la meilleure coupe revient donc à déterminer a et b, de manière que a^2b soit maximum lorsque la somme $a^2 + b^2$ est constante. Il faut pour cela que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Les fractions $\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{5}$ sont des réduites de la fraction continue

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}$$

qui représente le développement de $\sqrt{2}$.

COMPARAISON D'UNE POUTRE A TREILLIS AVEC UNE POUTRE PLEINE DE MÊMES DIMENSIONS.

367. A ne considérer que superficiellement les poutres à treillis, on est tenté de croire qu'à égalité de portée, un tel système doit conduire à une réduction du poids des poutres. Il y a avantage, en effet, à éloigner de l'axe neutre les fibres résistantes qui composent une poutre, et à les concentrer dans deux bandes séparées l'une de l'autre par le plus grand intervalle possible : telle est la considération qui a pu conduire à évider la région voisine de l'axe neutre, et à transformer en treillis la paroi pleine. Ce raisonnement est démenti et par l'expérience et par la théorie. L'expérience démontre que les poutres à treillis sont un système assez lourd, et que les économies de métal qu'on veut y faire sont toujours, au delà d'une certaine limite, préjudiciables à la durée de l'ouvrage. La théorie met en évidence le rôle que joue dans la résistance de la ferme la paroi, pleine ou évidée, qui rattache l'une à l'autre les deux tables d'une poutre métallique.

Cette paroi est l'organe par lequel s'opère la transmission des tensions et des pressions d'une région à l'autre de la pièce, et elle a besoin d'être nourrie en vue de ce travail indispensable à l'équilibre moléculaire de la construction.

Nous avons vu que l'effort tranchant A, en un point quelconque de la ferme défini par l'abscisse x, est la dérivée par rapport à x du moment de rupture M dans la section correspondante à cette même abscisse. Dans une poutre à treillis, l'effort A s'exerce obliquement sur $2n$ barres auxquelles on peut faire supporter une pression ou une tension-limite de R kilogrammes par millimètre quarré de section; le minimum de la section droite d'une barre est donc donné par la fraction $\frac{A}{2n\cos\alpha \times R}$, et le volume du treillis, pour un élément de longueur dx, est égal à

$$\frac{A}{2n\cos\alpha \times R} \times \frac{dx}{\sin\alpha} \times 2n = \frac{2A\,dx}{R\sin 2\alpha},$$

expression qui, dans le cas le plus favorable, celui où $\alpha = 45°$, se réduit à $\frac{2A\,dx}{R}$.

Dans une poutre pleine de même dimension que la poutre à treillis et chargée de la même manière, l'effort tranchant est équilibré par la résistance de la paroi pleine au cisaillement; désignons par R' la limite de résistance du métal par millimètre quarré. La section nécessaire pour la paroi pleine sera donc représentée par $\frac{R'}{A}$, et le volume du métal employé par la paroi sur une longueur dx sera $\frac{A\,dx}{R'}$. Or on peut admettre que $R = R'$; on adopte en effet le plus souvent une limite de 5 kilogrammes pour les tensions et pressions dans le treillis, et cette limite est aussi celle de la résistance pratique du fer au cisaillement. Dans cette hypothèse, le volume de la paroi évidée est donc double du volume de la paroi pleine.

En pratique, le résultat de la comparaison est quelquefois différent. Il peut arriver en effet que le calcul assigne à la paroi pleine d'une poutre une épaisseur si petite qu'elle soit inadmissible dans la construction; on ne peut pas, par exemple, mettre moins d'une tôle pour l'âme d'une poutre. La poutre pleine aurait alors un grand excès de résistance à l'effort tranchant, et elle serait moins économique qu'un treillis, qui, concentrant la matière sur un petit nombre de lignes, la ferait travailler partout dans des conditions meilleures. Le treillis assurerait du moins une économie sur le poids; cette économie pourrait être rachetée d'ailleurs par une plus grande dépense dans le travail du montage. Le treillis, dans toute autre circonstance, est plus lourd que la poutre pleine.

Outre ce premier excès de matière, dont la nécessité est mathématiquement démontrée, le treillis conduit encore à un autre excès, dû à la discontinuité des attaches. Chaque barre doit être rivée séparément aux tables, et chacun de ces assemblages doit être en état de résister individuellement à toute action qu'il aurait à subir. La continuité de la paroi pleine, outre qu'elle répartit uniformément la rivure de l'âme aux tables, crée entre les diverses parties de la poutre une

solidarité qui les soulage l'une par l'autre. Dans les treillis, au contraire, la rivure des barres demande l'emploi de grandes feuilles de tôle, ou de cornières de dimensions exceptionnelles ; d'où résulte un excès de poids et un excès de dépense.

Malgré cette infériorité économique du treillis, on ne renoncera pas à ce mode de construction pour s'en tenir exclusivement aux ponts à poutres pleines. L'élégance d'un treillis bien dessiné et l'aspect repoussant d'une paroi pleine ramèneront toujours un grand nombre de constructeurs à préférer le système le plus satisfaisant à l'œil au système dont le bon marché est le seul mérite.

FLEXION DE LA POUTRE A TREILLIS.

368. Soit toujours F la pression ou tension totale qui s'exerce dans les deux bandes horizontales de la poutre ; soit ω la section de ces bandes, dans le plan défini par l'abscisse x, et E, le coefficient d'élasticité du métal. L'élément de longueur dx, pris, avant la flexion, sur la bande comprimée, devient après la compression $dx\left(1-\frac{F}{E\omega}\right)$, et l'élément étendu acquiert la longueur $dx\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)$. Si donc on désigne par ρ le rayon de courbure de l'axe moyen de la poutre, lequel axe est à une distance commune $\frac{H}{2}$ des deux bandes, on aura la proportion

$$\frac{\rho+\frac{H}{2}}{\rho-\frac{H}{2}}=\frac{dx\left(1+\frac{F}{E\omega}\right)}{dx\left(1-\frac{F}{E\omega}\right)},$$

d'où l'on déduit

$$\rho=\frac{EH}{2}\times\frac{\omega}{F}.$$

Le rapport $\frac{F}{\omega}$ est, dans la section considérée, la charge moyenne

de la matière par unité de surface; l'épure de la distribution des tôles donne ω, et fait connaître par suite autant de valeurs qu'on voudra de ce rapport.

Après avoir partagé la poutre en éléments suffisamment petits, on calculera pour chacun une valeur moyenne du rayon de courbure ρ qui lui appartiendra après la flexion. L'axe neutre sera ensuite tracé au moyen d'une série d'arcs de cercles se raccordant comme dans les anses de panier.

Si une poutre est construite de manière que, sous l'action des plus grandes surcharges qu'elle puisse subir, le métal ne supporte en aucun point des bandes une pression ou une tension supérieure à une limite K déterminée, il est facile de fixer une limite du rapport de la flèche à l'ouverture, pourvu que l'on connaisse le rapport de la hauteur H de la poutre à la portée.

Posons en effet $H = \theta l$, θ étant le rapport donné.

Puisque $\frac{F}{\omega}$ est en tous points inférieur à la limite K, on aura en tous points

$$\rho > \frac{EH}{2} \times \frac{1}{K},$$

et, par suite, on attribue une courbure trop prononcée à l'axe neutre en adoptant pour rayon de courbure constant la quantité

$$\rho' = \frac{EH}{2K}.$$

Par conséquent, la flèche véritable f de la poutre est inférieure à la flèche f' de l'arc de rayon ρ', laquelle est donnée approximativement par la formule

$$f' = \frac{l^2}{8\rho'} = \frac{Kl^2}{4EH};$$

donc enfin

$$\frac{f}{l} < \frac{K}{4E\theta}.$$

L'application de cette formule conduit à dresser le tableau suivant, dans lequel on a supposé E = 16,000,000,000 kilog. par mètre carré, comme il convient de le faire lorsqu'il s'agit d'un grand ouvrage (§§ 27 et 28).

RAPPORT θ de la hauteur à la portée.	CHARGE MAXIMUM PAR MILLIMÈTRE QUARRÉ DE SECTION DES BANDES.				
	4 kilogrammes.	5 kilogrammes.	6 kilogrammes.	7 kilogrammes.	7 kilogr. 1/2.
	Limite du rapport de la flèche à l'ouverture.				
$\frac{1}{8}=0.125$	0.00050	0.00062	0.00075	0.00087	0.00094
$\frac{1}{9}=0.111$	0.00056	0.00070	0.00084	0.00098	0.00106
$\frac{1}{10}=0.100$	0.00062	0.00077	0.00094	0.00110	0.00119
$\frac{1}{11}=0.091$	0.00069	0.00086	0.00102	0.00121	0.00131
$\frac{1}{12}=0.083$	0.00075	0.00094	0.00112	0.00134	0.00144
$\frac{1}{15}=0.067$	0.00094	0.00117	0.00140	0.00160	0.00183

DÉTERMINATION DU POIDS DE LA POUTRE A TREILLIS PAR MÈTRE COURANT.

369. Étant donnée la portée l d'un pont métallique à treillis que l'on se propose de construire, on détermine arbitrairement, ou d'après les conditions particulières auxquelles l'ouvrage doit être soumis, la hauteur H qu'il convient d'attribuer à la poutre. Pour calculer ensuite les dimensions qu'il faut donner à ses diverses parties, il est nécessaire de connaître le poids p par mètre courant que le pont doit supporter, et ce poids se compose de deux portions : l'une, p', est le poids propre de la ferme, l'autre, p'', est la surcharge, qui est

supposée connue d'après la destination du pont et d'après sa portée.

Longtemps on s'est contenté de prendre arbitrairement le poids p' sauf à vérifier ensuite, par le métré du projet, que le poids effectif était au plus égal au poids supposé. C'est une méthode de fausse position qui est de mise dans la plupart des questions de travaux publics.

Il est cependant possible d'affranchir le calcul de cette hypothèse, qui, lors même qu'elle ne forcerait pas à recommencer sur nouveaux frais les opérations dans le cas où le poids présumé serait trop faible, conduit généralement, dans le cas contraire, à un poids trop fort; car le projet est dressé de manière que sous le poids $p'+p''$ par mètre courant, le métal subisse un effort maximum donné : les sections sont donc trop grandes si p' a été pris trop grand.

Il est par suite utile de chercher, d'après les calculs précédents, à déterminer p' sans lui attribuer primitivement de valeur arbitraire.

370. Prenons pour unités le mètre pour les longueurs et le kilogramme pour les forces. Nous supposerons connue la limite R de la charge par mètre carré pour le fer dans les bandes, la limite R' de la charge dans les treillis, et la limite R'' de la pression par mètre carré dans la section horizontale des parties reposant sur les appuis.

Appelons ϖ le poids du mètre cube du métal dont se compose la poutre. Le volume de la poutre sera par conséquent en mètres cubes égal à $\frac{p'l}{\varpi}$.

La poutre se décompose comme il suit :

1° Les bandes ou tables;

2° Le treillis;

3° Les appuis sur les culées;

4° Les accessoires, tels que les contreventements, les pièces de ponts, les longerons, s'il y en a;

5° Les rivures et couvre-joints.

Les trois premières parties peuvent se calculer avec une grande approximation.

1° La section des tables, au milieu de la portée est donnée par

l'expression $\frac{\frac{1}{8}pl^2}{H'R}$, où H' est un bras de levier un peu moindre que H. De chaque côté du milieu de la portée, cette section se réduit graduellement et peut même devenir très-petite sur les appuis ; si elle se réduisait à zéro d'après la loi parabolique, la section moyenne serait exactement les deux tiers du maximum ; la moyenne étant comprise entre les $\frac{2}{3}$ et le tout, on peut avec vraisemblance supposer qu'elle est les $\frac{3}{4}$ du maximum ; ce qui donne $\frac{3}{32}\frac{pl^2}{H'R}$ pour la section moyenne d'une table applicable à toute la longueur du pont, et en tout, pour les deux bandes, un volume égal à

$$\frac{3}{16}\frac{pl^3}{H'R}.$$

2° Nous supposons le treillis tracé à 45° sur la verticale ; n étant le nombre des barres de l'un des systèmes, la force qui agit individuellement sur une barre aboutissant à la culée est

$$\frac{\frac{1}{2}pl}{n\sqrt{2}}.$$

La section d'une barre à l'aplomb de la culée est donc égale à

$$\frac{\frac{1}{2}pl}{nR'\sqrt{2}}.$$

Au milieu de la portée, cette section peut être réduite au quart de la valeur sur la culée, ou à

$$\frac{\frac{1}{8}pl}{nR'\sqrt{2}}.$$

La demi-somme des deux, $\frac{\frac{5}{16}pl}{nR'\sqrt{2}}$, est applicable en moyenne à toute barre, de sorte que le volume du treillis est représenté par l'expression :

$$\frac{\frac{5}{16}pl \times l\sqrt{2} \times 2n}{nR'\sqrt{2}} = \frac{5}{8}\frac{pl^2}{R'}.$$

Il est facile de voir en effet que $l\sqrt{2} \times 2n$ est la longueur totale des barres de l'un et de l'autre système, mises bout à bout.

Car on peut observer que si H'' représente la hauteur du treillis, il y a n barres d'un même système dans une longueur de poutre égale à H''; ce qui fait $\frac{nl}{H''}$ pour la longueur entière de la portée ; la longueur d'une barre complète est d'ailleurs $H''\sqrt{2}$; de sorte que la longueur totale des barres d'un même système est $\frac{nl}{H''} \times H''\sqrt{2} = nl\sqrt{2}$. Pour les deux systèmes, elle est double, ou égale à $l\sqrt{2} \times 2n$.

3° La section horizontale nécessaire sur les culées est $\frac{\frac{1}{2}pl}{R''}$, et comme elle s'applique à une hauteur H'' du treillis et à deux appuis, elle donne un volume total $\frac{plH''}{R''}$.

Nous avons donc exprimé les trois premiers termes du volume de la poutre, savoir :

$$p\left(\frac{3}{16}\frac{l^2}{H'R} + \frac{5}{8}\frac{l^2}{R'} + \frac{H''l}{R''}\right).$$

4° Les accessoires de la poutre contenus dans la quatrième classe ont un poids qui peut être défini d'avance, et qui constitue, pour ainsi dire, sa surcharge permanente ; on tiendra compte de cette partie en ajoutant cette surcharge permanente à la surcharge acci-

dentelle : c'est la somme de ces deux surcharges que nous représenterons par p''.

5° La cinquième partie représente des accessoires dont le poids total est à peu près proportionnel au poids propre de la poutre ; on en tiendra donc un compte suffisamment exact en multipliant par un facteur constant la somme des trois premières parties. Nous représenterons ce coefficient par $1 + K$; dans les applications, on pourra faire varier K de 0,30 à 0,40.

On aura donc en définitive l'équation :

$$\frac{p'l}{\varpi} = p\left(\frac{3}{16}\frac{l^2}{H'R} + \frac{l^2}{R'} + \frac{H''l}{R''}\right)(1+K).$$

Remplaçant p par $p' + p''$, et supprimant le facteur commun l, il vient pour p' :

$$p' = \frac{p''\left(\frac{3}{16}\frac{l^2}{H'R} + \frac{5}{8}\frac{l}{R'} + \frac{H''}{R''}\right)(1+K)}{\frac{1}{\varpi} - \left(\frac{3}{16}\frac{l^2}{H'R} + \frac{5}{5}\frac{l}{R'} + \frac{H''}{R''}\right)(1+K)}.$$

Une fois p' déterminé, on en déduit le poids total $p'l$ de la ferme, y compris les accessoires tels que couvre-joints et rivures, mais non compris les pièces de ponts, longerons et contreventements, dont le poids rapporté au mètre courant est supposé entrer dans la valeur de p''.

Si l'on voulait calculer le poids propre p' d'une poutre pleine, il suffirait de remplacer par $\frac{5}{16}$ le coefficient, $\frac{5}{8}$, du terme correspondant au volume du treillis (§ 367).

M. Bresse, en introduisant cette formule dans la seconde édition de son *Cours de mécanique appliquée*, en a modifié légèrement les coefficients. Il a de plus supprimé le terme $\frac{H''}{R}$ qui correspond à la résistance des parties portant sur les appuis, parce que le poids de ces parties ne charge pas la poutre. Ce terme a du reste peu d'importance ; mais qu'on l'admette ou qu'on le supprime, il importe de

ne pas négliger le calcul des dimensions nécessaires pour prévenir l'écrasement de la poutre sur les culées.

371. Pour la discussion de la formule, nous supposerons que p'' est égal à 4000 kilogrammes, que K est égal à 0.30, ce qui correspond à 23 p. 100 sur le poids total du pont, en rivures et en accessoires; le poids ϖ du mètre cube de fer est pris égal à 7800 kilogrammes; enfin, soit $R = R' = R'' = 6000000$, et $H' = H'' = H$. Dans la réalité, H' et H'' sont toujours un peu moindres que H; prendre H pour H' revient donc à admettre pour limite de la pression et de la tension dans les longerons une charge un peu supérieure à 6 kilogrammes par millimètre carré. De même on peut confondre H avec H'' en altérant légèrement la limite R''.

Posons pour abréger

$$V = \frac{3}{16}\frac{l^2}{H} + \frac{5}{8}l + H;$$

nous aurons la formule simplifiée

$$p' = \frac{p'' \times V}{\frac{R}{(1+K)\varpi} - V},$$

ou, en introduisant les valeurs numériques de p'', R, K et ϖ,

$$p = \frac{4000V}{591,716 - V}.$$

V varie avec la portée l et avec le rapport $\frac{H}{l}$ qui est le *surbaissement* de la poutre. Si on laisse $\frac{H}{l}$ constant, V s'évanouit pour $l = 0$; alors $p' = 0$. Les diverses courbes dont les ordonnées représentent, pour une même valeur du surbaissement, le poids p' en fonction de la portée l, passent donc toutes par l'origine. On voit de plus qu'elles

ont une asymptote verticale pour la valeur de l qui rend V égal à 591,716. Soit m le surbaissement $\frac{H}{l}$, on aura

$$V = \left(\frac{3}{16m} + \frac{5}{8} + m\right) l,$$

et par suite, la valeur de l qui rend p' infini est égale à

$$l'' = \frac{591.716}{\frac{3}{16m} + \frac{5}{8} + m}.$$

On trouve par cette formule :

$$\text{Pour} \quad m = \frac{1}{8}, \qquad l' = 262^{m},98,$$
$$m = \frac{1}{10}, \qquad l' = 203^{m},65,$$
$$m = \frac{1}{12}, \qquad l' = 175^{m},02;$$

Ce sont les limites extrêmes des portées des ponts à treillis pour un surbaissement donné.

La formule indique encore, pour une portée déterminée, le surbaissement qui rend p' minimum. Le minimum de p' correspond au minimum de V, lequel correspond, lorsque l reste constant, au minimum de la somme $\frac{16m}{3} + m$, ou à

$$m = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,182,$$

surbaissement compris entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{6}$. Il est indépendant de la portée. Cette haute valeur de surbaissement n'est pas admissible en général dans la pratique.

Pour $m = 0.182$, la valeur infinie de p' correspond à $l = 322^{m}.50$,

limite théorique absolue de la portée des poutres droites à treillis, dans les conditions où nous les avons supposées.

L'épure de la planche V donne le poids par mètre courant de simple voie d'une poutre à treillis pour chemin de fer, pour trois surbaissements usuels, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{12}$, les portées variant de zéro à 100 mètres. Les courbes ne sont proprement applicables qu'aux portées supérieures à 30 mètres, parce qu'au-dessous, le poids p' doit être augmenté : cette augmentation revient du reste à multiplier les ordonnées des courbes par un facteur proportionnel à la nouvelle valeur de p''.

Le tableau suivant indique sous une autre forme les poids par mètre courant des poutres à treillis de 30, 50, 70 et 100 mètres pour les divers surbaissements adoptés.

SURBAISSEMENT $m = \frac{H}{l}$	PORTÉE :			
	30 mètres.	50 mètres.	70 mètres.	140 mètres.
$\frac{1}{8}$	$p' = 480$ kilog.	$p' = 939$ kilogr.	$p' = 1451$ kilogr.	$p' = 2450$ kilogr.
$\frac{1}{10}$	$p' = 607$ kilogr.	$p' = 1126$ kilogr.	$p' = 1779$ kilogr.	$p' = 3135$ kilogr.
$\frac{1}{12}$	$p' = 706$ kilogr.	$p' = 1383$ kilogr.	$p' = 2169$ kilogr.	$p' = 4000$ kilogr.

372. Remarques. Dans un pont pour chemin de fer, dès que la portée dépasse 30 mètres, la surcharge accidentelle p_1 est constante, tandis que le poids propre p_2, surcharge permanente comprise, s'accroît à mesure que l augmente. Il arrive, dans les très-grandes portées, que p_2 surpasse p_1 : les efforts-limites R, R', R'' sont atteints dans le métal pour la charge $p_2 + p_1$; les efforts

maximum développés dans le métal lorsqu'il n'y a aucune surcharge, seront donc respectivement égaux à

$$\frac{p_2}{p_1+p_2}\times R, \quad \frac{p_2}{p_1+p_2}\times R', \quad \frac{p_2}{p_1+p_2}\times R'',$$

et ces efforts s'exercent d'une manière permanente, car ils proviennent uniquement du poids propre du pont. Il est donc nécessaire, pour que la durée de la construction soit assurée, que ces efforts réduits soient inférieurs à la limite de la résistance *constante* du métal (§ 29, 1°); on peut admettre que cette limite est, pour le fer, égale à 4 kilogrammes. Il faut donc s'assurer, après avoir fait tous les calculs, que les produits par $\frac{p_2}{p_1+p_2}$ des limites R, R', R″ sont inférieurs à 4 kilogrammes. Jusqu'à 100 mètres de portée, p_2 ne dépasse guère p_1, et $\frac{p_2}{p_1+p_2}$ est au plus égal à $\frac{1}{2}$: cette condition est donc en général satisfaite; mais au delà de 100 mètres, il n'en est plus toujours de même, d'autant plus que pour des portées aussi grandes, le rapport $\frac{H}{l}$ est nécessairement assez petit, ce qui augmente la valeur de p_2.

373. Notre formule donne des poids moindres que ceux que l'on adopte habituellement : un tel résultat était facile à prévoir. Pour établir cette équation, nous avons supposé que le métal subissait en tout point un effort voisin du maximum : nous avons dû, par conséquent, obtenir le poids minimum correspondant aux limites de charge.

On remarquera, en même temps, que la formule peut donner des poids p' aussi grands qu'on voudra; il suffit pour cela de réduire les limites R, R', R″. Le poids p' croît à mesure que ces limites diminuent, et la formule a toujours l'avantage de faire connaître le poids propre qui correspond aux limites données, et la décomposition précise de ce poids en quatre parties : bandes horizontales, paroi verticale, parties portant sur les appuis, et enfin accessoires.

RECHERCHE DU POIDS PROPRE D'UNE POUTRE A TREILLIS DE n TRAVÉES.

374. Proposons-nous de résoudre le même problème pour une poutre de plusieurs travées.

La portée totale L de la poutre se partage en deux travées de rive de longueur égale à l', et $n-2$ travées centrales, de longueur l, de sorte qu'on a

$$L = 2l' + (n-2)l.$$

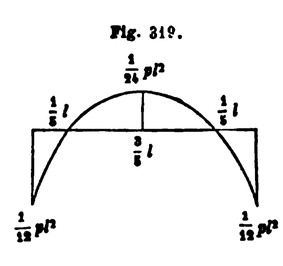
Nous supposerons, dans ce qui suit, que la poutre est *équilibrée* (§ 197) ; ce qui suppose que la longueur l' soit environ les $\frac{4}{5}$ de la longueur l; de plus, nous calculerons le poids propre en supposant une charge uniformément répartie dans toute l'étendue de la portée.

Appelons p' le poids propre par mètre courant, p'' le poids de la surcharge; la charge totale p sera égale à $p' + p''$.

1° *Volume des bandes.* Les moments fléchissants sur les appuis seront, d'après notre hypothèse, tous égaux à $\frac{1}{12}pl^2$; les moments fléchissants au milieu des travées centrales seront $\frac{1}{24}pl^2$; ils seront nuls au cinquième et aux quatre cinquièmes de chaque portée. La partie de la poutre comprise entre les points d'inflexion de chaque travée est donc assimilable à une travée unique qui aurait une portée égale à $\frac{3}{5}l$, et un moment fléchissant maximum égal à $\frac{1}{24}pl^2$; le volume correspondant de l'une de ses bandes, pour cette longueur, peut être évalué à

$$\frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{24}pl^2 \times \frac{3}{5}l}{H'R},$$

en conservant à H' et R la signification qu'ils avaient dans le problème précédent. Il faut y ajouter le volume de la bande en dehors des points d'inflexion. Or le moment fléchissant varie dans l'un de ces deux tronçons de o à $\frac{pl^2}{12}$; il est, en moyenne, égal à $\frac{pl^2}{24}$, pour une longueur égale à $\frac{l}{5}$; le volume correspondant est donc



$$\frac{\frac{pl^2}{24} \times \frac{l}{5}}{\text{H'R}},$$

ce qui fait pour les deux tronçons pareils

$$\frac{2 \times \frac{pl^2}{24} \times \frac{l}{5}}{\text{H'R}};$$

le volume total de la bande est ainsi évalué à

$$\frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{24} pl^2 \times \frac{3}{5} l + 2 \times \frac{pl^2}{24} \times \frac{l}{5}}{\text{H'R}} = \frac{17}{480} \frac{pl^3}{\text{H'R}},$$

et pour les deux bandes à

$$\frac{17}{240} \frac{pl^3}{\text{H'R}}.$$

Comme le calcul que nous faisons n'a pas une exactitude bien rigoureuse, il n'y a pas d'inconvénient à augmenter un peu ce poids; nous ajouterons donc une unité au numérateur du coefficient, ce qui donnera $\frac{18}{240}$, fraction réductible à $\frac{3}{40}$. Le volume des deux bandes dans une travée centrale, sera donc pour nous :

$$\frac{3}{40} \frac{pl^3}{\text{H'R}}.$$

Faisons le même calcul pour une travée de rive. Le moment fléchissant sur la pile où a lieu l'encastrement est $\frac{1}{8}pl'^2$; le point d'inflexion est au quart de la portée l'. Enfin, le moment fléchissant maximum est $\frac{9}{128}pl'^2$ (§ 93). Le volume d'une bande sera

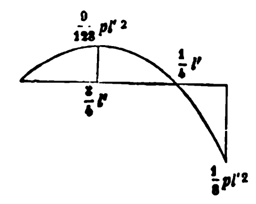


Fig. 320.

$$\frac{\frac{3}{4}\times\frac{9}{128}pl'^2\times\frac{3}{4}l'+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}l'\times\frac{1}{8}pl'^2}{\mathrm{H'R}},$$

et pour les deux bandes

$$\frac{113}{1024}\times\frac{pl'^3}{\mathrm{H'R}},$$

ou, en forçant le numérateur de 15 unités,

$$\frac{1}{8}\frac{pl'^3}{\mathrm{H'R}}.$$

Le volume total des bandes de la poutre sera donc égal au double de $\frac{1}{8}\frac{pl'^3}{\mathrm{H'R}}$, pour les deux travées extrêmes, et à $n-2$ fois le volume $\frac{3}{40}\frac{pl^3}{\mathrm{H'R}}$, pour les travées centrales; ce qui fait, en définitive :

$$\frac{\frac{1}{4}pl'^3+\frac{3n-6}{40}pl^3}{\mathrm{H'R}}.$$

2° *Volume du treillis.* — Le volume du treillis pour les travées centrales est le même que pour une travée libre : il est donc exprimable par

$$\frac{5}{8}\frac{pl^2}{\mathrm{R'}}.$$

Pour une travée de rive, l'effort tranchant varie de $\frac{3}{8}pl'$ sur la cu-

lée à $\frac{5}{8}pl'$ sur la pile; le poids du treillis est donc sensiblement proportionnel à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}pl' \times \frac{3}{8}l' + \frac{5}{8}pl' \times \frac{5}{8}l'\right), \quad \text{ou à} \quad \frac{17}{64}pl'^2,$$

quantité qu'il convient de grossir un peu pour tenir compte de l'inégalité de distribution des charges: nous prendrons donc $\frac{3}{10}$ au lieu de $\frac{17}{64}$, et le volume du treillis sera représenté par

$$\frac{\frac{3}{10}pl'^2}{R'}.$$

Le volume total du treillis sera, en tenant compte du nombre de travées,

$$\frac{\frac{3}{5}pl'^2 + \frac{5n-10}{8}pl^2}{R'}.$$

3° *Volume des parties qui portent sur les appuis.* — Les sections horizontales des parties portant directement sur les appuis sont calculées de manière à y assurer une pression de R″ kilogrammes par unité de surface, sous une charge égale à la réaction de l'appui. Or la somme des réactions de tous les appuis est égale au poids total de la poutre, ou à $p \times L$; la somme des sections est donc $\frac{pL}{R''}$, et le volume correspondant est $\frac{pLH''}{R''}$.

La somme de ces trois volumes, multipliée par le coefficient $1+K$, donne le volume total de la poutre, savoir, $\frac{p' \times L}{\varpi}$; et on a l'équation

$$\frac{p'L}{\varpi} = p \times \left[\frac{\frac{l'^3}{4} + \frac{3n-6}{40}l^3}{H'R} + \frac{\frac{3}{5}l'^2 + \frac{5n-10}{8}l^2}{R'} + \frac{LH''}{R''}\right](1+K).$$

Remplaçons p par $p' + p''$, et résolvons par rapport à p' ; il viendra une équation de la même forme que celle que nous avons obtenue pour les poutres d'une seule travée :

$$p' = p'' \times \frac{V}{\frac{1}{\varpi(1+R)} - V},$$

la quantité V représentant la fonction suivante :

$$V = \frac{1}{4}\,\frac{l'^3 + \frac{3n-6}{40}\,l^3}{LH'R} + \frac{\frac{3}{5}\,l'^2 + \frac{5n-10}{8}\,l^2}{LR'} + \frac{H''L}{R''}.$$

Cette formule est plus complexe que celle des poutres à une seule travée, et comme elle ne donne pas des résultats entièrement rigoureux, il est préférable en pratique d'employer la formule la plus simple, en prenant pour portée commune des travées successives la $n^{ième}$ partie de la portée totale L.

COMPARAISON DE DIVERS PROJETS DE PONTS DESTINÉS A FRANCHIR LE MÊME DÉBOUCHÉ.

375. Dans les calculs de l'établissement d'une poutre posée sur plus de deux appuis, on pourra donc, au lieu d'adopter un poids propre arbitrairement choisi, comme on le fait généralement, demander à la formule une valeur approximative du poids propre, comme s'il s'agissait d'une travée libre de même ouverture. Cette formule est surtout utile pour comparer les divers projets qu'on peut dresser pour un même passage.

Par exemple, un chemin de fer à deux voies doit franchir une rivière de 200 mètres de débouché total. On peut opérer ce passage, soit avec cinq travées de 40 mètres, soit avec quatre de 50, soit avec trois de 66,66. On demande quelle est la plus économique de ces trois combinaisons. On suppose connu le prix f du kilogramme de

fer, pose et autres frais compris, et le prix F de construction d'une pile en rivière.

On calculera d'abord le poids par mètre courant des ponts à deux voies de 40 mètres, de 50 mètres et de 66m.66 de portée; la surcharge à admettre est de 8 000 kilogrammes, en confondant ensemble toutes les fermes.

La poutre de 40 mètres pourra avoir 5 mètres de hauteur, ce qui fait un surbaissement d'un huitième. La poutre de 50 mètres, avec la même hauteur de 5 mètres, sera surbaissée au dixième; enfin, la poutre de 66m.66 aura une hauteur de 5m.50, le douzième environ de sa portée.

Nous ferons ici

$$K = 0.40,$$
$$R = 6000000,$$
$$R' = 5000000,$$
$$R'' = 3500000.$$

On trouvera les résultats suivants :

	Poids par mètre courant.	Poids total pour 200 mètres.
Portées de 40 mètres.	1,744 kil. . . .	348,800 kil.
de 50 mètres.	2,712 . . .	542,400
de 66m.66.	4,968 . . .	993,600

Le prix de l'ouvrage, réduit à la partie métallique et aux piles en rivières, éléments qui seuls varient d'une solution à l'autre, sera donc

Dans le premier projet.	$348\,800 \times f + 4\,F.$
Dans le second.	$542\,400 \times f + 3\,F.$
Dans le troisième.	$993\,600 \times f + 2\,F.$

Soit, par exemple, $f = 0^f.80$ et $F = 40\,000$, on trouvera :

Pour le premier projet une dépense de. . . .	439 040 fr.
Pour le second.	553 920
Pour le troisième.	874 880

Le projet qui admet cinq travées est donc le plus économique des trois.

CALCUL DE L'ÉTABLISSEMENT D'UN PONT A TREILLIS, A TRAVÉE UNIQUE, POUR CHEMIN DE FER.

376. Les données immédiates sont :

La portée l,

La hauteur H, généralement comprise entre $\frac{l}{8}$ et $\frac{l}{12}$,

La surcharge p'' par mètre courant de poutre, y compris le poids propre de la voie et du tablier.

Elle est égale à la surcharge par mètre courant de simple voie, si les deux voies sont portées par deux fermes seulement, à la moitié si elles le sont par quatre. Enfin, pour les ponts à trois fermes, on peut supposer que p'' se partage approximativement entre les trois fermes de la manière suivante :

Pour chaque travée de rive, les $\frac{3}{8}$ de la surcharge par mètre courant de simple voie;

Pour la travée commune aux deux tabliers, les $\frac{5}{4}$ de la même surcharge.

Cette répartition suppose que les pièces de pont, continues d'un tablier à l'autre, sont chargées uniformément.

En ce qui concerne la surcharge accidentelle, on la suppose habituellement, en France, de 4 000 kilogrammes au plus par mètre courant de simple voie, lorsque la portée excède 30 mètres; au-dessous de 30 mètres, la surcharge augmente à mesure que la portée diminue, de manière à devenir, pour les petits ponts de 4 mètres, égale à 8 000 kilogrammes.

Nous ferons ici $p'' = 2\,000$ kilogrammes, ce qui suppose deux fermes pour chaque voie, et une portée supérieure à 30 mètres.

On prend arbitrairement la longueur b de l'appui sur la culée; on prend aussi arbitrairement le nombre $2n$ de barres de treillis à la rencontre d'une même verticale. Ce nombre comprend n barres montantes et n barres descendantes. La suite du calcul fait voir si le nombre adopté conduit pour les barres à des sections admissibles (1).

Prenons pour limites des efforts :

	6	kilogrammes par millimètre carré		dans les bandes,
	5	*id.*	*id.*	dans le treillis,
et	$3\frac{1}{2}$	*id.*	*id.*	sur les appuis.

On calculera p' au moyen de la formule du § 370, en confondant H' et H'' avec H, et en donnant à K une valeur de 0,40.

Les calculs à faire ensuite se réduisent à remplir le tableau suivant. Nous y avons inscrit les chiffres qui correspondent à une poutre de 60 mètres de portée, dont le poids propre a été trouvé, à l'aide de la formule, égal à 1045 kilogrammes par mètre courant.

---

(1) Dans le calcul qui suit, nous avons supposé que les réactions des appuis s'exercent à l'aplomb même de la culée. On peut aussi, et cela semble préférable, prendre une portée fictive égale à $l+b$, ce qui revient à supposer que les réactions s'exercent au milieu des parties qui portent directement sur les appuis.

PORTÉE.	SURCHAR. par mèt. courant de ferme, y compris la surcharge permanente.	POIDS propre par mètre courant de ferme.	POIDS total par mètre courant de ferme.	RÉACTION verticale de la culée ou maximum de l'effort tranchant.	MOMENT fléchissant au centre de la portée.	HAUTEUR de la poutre.	SECTION minimum à donner à chaque bande horizontale au centre de la portée pour un effort de 6 kilogr.	NOMBRE de barres du treillis à la rencontre d'une même verticale.	TENSION ou compression dans une barre de treillis (inclinée à 45°) à l'aplomb de la culée.	SECTION minimum à donner aux barres du treillis, à l'aplomb de la culée, effort : 5 kilogr.	SECTION minimum au centre de la portée.	SECTION horizontale à donner aux parties qui portent sur la culée, pression : 3 1/2 kilogram^mes.	SECTION totale par mèt. cou. de cornières à donner aux rivets qui doivent joindre les band^es au treill^s. Effort, 5 kilogr. Cisaillement simple.	LONGUEUR d'appui sur une culée.	DILATATION totale de la poutre pour une variation de température de 50 degrés centigrades.
(1)	(2)	(3,	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
l	p''	p'	$p=p'+p''$	$A=\frac{1}{2}pl$	$M=\frac{1}{4}Al$	H	$\omega=\frac{M}{6H}$	$2n$	$\varphi=A\frac{\sqrt{2}}{2n}$	$\alpha=\frac{\varphi}{5}$	$\alpha'=\frac{\alpha}{4}$	$S=\frac{2}{7}A$	$\beta=\frac{A}{5}$	b	$(l+2b)\times 0,0$
mètres.	kilogr	kilogr.	kilogr.	kilogr.	kilg. mèt.	mètres.	mil. quar.	»	kilogr.	mil. qu.	mil. qu.	mil. qu.	mil. qu.	mètres.	millimètres.
60.00	2000	1045	3045	91450	1370250	5.00	45675	10	12 800	2576	644	26 100	3 654	0.75	36.9

OBSERVATIONS. — COMPOSITION DES SECTIONS.

377. *Bandes horizontales au centre de la portée.*

Nous avons trouvé une section de 45675 millimètres quarrés, colonne (8); on pourra la composer comme il suit :

	mill. qu.
4 tôles de 1000 millim. de largeur sur 10 d'épaisseur.	40 000
2 cornières de 100 mill. de branche et de 16 mill. d'épaiss. moyenne.	5 888
Section totale. . .	45 888

On obtient ainsi une section qui excède légèrement le minimum cherché. Des quatre tôles qui forment la section, une seule se prolonge dans toute l'étendue de la poutre; la seconde, la troisième, la quatrième seront interrompues de manière à suivre sur l'épure le contour de la parabole des moments. On prolonge d'ailleurs chaque feuille nouvelle en dehors de ce contour de la quantité nécessaire pour couvrir et compenser les joints des feuilles précédemment posées. Tous les autres joints doivent être compensés par des couvre-joints spéciaux.

Les trous de rivets affaiblissant les sections soumises à l'extension, on compense quelquefois cet affaiblissement en donnant aux tôles qui doivent former ces sections un léger surcroît d'épaisseur; ici l'on prendrait, par exemple, pour former la semelle inférieure de la poutre des tôles de 11 millimètres.

378. *Treillis.* — Les limites des sections des barres du treillis, colonnes 11 et 12, sont

A l'aplomb de la culée.	2576 millim. qu.
Au milieu de la portée.	644

De ces deux limites, la seconde est trop petite pour être admis-

sible en pratique, et l'on ne s'inquiétera pas de la serrer de près. Il est convenable d'ailleurs d'arrondir par excès la première. Nous prendrons en définitive une section de

200 mill. × 15 mill. = 3000, à l'aplomb de la culée,

et de

200 mill. × 7 $^1/_2$ = 1500, au centre de la portée.

Il résultera de ces augmentations de section un accroissement du poids calculé du treillis.

Les barres seront partagées en un certain nombre de groupes, 4 par exemple, comprenant 4 grandeurs de sections.

On pourrait faire varier les deux dimensions des barres, épaisseur et largeur; l'intervalle des barres d'axe en axe restant le même, le centre de la portée serait plus évidé que les extrémités.

Les cinq barres montantes et les cinq barres descendantes sont réparties à distances égales entre les deux cornières des tables. La distance verticale d'axe en axe de deux barres consécutives d'un même système s'obtiendra donc en divisant par 5 la hauteur comprise entre les deux bandes, et comme le treillis est à 45°, le quotient indiquera aussi leur distance horizontale; divisant 60 mètres par cette distance, on aura le nombre de barres *complètes* d'un même système; les barres plus courtes qui se logent dans les angles du treillis se réunissent deux par deux pour former une barre complète.

La plus grande section est de.	200 × 15
La plus petite.	200 × 7 $^1/_2$
Les deux sections intermédiaires auront, par exemple, l'une.	200 × 12
L'autre.	200 × 10

379. *Parties portant sur les appuis.* — Sur la culée, on doit trouver une section minimum de 26,100 millimètres quarrés, colonne 13. La longueur de la poutre sur son appui étant 750 millimètres, colonne 15, on pourra y placer

	millim. qu.
2 tôles de 730×10 en prolongement de la paroi verticale de la poutre, fournissant une section de.	14 600
2 tôles transversales de 300×10.	6 000
4 cornières de $\frac{80 \times 80}{10}$, aux angles des tôles portant sur les appuis.	6 560
Total.	27 160

CALCUL DE L'ÉTABLISSEMENT DES RIVURES.

380. Le rivet qui réunit deux feuilles de tôle peut être considéré, soit comme une broche que ces tôles, tirées en sens divers, tendent à cisailler, soit comme un lien qui, serrant les tôles ensemble, produit un frottement qui ne leur permet pas de glisser l'une sur l'autre. Bien que, dans cette dernière hypothèse, la tension des fibres du rivet soit supérieure à la limite de la résistance du fer (1), la rivure n'est convenable que si un serrage énergique des tôles est effectivement produit.

Deux feuilles de tôle, réunies ensemble par un rivet bien posé, ne commencent à glisser l'une sur l'autre que lorsque l'effort exercé sur elles excède le produit de 15 kilogrammes par le nombre de millimètres carrés contenus dans la section du rivet. En général on établit les calculs de la rivure en adoptant pour limite de l'effort auquel

(1) Le rivet, au moment où il va être posé, a une température qui peut varier de 1000 à 1 100 degrés centigrades (couleur cerise), mais il perd en quelques instants cette haute température, et quand la pose a lieu, on peut admettre que sa température n'est plus que de 700 degrés (rouge sombre). Le fer se dilate, pour 100 degrés, de $\frac{1}{800}$ de ses dimensions linéaires; le rivet refroidi est donc dans les mêmes conditions qu'une tige qui aurait reçu un accroissement de longueur de $\frac{7}{800}$, ce qui correspondrait à une tension de 175 kilogrammes par millimètre carré, si la proportionnalité des allongements aux forces était encore vraie pour cette haute valeur de l'allongement relatif. D'ailleurs les tôles s'échauffent un peu aussi autour du rivet mis à chaud, et leur épaisseur augmente en conséquence, ce qui soulage d'autant le retrait du rivet. En réalité, la tension du rivet est beaucoup moindre; mais la limite d'élasticité est dépassée, et le rivet se trouve placé dans des conditions de résistance toutes particulières.

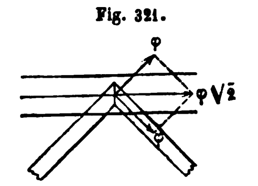
elle doit résister une charge de 5 kilogrammes par millimètre carré, ou le tiers de la charge qui produit le glissement. Cette limite de 5 kilogrammes convient également à l'hypothèse du cisaillement simple, de sorte que l'on peut admettre comme règle générale, toute théorie à part, qu'un rivet convenablement posé possède une résistance de 5 kilogrammes par millimètre carré de section.

Sans entrer dans le détail de l'application de cette règle à divers cas particuliers, nous examinerons seulement la question suivante, qui se présente d'elle-même, lorsqu'on a à calculer les rivures d'une ferme métallique à treillis.

381. *Rivure des cornières qui réunissent le treillis avec les longerons.* — Deux méthodes peuvent être suivies pour déterminer le nombre de rivets à poser sur une longueur donnée pour rattacher au longeron les cornières embrassant le treillis.

L'une de ces méthodes consiste à remarquer qu'aux points d'insertion de deux barres qui se croisent, les cornières sont sollicitées par deux forces, l'une montante, l'autre descendante, toutes deux inclinées à 45° sur la verticale; leur résultante est sensiblement horizontale, et tend à faire glisser la cornière sur le longeron. Les rivets doivent équilibrer cette tendance. Soit φ la force qui agit dans une barre, en un point donné de la portée; $\varphi \times \sqrt{2}$ sera la valeur de la résultante qui tend à produire le glissement; le nombre de rivets à placer sur les cornières dans l'intervalle de deux barres consécutives doit donc être calculé de manière que la somme des aires de ces rivets en millimètres carrés, multipliée par 5 kilogrammes, reproduise la force $\varphi\sqrt{2}$, d'où résulte que la somme des aires doit être égale à $\frac{\varphi\sqrt{2}}{5}$.

Fig. 321.



On attribuera à φ pour ce calcul la valeur maximum que cette force puisse avoir, c'est-à-dire $\varphi_0 = \frac{pl}{4n\cos\alpha}$, ou, puisque le treillis est supposé à 45°, $\frac{pl\sqrt{2}}{4n}$. La somme des aires des rivets traversant la

cornière à la jonction avec le longeron, pour un intervalle compris entre deux barres parallèles consécutives, est donc égale à $\frac{pl}{10n}$ millimètres carrés.

382. L'autre méthode s'applique aux ponts à treillis et aux ponts à poutre pleine. Elle résulte d'une interprétation de l'équation fondamentale (§§ 103 et 361)

$$dM = Adx.$$

Cette équation indique que l'effort tranchant A, en un point quelconque de la poutre, est égal à la variation $\frac{dM}{dx}$ du moment fléchissant en ce point rapportée à l'unité de longueur.

Or si l'on désigne par h la distance verticale comprise entre les cornières qui réunissent l'âme du double T aux deux semelles, et par f la force qui tend à faire glisser la cornière le long de la semelle, rapportée à l'unité de longueur, on aura $\frac{dM}{dx} = hf$; car le moment hf du couple $(f, -f)$ est ce qui s'ajoute par unité de longueur au moment M au point considéré. Donc $A = hf$, et par suite $f = \frac{A}{h}$. Il suffit donc, pour calculer le nombre de rivets à placer par mètre courant de cornière, de diviser l'effort tranchant par la distance verticale entre les cornières hautes et basses de la poutre, puis de diviser par 5 le résultat, et de chercher combien il faut de rivets d'un diamètre donné pour produire une section équivalente à ce quotient. La somme des aires des rivets par unité de longueur est $\frac{A}{5h}$ millimètres carrés.

Ces deux méthodes donnent le même résultat; en effet, la première formule, $\frac{pl}{10n}$, s'applique à l'intervalle de deux barres consécutives, ou à la longueur $\frac{h}{n}$, et par suite, rapportée à l'unité de longueur, elle se réduit à

$$\frac{\left(\frac{pl}{10n}\right)}{\left(\frac{h}{n}\right)} = \frac{pl}{10h},$$

expression identique à $\frac{A}{5h}$, lorsqu'on attribue à A sa valeur maximum $\frac{pl}{2}$.

CHAPITRE III.

EXAMEN DES DIVERS TYPES DE POUTRES DROITES.

383. Les ponts à poutre droite n'exercent pas de poussée horizontale sur leurs appuis, du moins dans les températures moyennes ; les variations de température donnent lieu à des poussées qui restent toujours très-faibles, pourvu qu'on interpose entre la poutre et ses appuis des rouleaux ou des glissières laissant toute liberté à la dilatation du métal. On fixe seulement les poutres sur l'un de leurs appuis voisins du centre de leur longueur totale. Pour donner la même liberté à la voie, il suffit, à l'entrée et à la sortie du pont, de fendre en long chaque rail sur une petite longueur, et de laisser l'une des moitiés glisser le long de l'autre en suivant le mouvement général du tablier métallique.

Le montage des ponts à poutre droite peut se faire d'une infinité de manières.

On peut construire le pont directement en place, en élevant d'abord un échafaudage analogue aux cintres des ponts en maçonnerie.

On peut construire les poutres à plat sur échafaudage, à côté de leur place définitive; il ne reste plus alors qu'à les lever.

On peut les construire à plat sur chantier, les lever, et les amener en place, soit en les roulant sur le remblai, soit en les faisant flotter.

On peut encore construire une poutre continue, et la pousser sur ses appuis au fur et à mesure de son avancement, et même il est possible de faire servir la poutre à la construction de ses appuis successifs. C'est ce qu'on a fait au pont de Fribourg : la poutre continue était poussée jusqu'à ce qu'elle eût, sur le dernier appui posé, une saillie égale à la longueur d'une travée; elle était raidie par des haubans, et servait d'appontement pour descendre les éléments de la colonne métallique qui devait former l'appui suivant.

La forme de poutre droite laisse aux cours d'eau le plus grand débouché possible.

C'est la forme qui convient le mieux aux passages des fleuves pour lesquels les fondations sont difficiles; les piles en rivières ne sont jamais sollicitées au renversement, ce qui convient particulièrement aux fondations tubulaires. Les effets des tassements, s'il s'en produit, sont plus faciles à réparer que dans tout autre système.

Pour les petites portées, la poutre droite est de toutes les formes celle qui demande le moins d'épaisseur pour les tabliers. Aussi est-elle employée de préférence à toute autre à la rencontre des voies qui se croisent, lorsqu'on n'a pas la liberté d'écarter leurs différents niveaux.

Enfin la poutre droite est entièrement indifférente au biais des ouvrages.

384. Les ponts à poutre droite se prêtent à une multitude de dispositions particulières.

On peut placer le tablier :

1° Au bas des fermes;

2° A mi-hauteur des fermes;

3° Au haut des fermes.

1° Quand le tablier est en bas des fermes, il est soutenu par des pièces transversales appelées *pièces de pont*. Si la ferme n'a qu'une

faible hauteur, elle forme garde-corps de chaque côté du tablier; mais cette disposition n'est admissible que pour les hauteurs libres très-limitées. Au delà d'une certaine hauteur, la poutre doit être contreventée par le haut, ce qui suppose une hauteur totale assez grande pour qu'on puisse entretoiser les deux fermes conjuguées par-dessus la voie.

Quelques constructeurs attachent les pièces de pont au-dessous de la semelle inférieure des fermes. Cette méthode est peu rationnelle, car il est avantageux de donner à la ferme toute la hauteur disponible.

Les ponts pour chemin de fer ont en général deux voies. Tantôt on les réunit sur un tablier unique, en les plaçant toutes deux sur les mêmes pièces de pont. La pièce de pont a dans ce cas une longueur de 7 à 8 mètres, et une hauteur de $0^{m},70$ au minimum. Cette grande longueur donne de l'élasticité à la pièce de pont. La disposition que nous décrivons présente en outre plusieurs avantages. D'abord elle permet de prolonger en ligne droite les deux voies aux abords des ponts; elle conduit de plus à une économie de métal. Un pont de chemin de fer est rarement soumis dans l'exploitation à une surcharge totale sur les deux voies à la fois. En général, une seule voie est chargée intégralement, l'autre restant vide. La surcharge se répartit alors inégalement entre les deux fermes qui supportent le tablier, et la totalité du métal contribue toujours à supporter ce poids additionnel. Il n'en est pas de même pour un pont à deux tabliers indépendants, le passage d'un train sur une voie n'utilisant en rien l'élasticité de l'autre voie. Par cette raison, on pourrait sans danger réduire d'un tiers environ les surcharges admises pour une voie unique, quand on les applique aux tabliers à double voie. Il est vrai que, par contre, les pièces de ponts sont plus longues que pour une simple voie, et sont aussi plus lourdes. Un autre avantage des ponts qui ont deux voies sur un même tablier, c'est qu'ils ont une grande largeur transversale, ce qui permet d'augmenter leur hauteur en proportion.

Les ponts à tabliers indépendants ont des pièces de pont de $4^{m},65$ environ de portée. L'entre-voie est plus grande sur le pont qu'aux

abords, et par suite les voies doivent s'écarter pour entrer chacune sur le tablier qu'on lui destine, puis se rapprocher après qu'elles en sont sorties, ce qui fait deux courbes à inflexion. Ce système demande un peu plus de métal que le système à tablier unique; mais il a l'avantage de faciliter l'entretien du pont, et de permettre l'ajournement de la construction d'une moitié de l'ouvrage.

La disposition mixte qui consiste à avoir trois fermes, dont l'intermédiaire soutient à la fois les deux tabliers, a les inconvénients des ponts à deux tabliers séparés, en ce qui concerne la déviation des voies aux abords; elle est moins économique que le système à tablier unique; elle ne donne ni la possibilité d'ajourner une partie de la construction, ni aucune facilité pour l'entretien. Enfin elle ne paraît présenter aucun avantage.

2° La position de la voie à mi-hauteur des fermes permet d'entretoiser les fermes par-dessous le tablier; le haut des fermes s'élève en garde-corps au-dessus des rails. Telle est la coupe du pont de Langon, sur la Garonne. On pense qu'elle a pour effet de réduire, lors du passage des trains, la communication des vibrations dans le métal des fermes.

3° Lorsque la voie est en haut des fermes, on peut, ou bien supprimer les pièces de pont, et faire porter directement chaque rail sur une ferme; les accotements doivent alors être en encorbellement sur les fermes extérieures; on les soutient par des bras qui aboutissent au garde-corps;

Ou bien donner aux fermes un espacement un peu différent de celui des rails, et poser les voies sur de petites poutrelles en fer à double T, prolongées de manière à comprendre aussi la largeur de l'accotement. On obtient par là plus d'élasticité dans le tablier, en perdant, il est vrai, un peu de hauteur pour les fermes.

Enfin lorsque, par une raison quelconque, on ne peut employer que deux fermes pour soutenir les deux voies, ce qui a lieu, par exemple, quand les fermes doivent reposer sur deux colonnes métalliques, on les réunit par en haut au moyen d'une véritable pièce de pont.

Dans tous les cas, on n'est jamais embarrassé pour les entretoise-

ments, qui peuvent prendre toute la hauteur de la poutre au-dessous du tablier.

HAUTEUR DE LA POUTRE DROITE.

385. Dans certains ponts à poutre droite, la hauteur de la poutre n'est pas la même en tous les points de la portée; elle est maximum au milieu, et elle se réduit à quelques centimètres sur les appuis. On en voit un exemple remarquable dans le pont construit à Athlone, sur le Shannon, pour le passage de la ligne de Dublin à Galway. Mais cette disposition est loin d'être entièrement satisfaisante, et l'on peut y faire plusieurs objections.

La forme *extérieure parabolique*, qu'on a l'habitude de donner aux pièces de fonte, telles que balanciers de machine à vapeur, bielles, jambes de force, etc., n'est pas aussi convenable dans les constructions en tôle, ainsi que nous l'avons déjà fait observer (§ 144); en effet, il est préférable, quand on emploie le fer laminé, d'obtenir l'égalité de résistance en faisant varier, d'une section à l'autre, l'épaisseur ou le nombre des tôles assemblées. La hauteur de la section est un des éléments principaux de la résistance; généralement, plus elle est grande, plus elle permet d'économiser de matière, et ce principe s'applique à toutes les sections de la poutre, à celles qui sont voisines des culées comme à celles qui sont au centre de la portée. Il y a donc un avantage assuré à donner partout à la poutre toute la hauteur qu'elle peut avoir, sauf à réduire les épaisseurs en proportion des efforts que chaque point des diverses sections doit subir.

La forme parabolique pour le dessus des poutres droites a de plus le double inconvénient de restreindre à une faible longueur la région où il est possible d'entretoiser les fermes par le haut, et d'exiger que les fermes soient coupées sur tous les appuis (1). Au point de vue de

(1) La forme que nous avons indiquée § 237 évite cet inconvénient.

l'économie, elle est donc très-inférieure à la forme de poutre droite continue à plusieurs travées.

La poutre tubulaire qui franchit le détroit de Menai n'a pas en tous points la même hauteur. L'arête supérieure de cette poutre dessine une parabole dont le sommet se trouve au-dessus de l'appui central. La hauteur excède à peine 7 mètres aux deux bouts du pont, et dépasse 9 mètres au milieu. Cette altération n'a eu d'autre objet que de donner au pont un aspect un peu plus satisfaisant.

En définitive, la forme la plus convenable pour une poutre droite est celle qui donne à la poutre une hauteur uniforme. Cette hauteur varie généralement du huitième au douzième de la portée; en moyenne on peut prendre le dixième. Dans les cas où l'on est gêné par des conditions particulières, on descend au-dessous du rapport du douzième, mais alors les flèches prises par la poutre tendent à devenir de plus en plus grandes.

La hauteur ne doit pas excéder une fois et demie environ la largeur du pont (§ 365), de sorte que les ponts à un seul tablier pour les deux voies, dont la largeur hors œuvre atteint 9 mètres, permettent de donner aux poutres une hauteur de 13 à 14 mètres, tandis que les ponts à tabliers indépendants, qui n'ont quelquefois que 6 mètres de large, reçoivent des hauteurs de 9 mètres au maximum.

Enfin, si la voie est au bas des fermes, il faut compter de $0^m,60$ à $0^m,80$ pour l'épaisseur du tablier, et si on limite à $1^m,70$ la hauteur libre de la poutre en garde-corps, on voit que le maximum de la portée qu'on peut franchir sans contreventement supérieur serait, avec la proportion du dixième, égal à

$$(0.80 + 1.70) \times 10 \text{ ou à } 25 \text{ mètres.}$$

Au delà il faudrait un contreventement supérieur, lequel devrait être situé à $4^m,50$ environ au-dessus du plan des rails; ajoutant $0^m,30$ pour épaisseur de ce contreventement, on a pour hauteur totale, au minimum,

$$0.80 + 4.50 + 0.30 = 5^m.60;$$

ce qui correspond à une portée moyenne de $5,60 \times 10$, ou de 56 mètres.

Ces limites n'ont rien d'absolu, puisque l'épaisseur du tablier, celle du contreventement et le rapport de la hauteur à la portée, sont des éléments très-variables d'un pont à l'autre. Elles montrent pourtant que les portées comprises entre 25 et 50 mètres sont peu commodes pour la construction de ponts avec voie au bas des fermes.

POUTRES PLEINES ET TREILLIS DES DIVERS SYSTÈMES.

386. Les ponts à poutre droite sont à poutre pleine ou à treillis.

Nous avons déjà comparé ces deux systèmes au point de vue de l'économie du métal (§ 367). Nous avons reconnu qu'à égalité de résistance, la poutre pleine est, en général, plus économique que le treillis.

Le vrai défaut de la poutre pleine, pour les grands ouvrages, est l'aspect même de l'ouvrage.

Le treillis peut être à mailles serrées ou à mailles lâches; il peut être à barres plates ou à barres de forme plus étudiée; il peut être simple ou double.

L'avantage qu'on trouve à serrer les mailles d'un treillis est de réduire le poids des barres prises individuellement. On est quelquefois amené, quand la maille est lâche, à donner aux barres un poids supérieur à la limite du poids de métal qu'on peut manier au laminoir. On est alors forcé de diviser la barre dans le sens de la longueur, ce qui revient à augmenter le nombre total des barres. Il y a aussi moins de discontinuité dans la transmission des efforts quand le treillis est serré que quand les barres sont très-écartées. Par contre la raideur des pièces augmente avec leurs dimensions, lesquelles sont d'autant plus grandes que le nombre des barres est plus petit.

DISCUSSION D'UNE OBJECTION CONTRE LES POUTRES A TREILLIS A BARRES PLATES.

387. Les barres qui constituent un treillis simple ont en général un assez faible équarrissage; parmi ces barres, les unes sont étendues, les

comprimées; aussi certains ingénieurs regardent-ils ces der-
barres comme placées dans des conditions très-défavorables
stance, et proposent-ils de les remplacer par des cornières,
fers à T, par des rails Barlow, présentant des dimensions
s plus grandes dans tous les sens, ou bien de proscrire d'une
absolue les treillis simples, *Lattice*, pour y substituer les
doubles, *Braced*, où les barres comprimées sont elles-mêmes
es à treillis, offrant de la résistance aux flexions latérales.
contester l'efficacité de ces moyens, qui ajoutent assurément
deur de la poutre, il est aisé de reconnaître que l'objection
x ponts à treillis simple n'a pas toute la valeur qu'on peut
ité de lui attribuer.
elons ici (§ 119) que, E désignant le coefficient d'élasticité de
ère qui compose une pièce comprimée par ses abouts, I le
moment d'inertie de la section transversale de la pièce par
à toute droite menée dans son plan par son centre de gravité,
enfin la longueur libre de la pièce, le calcul indique pour va-
la force φ qui produit une flexion, l'expression

$$\varphi = K^2\pi^2 \frac{EI}{L^2},$$

quelle π est le rapport de la circonférence au diamètre, et K
er quelconque, de sorte que la moindre valeur de φ corres-
la moindre valeur de K, ou à K égal à l'unité; la pièce ne
donc pas sous l'action d'une force

$$\varphi < \pi^2 \frac{EI}{L^2}.$$

posé, soient b la largeur et a l'épaisseur d'une barre de treillis
soit la longueur libre; on aura

$$I = \frac{1}{12} a^3 b,$$

$$\frac{\varphi}{ab} < \frac{1}{12} \pi^2 \frac{Ea^2}{L^2};$$

$\frac{\varphi}{ab}$ est la pression moyenne par unité de section dans la barre. Si l'on adopte pour limite de cette pression 5 kilogrammes par millimètre quarré, le maximum de $\frac{\varphi}{ab}$ sera 5 000 000, et remplaçant π et E par leurs valeurs 3.14 et 2×10^{10}, on voit qu'il suffit, pour que la flexion ne tende pas à se produire, que l'on ait

$$\frac{a}{L} > \sqrt{\frac{50\,000 \times 12}{(3.14)^2 \times 2 \times 10^{10}}},$$

ou, en effectuant les opérations,

$$\frac{a}{L} > 0,017.$$

Cette inégalité donne une limite inférieure de la moindre dimension de la barre comprimée en fonction de la longueur L. Reste à savoir ce que c'est que la longueur L. Si les deux systèmes de barres n'étaient pas rivés l'un à l'autre à chaque intersection commune, L serait la longueur de la portion de la barre qui reste libre entre deux montants verticaux consécutifs ; en appelant L' la distance horizontale entre ces montants, le treillis étant supposé à 45°, on aurait $L = L'\sqrt{2} = L \times 1.41$. En général les montants verticaux sont également espacés dans la longueur de la ferme et tombent à l'aplomb des pièces de pont, quand il y en a ; de sorte que L' est au plus égal à 2m.50 ; donc L est au plus égal à 3m.525.

Le calcul conduirait donc pour a à une limite inférieure de 0m.060, épaisseur évidemment exagérée.

Ce résultat est inadmissible pour une barre plate, mais nous y avons été conduits par une pure hypothèse, car la rivure d'une barre comprimée avec toutes les barres qu'elle rencontre influe évidemment sur la résistance de cette barre à la flexion latérale, et réduit la longueur libre L à une faible fraction du maximum que nous avons adopté dans le calcul ; si L est seulement réduit au quart de sa valeur, la limite inférieure de a tombe immédiatement à 0m.015. Pour que cette réduction soit possible, il suffit qu'un certain nombre de

points équidistants restent fixes dans la barre, sans même qu'ils soient appelés à exercer un effort appréciable (§ 121).

D'ailleurs les barres du treillis ne sont pas assimilables à des pièces dont les deux extrémités sont libres de faire un angle quelconque avec la droite qui les joint l'une à l'autre, et suivant laquelle s'exerce l'effort de compression. Elles sont comme encastrées par leur rivure avec les pièces qui les rattachent aux bandes horizontales et à la paroi verticale à l'aplomb de la culée; les montants verticaux maintiennent encore ces barres en divers points de leur longueur; de sorte que l'application du calcul est attaquable à ce nouveau point de vue, et doit conduire à des résultats trop élevés.

Enfin les deux systèmes de barres, rivés l'un à l'autre, forment en réalité un système unique, et ce qui se passe dans l'un d'eux a sur l'autre une influence nécessaire. Admettons pour un instant une flexion dans les barres comprimées; cette flexion ne peut se produire qu'en entraînant une flexion pareille dans les barres étendues; or la flexion des barres étendues ne peut avoir lieu sans une augmentation du degré d'extension de ces barres, car nous devons admettre que les montants verticaux de la poutre s'opposent à toute variation de hauteur de la ferme (1). Ainsi le résultat nécessaire d'une flexion latérale du treillis, c'est l'augmentation des tensions dans toutes les barres du système étendu. Mais il y a toujours dans chaque section transversale de la poutre tendance vers l'équilibre entre l'effort tranchant, les tensions des barres étendues et les compressions des barres comprimées; si donc les tensions augmentent, comme l'effort tranchant reste toujours le même, et que d'ailleurs les directions des

---

(1) Les montants verticaux sont surtout très-utiles pour les ponts où la voie est au bas des fermes. Les constructeurs qui donnent de la raideur aux barres du treillis suppriment du même coup les montants verticaux; mais alors la répartition des efforts extérieurs entre les diverses barres de treillis n'est plus assurée d'une manière aussi égale; car la charge ne se transmet du tablier aux fermes qu'aux points d'attache de chaque pièce de pont; elle s'exerce donc d'abord sur les barres de treillis qui aboutissent au droit des pièces de pont, et se transmet fort indirectement aux barres intermédiaires; il n'en est plus de même si la paroi évidée est renforcée par des montants verticaux, rattachant pour ainsi dire chaque pièce de pont à toutes les barres issues des intervalles compris entre les pièces voisines.

forces ne subissent aucun changement appréciable, il faut bien que les compressions diminuent, c'est-à-dire que la flexion latérale diminue elle-même. La flexion, si elle est possible, est ainsi essentiellement limitée, puisque, dès qu'elle commence, l'excès de tension qui se développe dans les barres étendues vient soulager les barres comprimées, et prévient, par suite, l'augmentation de la flexion.

L'objection faite aux barres plates ne tient pas compte, en résumé, de la solidarité des deux systèmes de barres du treillis : la rivure des barres qui se croisent suffirait pour la combattre. L'expérience, du reste, prouve que, dans les conditions ordinaires, les déviations latérales du treillis, s'il y en a, sont renfermées dans des limites extrêmement étroites. Les treillis sont souvent composés de barres qui s'infléchissent pour passer de part et d'autre de la feuille qui les rattache aux tables horizontales. Ce tracé est peu favorable, puisque la compression des barres d'un système tend à les courber davantage, tandis que l'extension des barres de l'autre système tend à les redresser ; mais le seul inconvénient qui en résulte pour la stabilité du pont, est la nécessité où l'on se trouve de renforcer les rivets qui unissent les deux systèmes. La résistance de la ferme n'en reçoit aucune espèce d'atteinte. Nous pensons donc que la substitution des fers à T, de cornières, ou de rails Barlow aux barres plates d'un treillis lattice, n'est pas indispensable. Le treillis double, autre solution destinée à prévenir la flexion des barres, présente aussi un inconvénient assez grave, celui de la complication des assemblages. Un treillis simple, raidi par des montants verticaux qu'on utilise d'ailleurs pour le contreventement et l'entretoisement des fermes, et qui a l'avantage de répartir avec une grande uniformité les efforts entre toutes les barres, est peut-être encore la solution la plus satisfaisante du problème des ponts à grande portée, toutes les fois qu'on ne se résigne pas à l'emploi plus économique des ponts à poutre pleine.

Dans tous les cas, ce qu'il faut, c'est ne pas demander aux barres un travail exagéré. Les ponts, comme on en voit, où la barre du treillis supporte plus de 6 kilogrammes par millimètre carré, et où

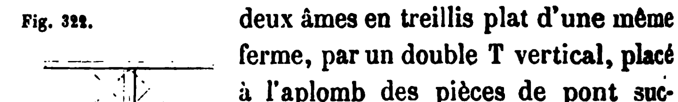
elle est fixée par un seul rivet aux cornières des tables horizontales, sont exposés à des avaries qu'il était facile de prévoir d'avance. Ajoutons que le ferraillement observé dans certains ponts à treillis, près des culées et près des piles, doit être attribué, non au système de treillis pris en lui-même, mais à l'oubli du calcul préalable d'un point essentiel, la résistance à l'écrasement dans les sections horizontales des parties portant directement sur les appuis (§ 370). Dans plusieurs ouvrages insuffisamment étudiés, il a fallu compléter après coup, par l'addition d'armatures en fonte, l'ossature de la poutre sur ses appuis. L'avantage même des constructions en fer résulte de ce que tout peut y être calculé de telle sorte, qu'on arrive à proportionner partout la quantité de matière aux efforts que cette matière aura à subir. Le système ainsi composé est voisin de l'équilibre strict; il faut donc que tous les points y soient traités avec un soin égal; autrement une insuffisance en un point particulier se trahit sur-le-champ par une déformation ou par un accident plus grave. Les économies sont admissibles quand elles sont réalisées par un emploi plus intelligent de la matière, mais non quand elles résultent de suppressions ou de réductions arbitraires dans des pièces qui toutes ont leur utilité.

388. Lorsqu'on n'emploie pas les barres plates, on se sert pour les treillis de fers à T, ou de rails Barlow, ou enfin de barres en Ω; ce dernier type se rencontre en Autriche sur le réseau de la compagnie des chemins de fer de l'État. Les barres des deux systèmes sont rivées à la jonction des semelles plates qui s'appliquent l'une contre l'autre, et la partie cylindrique de l'Ω leur donne de la raideur dans tous les sens. L'aspect des ponts construits dans ce système est très-satisfaisant, grâce aux jeux d'ombre et de lumière produits par les saillies des parties courbes du treillis. La poutre n'a pas de montants verticaux, puisqu'ils seraient inutiles pour la raidir. Dans la plupart des ponts construits sur ce réseau, les barres du treillis sont inclinées à 45° sur la verticale au centre de la portée, et se redressent graduellement jusqu'à 25° près des appuis. La maille n'est carrée qu'au milieu de la poutre, et forme une suite de losanges de plus en plus aigus, à mesure qu'on approche des deux bouts de la

travée. Cette disposition est critiquable, aussi bien que celle qui consiste à faire varier la hauteur d'une poutre d'un point à l'autre de sa longueur; car, le minimum du poids du treillis correspondant à une inclinaison de 45° dans toute section, la variation de l'angle des barres avec la verticale ne saurait être économique. Elle peut conduire, il est vrai, à adopter dans tout le pont un même modèle de barres; mais, outre qu'elle donne un excès de poids, elle nuit à l'aspect de la poutre. De loin, l'œil cherche dans ces treillis une surface cylindrique découpée diagonalement en carrés égaux, qui se présenteraient en vraie grandeur au centre de la poutre, et en raccourci vers les extrémités.

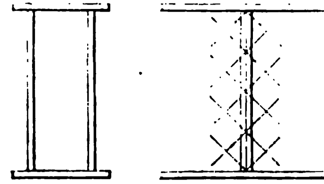
Les fers spéciaux se prêtent plus difficilement que les fers plats aux variations des sections. Ils ont aussi l'inconvénient de toutes les formes exceptionnelles : la fabrication en est plus difficile, le prix de revient plus élevé, la pose plus délicate.

389. Le treillis, comme nous l'avons vu, peut être double ou simple; le treillis double est le système qui assure aux fermes la plus grande rigidité. L'âme de la ferme est dédoublée, et ses deux parois parallèles sont entretoisées l'une avec l'autre, barre comprimée à barre comprimée, par une série d'éléments qui en découpent l'intervalle en triangles à peu près équilatéraux. Ce système a été appliqué au pont de Drogheda, sur la Boyne, en Irlande, et à un grand nombre d'autres ouvrages.



Un système mixte de treillis double consiste à entretoiser les deux âmes en treillis plat d'une même ferme, par un double T vertical, placé à l'aplomb des pièces de pont successives.

Fig. 322.



Le seul inconvénient de ces divers systèmes est la complication des tracés et les sujétions du montage.

Les ponts à poutre pleine peuvent aussi recevoir une âme double. On est quelquefois conduit à ce dédoublement par l'insuffisance de la hauteur libre de la poutre. Il faut alors séparer en deux la table supérieure. Cette solution a été adoptée pour le pont du Taglia-

mento, sur le chemin de fer qui rattache la ligne de Vienne à Trieste à la ligne de Venise à Vérone. On n'avait là qu'une faible hauteur disponible entre le plan des rails et le niveau des hautes eaux. Le rail est noyé entre deux poutres jumelles, dont les parois verticales se réunissent en bas à une semelle commune. Des cloisons placées de distance en distance entretoisent ces deux parois. On ne s'est résigné à cette disposition peu commode, qu'à cause de l'insuffisance de la hauteur des fermes.

Fig. 322.

ÉQUILIBRE DES POUTRES AMÉRICAINES.

390. Les divers systèmes des poutres américaines sont classés en sept catégories principales dans le rapport de mission de M. Malézieux aux États-Unis (1870).

Le premier type est celui du treillis simple, formé par la juxtaposition des triangles égaux; nous avons donné (§§ 353 et suiv.) la théorie de la répartition des pressions et des tensions dans un tel système.

Les six autres types ont un caractère commun : celui *d'éviter qu'une même pièce soit appelée successivement à travailler à l'extension, puis à la compression*. Les ingénieurs américains paraissent attacher une grande importance à cette condition; nous en avons nous-même signalé plusieurs fois l'utilité (§ 200). Il ne faut pourtant rien exagérer. Au point de vue théorique, il n'y a pas de différence appréciable entre une réduction d'effort de 6 kilogrammes à 2 par millimètre carré, la pièce travaillant dans le même sens, et une variation de 2 kilogrammes à la traction à 2 kilogrammes à la compression. Tout ce qu'on peut raisonnablement exiger, c'est que les pièces appelées à travailler dans les deux sens soient soumises à un moindre effort que les autres; telle est la règle qu'on suit dans les machines à vapeur pour les tiges des pistons, qui peuvent développer sans inconvénient des poussées et des tractions alternatives. Observons d'ailleurs que la loi de conti-

nuité étant toujours sensiblement suivie dans un ouvrage bien construit, les pièces qui travaillent alternativement à l'extension et à la compression sont situées dans les régions voisines des points où les efforts changent de signe en passant par zéro; il en résulte que les nécessités de la construction appellent forcément dans ces régions un certain excès de matière, et que les pièces se trouvent ainsi naturellement nourries à la demande du travail alternatif qu'on leur impose.

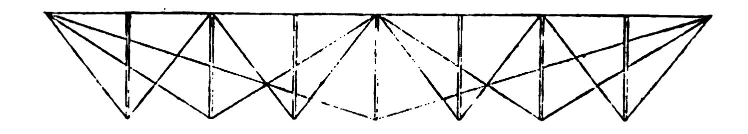
L'adoption de la règle américaine conduit, dans certains cas, à des systèmes dont les organes ne travaillent pas tous à la fois : pour une position donnée des charges, une partie des pièces est réduite à l'état parasite, et ne contribue en rien à les équilibrer. Une telle pièce passe subitement de l'effort total à zéro, variation qui n'est pas sans inconvénient pour la conservation de la pièce et de ses assemblages.

391. Les six classes que nous avons annoncées sont :

1° Le système Fink, ou poutre à poinçons, analogue à l'arbalétrier de la charpente Polonceau;

Fig. 324.

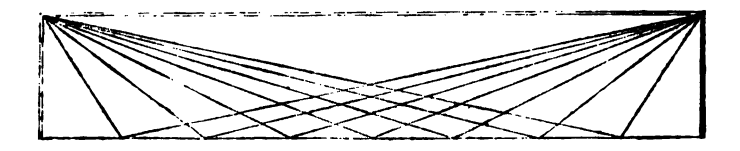
Tablier supérieur (Deck bridge).



2° Le système Bollmann;

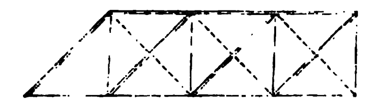
Fig. 325.

Tablier inférieur (through bridge).



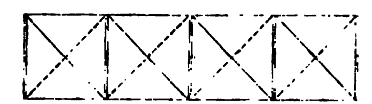
3° Le système Howe ou Jones;

Fig. 326.



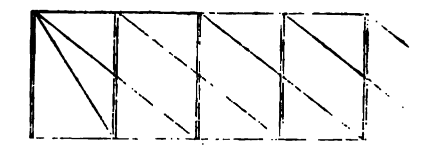
4° Le système Murphy Whipple;

Fig. 327.



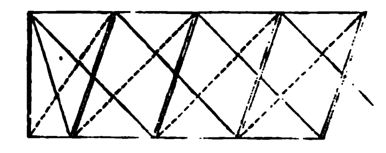
5° Le système Linville;

Fig. 328.



6° Le système Post.

Fig. 329.



Dans ces diagrammes, les traits simples indiquent les pièces étendues, les traits doubles les pièces comprimées, les traits ponctués les pièces qui ne supportent aucun effort dans l'hypothèse d'une répartition égale de ses surcharges, mais qui peuvent être appelées à développer des efforts lorsque la surcharge se déplace.

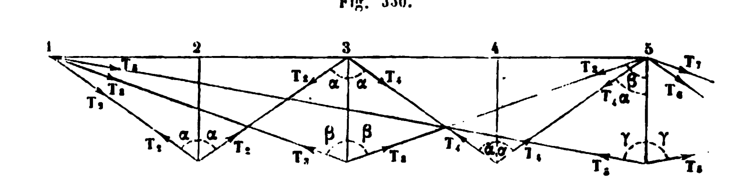
Dans le dernier système, l'inclinaison des barres comprimées change de sens à partir du milieu de la travée.

Si l'on examine attentivement les quatre derniers systèmes, on voit qu'ils appartiennent tous à un seul et même type, identique comme théorie à celui des poutres américaines en charpente de Howe, étudiées dans le chapitre suivant. L'identité est complète pour le système n° 3 (Howe ou Jones). Le système n° 4 n'en diffère que par l'échange des compressions et des extensions, et les formules de l'équilibre intérieur restent les mêmes. Le système Linville n'est que le système Murphy Whipple *doublé*, de la même manière qu'on peut *doubler* le système de Howe (§§ 397 et 414). Rien n'empêcherait de le tripler, seulement on ne sait plus au juste, quand on superpose ainsi plusieurs systèmes simples, comment les charges se répartissent entre chacun des systèmes simples réunis dans le système total. Le système Post, enfin, est le système Linville modifié par l'inclinaison des poteaux verticaux : les procédés de calcul de cette poutre seraient encore les mêmes, sauf à tenir compte de cette inclinaison. Ces quatre types ne donnent donc pas lieu à une théorie nouvelle, et il nous suffit d'étudier les systèmes 1 et 2.

SYSTÈME FINK.

392. Nous prendrons pour exemple une poutre à 8 entre-boulons, dont nous ne représenterons qu'une moitié sur la figure.

Fig. 330.



Soient P_2, P_3, P_4,.... P_8 les poids qui pèsent sur le tablier aux points 2, 3,..., 8 où viennent aboutir les poinçons. Les tensions des deux tendeurs qui soutiennent le pied d'un même poinçon sont égales, car elles équilibrent le poids de ce poinçon, grossi, s'il y a lieu, des composantes verticales des tensions qui s'exercent à son sommet. Les deux composantes sont égales, parce qu'elles font des angles égaux avec la résultante.

On aura donc

$$2T_2 \cos\alpha = P_2,$$
$$2T_3 \cos\beta = P_3 + (T_2 + T_4) \cos\alpha,$$
$$2T_4 \cos\alpha = P_4,$$
$$2T_5 \cos\gamma = P_5 + (T_3 + T_4) \cos\beta + (T_4 + T_6) \cos\alpha,$$
$$2T_6 \cos\alpha = P_6,$$
$$2T_7 \cos\beta = P_7 + (T_6 + T_8) \cos\beta.$$
$$2T_8 \cos\alpha = P_8,$$

De ces équations, on tire

$$T_2 = \frac{P_2}{2\cos\alpha},$$
$$T_3 = \frac{1}{2\cos\beta}\left(P_3 + \frac{P_2 + P_4}{2}\right),$$
$$T_4 = \frac{P_4}{2\cos\alpha},$$
$$T_5 = \frac{1}{2\cos\gamma}\left[P_5 + \frac{1}{2}\left(P_3 + P_7 + \frac{P_2 + P_4 + P_6 + P_8}{2}\right) + \frac{1}{2}(P_4 + P_6)\right].$$
$$T_6 = \frac{P_6}{2\cos\alpha},$$
$$T_7 = \frac{1}{2\cos\beta}\left(P_7 + \frac{P_6 + P_8}{2}\right).$$
$$T_8 = \frac{P_8}{2\cos\alpha},$$

La compression du longeron supérieur est :

de 1 à 3 . . . . . $T_2 \sin\alpha + T_3 \sin\beta + T_5 \sin\gamma$,
au point 3 . . . . $T_3 \sin\beta + T_5 \sin\gamma$,
de 3 à 5 . . . . $T_3 \sin\beta + T_5 \sin\gamma + T_4 \sin\alpha$,
au point 5 . . . . $T_5 \sin\gamma$,

et ainsi de suite.

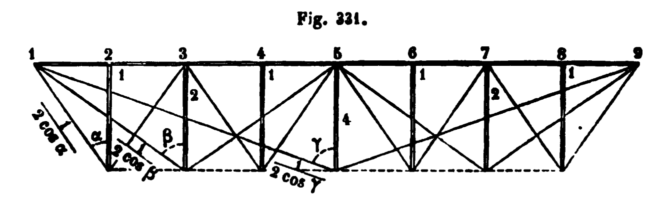
Les compressions des poinçons sont :

au point 2 . . . . . P_2,
— 3 . . . . . $2T_3 \cos\beta$,
— 4 . . . . . P_4,
— 5 . . . . . $2T_5 \cos\gamma$,....

en d'autres termes, ce sont les valeurs des premiers membres des équations d'équilibre posées ci-dessus.

Appliquons ces formules à une poutre à 8 entre-boulons, les poinçons étant chargés chacun d'un poids égal à l'unité. Les compressions des poinçons et les tensions des tiges obliques sont inscrites sur la figure suivante. Le double trait indique une pièce comprimée; le trait simple une pièce étendue.

Fig. 331.



Compressions dans le longeron supérieur :

de 1 à 3 ..... $\frac{\tang\alpha}{2} + \tang\beta + 2\tang\gamma$,

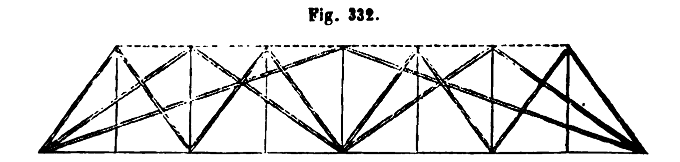
au point 3 .... $\tang\beta + 2\tang\gamma$,

de 3 à 5 .... $\tang\beta + 2\tang\gamma + \frac{\tang\alpha}{2}$,

au point 5 .... $2\tang\gamma$.

Le système Fink se prête, par un simple renversement, à la solution inverse, qui amène le tablier à la partie inférieure; les barres obliques travaillent alors à la compression, à la façon des arbalétriers, et les verticales à l'extension.

Fig. 332.



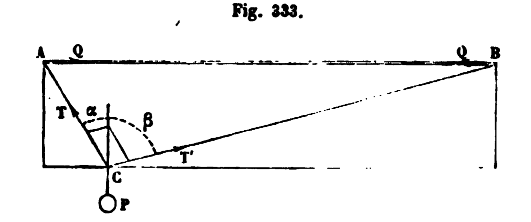
Enfin rien n'empêche de placer le tablier en bas du système te que nous l'avons décrit d'abord, et de multiplier le nombre des entre-boulons.

SYSTÈME BOLLMANN.

393. Le système Bollmann a une certaine analogie avec les Bowstrings de Brunel. Les tensions développées dans l'ouvrage, reportées

toutes aux points A et B, sont équilibrés par l'intermédiaire d'une pièce comprimée AB. Seulement chaque point C du tablier est soutenu in-

Fig. 233.



dividuellement par le système des deux tendeurs AC, BC, qui viennent s'y réunir.

T et T' étant les tensions de chacun de ces tendeurs, et P le poids qui pèse en C sur le tablier, on aura

$$T = P \times \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad T' = P \times \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

en appelant α et β les angles des tendeurs avec la verticale.

La compression Q de la pièce supérieure sera égale à

$$Q = T\sin\alpha = T'\sin\beta = \frac{P\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Il y a un certain intérêt à rendre vertical le tassement subi par le point C, par suite des allongements des tendeurs. Cette considération conduit à la détermination du rapport des sections des pièces AC, CB.

Soit h la hauteur de la poutre. Les longueurs des tendeurs seront

$$\frac{h}{\cos\alpha} = AC,$$

$$\frac{h}{\cos\beta} = CB.$$

L'allongement x de la première barre sous la tension T sera donné par la formule

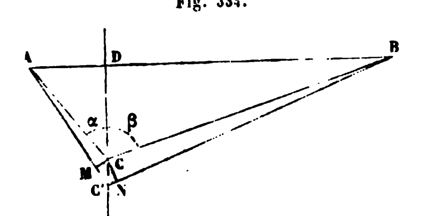
$$T = \frac{E\omega x}{AC}, \quad \text{ce qui fournit} \quad x = \frac{T \times AC}{E\omega} = \frac{\frac{Ph\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}}{E\omega}.$$

L'autre barre CB s'allonge de même de

$$\frac{\mathrm{P} \sin \alpha \times h}{\mathrm{E}\omega' \times \cos \beta \sin (\alpha + \beta)}$$

Ces allongements étant très-petits, et le point C restant sur la verticale CD, les nouvelles positions des tendeurs seront des droites C'A, C'B, qui feront avec la verticale des angles sensiblement égaux à α et β. Abaissant CM, CN, perpendiculaires sur les directions AC', C'B, on aura en C'M, C'N les allongements des tiges, et par suite

Fig. 334.



$$\mathrm{C'M} = \mathrm{CC'} \cos \alpha = \frac{\mathrm{P} \sin \beta \times h}{\mathrm{E}\omega \times \cos \alpha \times \sin (\alpha + \beta)},$$
$$\mathrm{C'N} = \mathrm{CC'} \cos \beta = \frac{\mathrm{P} \sin \alpha \times h}{\mathrm{E}\omega' \times \cos \beta \times \sin (\alpha + \beta)}.$$

Divisons l'une par l'autre ces deux équations, il vient, pour déterminer $\frac{\omega}{\omega'}$, l'équation

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\omega \cos \alpha} \times \frac{\omega' \cos \beta}{\sin \alpha},$$

ou bien

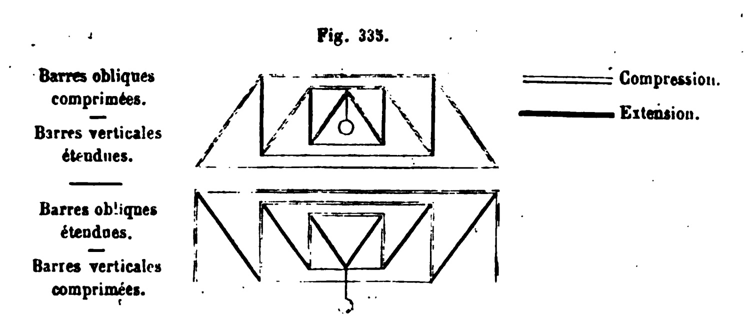
$$\omega \cos^2 \alpha \sin \alpha = \omega' \cos^2 \beta \sin \beta.$$

DIAGRAMME DE CLAPEYRON.

394. Clapeyron rendait compte de la distribution des efforts dans une poutre à treillis, en considérant successivement les deux diagrammes suivants, représentant chacun un système articulé propre à soutenir un poids.

Si l'on superpose les deux diagrammes, on obtient le treillis ordinaire, où les barres obliques sont, les unes comprimées, les autres étendues, et où les efforts des barres verticales intermédiaires, égales

Fig. 335.



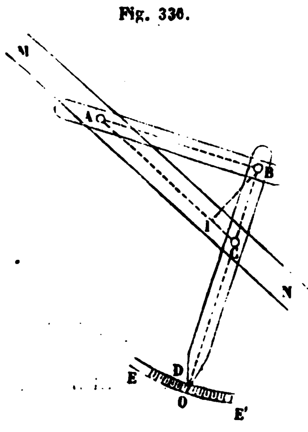
au signe près, disparaissent dans la somme, ce qui permet de supprimer ces barres, en ne conservant que celles des culées. La figure rend compte aussi des accroissements d'efforts dans les longerons horizontaux, de la culée au milieu de la poutre.

APPAREIL DE M. DUPUY POUR MESURER LES EFFORTS DES BARRES D'UN TREILLIS.

395. Cet appareil est décrit dans le catalogue des objets exposés à Vienne en 1873, par le Ministère des Travaux Publics. Soit MN une barre de treillis.

Une fausse équerre ABD, articulée en B, a ses branches percées de deux trous, l'un en A, l'autre en C. On fixe, à l'aide de deux goujons passant par les trous A et C, la fausse équerre sur la barre de treillis prise dans l'état naturel de manière que l'angle B soit droit. On mesure la distance AC. L'extrémité D de l'une des branches taillée en pointe, se meut le long d'un arc gradué EE' qui fait corps avec l'autre branche, et a son centre en B, de manière que la pointe soit au zéro de la graduation quand l'angle B est droit et quand la barre est dans l'état naturel. Si la barre MN s'allonge,

Fig. 336.



l'angle augmente d'une quantité qu'on peut évaluer au moyen de l'échelle EE'. Soit $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, dans l'état naturel de la pièce. Nous aurons

$$b^2 = a^2 + c^2,$$

et après la déformation,

$$b'^2 = a^2 + c^2 + 2ac \sin \frac{\varepsilon}{\lambda} = a^2 + c^2 + 2ac \times \frac{\varepsilon}{\lambda},$$

en appelant ε l'espace parcouru par le point D sur l'arc EE', et λ le rayon BD.

Donc

$$b'^2 - b^2 = (b' - b)(b + b') = \frac{2ac\varepsilon}{\lambda},$$

et l'allongement

$$b' - b = \frac{2ac \times \frac{\varepsilon}{\lambda}}{b + b'} = \frac{ac}{b} \times \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

On peut en effet confondre b' avec b au dénominateur sans erreur appréciable.

L'allongement relatif, $\frac{b' - b}{b}$, est donc égal à $\frac{ac}{b^2} \times \frac{\varepsilon}{\lambda}$, ou à

$$\frac{ac}{a^2 + c^2} \times \frac{\varepsilon}{\lambda},$$

et la tension R de la barre est, par unité de surface,

$$R = E \frac{ac}{a^2 + c^2} \times \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

On remarquera que l'allongement $b' - b$ est égal au produit de $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ par la fraction $\frac{ac}{b}$, qui représente la distance BI du sommet de l'angle droit à l'hypoténuse.

Dans l'appareil de M. Dupuy, c était égal à 1 mètre, et a à $0^m,05$. Le rayon BD était de 1 mètre.

Avec ces données on avait, pour une barre en fer,

$$R = E \times \frac{0,05}{1+(0,05)^2} \times \frac{\varepsilon}{1,00} = \frac{20000000000}{20,05} \times \varepsilon = 997500000\varepsilon.$$

Rapportée au millimètre carré de section, la tension s'exprime par des nombres un million de fois plus petits, et par conséquent,

$$R = 997,5 \times \varepsilon,$$

ε étant toujours exprimé en mètres. Si l'on évalue ε en millimètres, le nombre ε devient 1000 fois plus grand, et pour que R ne change pas de valeur, il faut diviser par 1000 son coefficient; d'où résulte la formule pratique

$$R^{\text{kil. par mill. qu.}} = 0,9975\varepsilon,$$

ou encore

$$R^{\text{kil. par mill. qu.}} = \varepsilon,$$

en simplifiant la formule, eu égard à l'incertitude qui règne sur la véritable valeur du coefficient d'élasticité E.

Cette méthode a été appliquée à une poutre d'essai de 12 mètres de portée et de $1^m,20$ de hauteur. Elle a montré dans les barres des efforts moindres que les efforts calculés : quelques-uns sont réduits à moitié. D'autres, au centre de la portée, se trouvent changés de signe. Plusieurs ouvrages ont donné lieu à des observations analogues.

Ces résultats peuvent être attribués à la raideur des assemblages, à la portion d'effort tranchant équilibrée par la résistance des bandes horizontales, et enfin à des circonstances spéciales à l'ajustage des poutres soumises aux essais. Il ne serait pas prudent de les généraliser avant que l'expérience ait prononcé sur un très-grand nombre de poutres analogues. Dans tous les cas, ces essais semblent prouver que les treillis calculés par la méthode consacrée ont un certain excès de solidité, ce qui n'est pas un défaut bien regrettable.

Nous ferons observer toutefois :

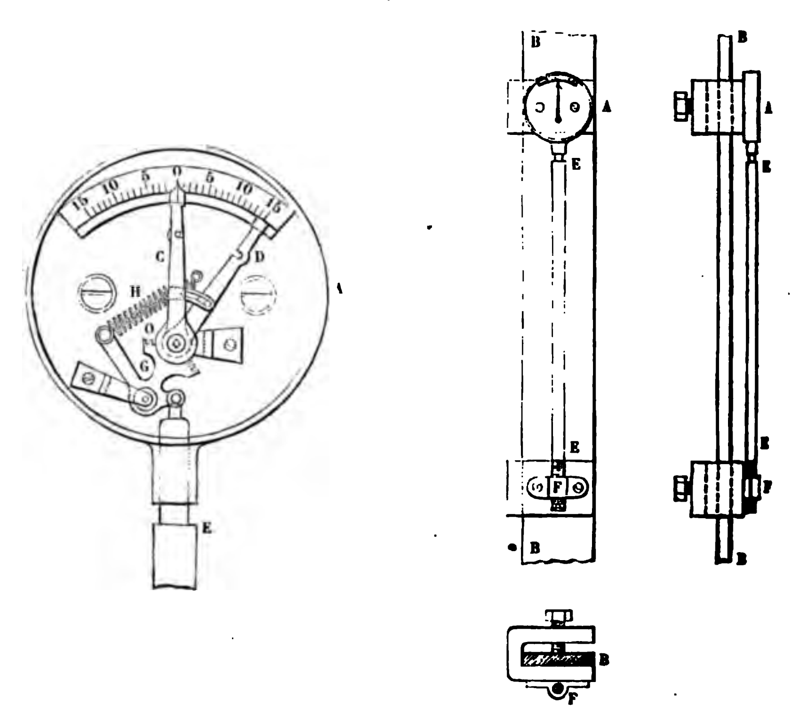
1° Que la méthode donne la moyenne des tensions développées de A en C, et non la tension en un point particulier de la barre ;

2° Qu'elle conduit à la détermination de R par le produit de deux nombres, l'un très-petit ε, l'autre très-grand et mal connu E, de sorte que le résultat peut être entaché d'une erreur relative considérable.

APPAREIL DE M. CH. MANET.

396. L'appareil de M. Ch. Manet sert, comme l'appareil de M. Dupuy, à mesurer directement les allongements ou raccourcissements des barres soumises à des efforts de traction et de compression, ainsi que les intensités de ces efforts.

Fig. 337.



Une boîte A porte en son centre une aiguille C, mobile autour du pivot O; son extrémité parcourt un limbe gradué, en refoulant à droite et à gauche deux bras, dont l'un, D, est seul représenté sur la figure; ces bras sont destinés à conserver sur l'appareil l'indication de l'effort maximum d'extension ou de raccourcissement subi par la barre dans les mouvements oscillatoires. L'aiguille C est commandée par un levier coudé G, muni d'engrenage, qu'un ressort à boudin H tend toujours à ramener au contact de la tige E dont il va être question tout à l'heure. La boîte est attachée solidement en un point B de la barre soumise aux expériences. Le levier est actionné par une tige métallique E, d'un mètre de longueur, dont l'extrémité supérieure glisse à frottement doux dans la garniture de la boîte, et dont l'extrémité inférieure taraudée s'engage dans un écrou F, également fixé invariablement en un point de la barre B.

L'appareil étant ainsi disposé, on amène l'aiguille au zéro de l'arc gradué, en tournant la vis si cela est nécessaire; le zéro correspond à l'état naturel de la barre. Cela posé, si la barre s'allonge entre les deux points A et F, l'aiguille se déplace vers la droite, et son extrémité parcourt un arc quarante fois plus grand que l'allongement qu'il s'agit de mesurer. Si la barre se contracte, c'est au contraire vers la gauche que se fait le déplacement de l'aiguille. Les bras mobiles D, repoussés à droite et à gauche par l'aiguille, laissent sur l'appareil la trace des maxima des tensions et des compressions.

Si la barre essayée est en fer, et qu'on admette pour coefficient d'élasticité 2×10^{10} kilogrammes par mètre carré, un allongement de $\left(\frac{1}{20}\right)^{me}$ de millimètre par mètre correspond à 1 kilogramme par millimètre carré de section, et est accusé sur l'arc gradué par un déplacement linéaire de 2 millimètres.

CHAPITRE IV.

POUTRES AMÉRICAINES DU SYSTÈME DE HOWE.

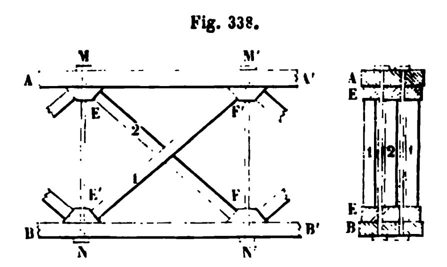
397. Les poutres américaines du système de Howe sont composées comme il suit:

Deux longerons, l'un supérieur AA', l'autre inférieur BB';

Des boulons équidistants MN, M'N', qui tendent à rapprocher les deux longerons, et dont on peut régler à volonté le serrage;

Des croisillons EF, E'F' dans chaque entre-boulon; ils butent

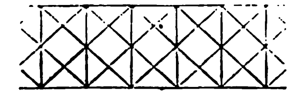
Fig. 338.

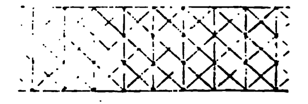


contre des coussinets E, E', F, F', traversés par des boulons; les croisillons s'opposent au rapprochement des longerons. L'intervalle de deux boulons consécutifs, MN, M'N', est appelé *panneau* ou *entre-boulon*. Les poids qui sollicitent la ferme peuvent être supposés concentrés sur les boulons MN, M'N'.....

Tel est le système réduit à ses parties essentielles; mais on peut former une poutre américaine à doubles croisillons ou à triples croisillons, comme les figures ci-dessous le représentent. Ces systèmes

Fig. 339.





sont dérivés du système à croisillons simples, que nous nous bornerons à étudier avec quelque détail.

398. Supposons une poutre américaine chargée de poids et posée sur deux ou sur plus de deux appuis de niveau. Coupons cette poutre par deux plans verticaux, perpendiculairement à l'axe de la pièce, et menés par les milieux de deux entre-boulons consécutifs; puis introduisons dans les sections rencontrées par ces plans sécants des forces égales aux actions moléculaires supprimées par la coupure.

Appelons H_k la force de compression du longeron supérieur dans l'entre-boulon n° k;

F_k, la force d'extension dans le longeron inférieur dans ce même entre-boulon;

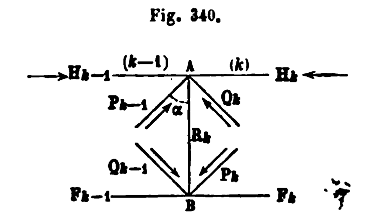
P_k, la force de compression de la barre qui monte de gauche à droite dans l'entre-boulon n° k;

Q_k la force de compression de la barre qui descend de gauche à droite dans ce même entre-boulon.

Les mêmes lettres avec l'indice $k-1$ désigneront les forces analogues dans l'entre-boulon n° $(k-1)$, à gauche de l'entre-boulon n° k.

La force R_k représente la tension du boulon AB qui sépare les

Fig. 340.



entre-boulons n° $(k-1)$ et n° k; nous lui donnons l'indice de l'entre-boulon situé à sa droite.

Appelons encore :

α l'angle constant formé par les barres des croisillons avec la verticale;

p, le poids supporté par la poutre par unité de longueur; nous le

supposerons constant. Si p était variable, il faudrait au moins qu'il fût constant dans tout l'intervalle compris entre les milieux de deux entre-boulons successifs, et l'on devrait lui donner l'indice du boulon qui partage en deux la longueur à laquelle le poids p se rapporte; cette hypothèse revient à supposer les charges concentrées sur les boulons;

a, la longueur constante d'un entre-boulon quelconque;

h, la hauteur de la poutre, mesurée verticalement entre les lignes d'axe des deux longerons.

Nous pourrons écrire les conditions d'équilibre, qui sont au nombre de trois :

Équation des composantes horizontales :

$$H_{k-1} - F_{k-1} + P_{k-1} \sin \alpha + Q_{k-1} \sin \alpha = H_k - F_k + P_k \sin \alpha + Q_k \sin \alpha.$$

Équation des composantes verticales :

$$P_{k-1} \cos \alpha + Q_k \cos \alpha = pa + Q_{k-1} \cos \alpha + P_k \cos \alpha.$$

Équation des moments par rapport à un point quelconque, par rapport au point B, par exemple :

$$(H_{k-1} - H_k)h + (P_{k-1} - Q_k)h \sin \alpha = 0.$$

399. Ces trois équations ne comprennent pas R_k; pour déterminer cette force, il faut supposer le boulon coupé, et poser les équations d'équilibre des forces qui agissent sur l'un des points A ou B pris isolément. Pour n'avoir pas à distinguer plusieurs cas, suivant que le poids pa de l'entre-boulon est appliqué tout entier en haut des fermes, en A, ou tout entier concentré au point B, ou enfin partagé entre les deux longerons, nous supposerons qu'on connaît d'avance la décomposition du poids p entre les deux longerons, et nous appellerons p' la portion de ce poids qui s'applique au longeron supérieur, et p'' la portion qui s'applique au longeron inférieur. Le complément

de l'étude des pressions se fera donc au moyen de l'une ou l'autre des équations

$$(P_{k-1} + Q_k) \cos \alpha = R_k + p'a,$$
$$(Q_{k-1} = P_k) \cos \alpha + p''a = R_k,$$

qui rentrent l'une dans l'autre en vertu de la seconde équation posée plus haut, puisque $p' + p'' = p$.

400. Laissant de côté pour le moment la recherche de la tension R_k, nous avons trois équations pour lier entre elles les quatre forces H_k, Q_k, P_k, F_k, de l'entre-boulon n° k, avec les quatre forces H_{k-1}, Q_{k-1}, P_{k-1}, F_{k-1}, de l'entre-boulon précédent. Si l'on suppose connu ce second groupe de forces, il faudra, pour achever de déterminer les quatre forces du premier groupe, attribuer une valeur arbitaire à l'une d'entre elles. L'indétermination du problème est facile à expliquer, en observant qu'on est maître, en serrant plus ou moins les écrous, de donner aux boulons telles tensions R_k qu'on veut; de là résulte une nouvelle série d'équations qui, jointe aux trois premières, achèverait de déterminer les quatre inconnues. Nous sommes donc maîtres de faire une hypothèse sur le règlement des pressions dans les barres, et celle que nous ferons consistera à admettre que la compression de la barre qui descend de droite à gauche dans le croisillon est nulle pour chaque entre-boulon; nous poserons en conséquence

$$Q_{k-1} = 0 \quad \text{et} \quad Q_k = 0.$$

Nous nous plaçons ainsi dans le cas-limite où les barres qui descendent de gauche à droite reposent sur les coussinets sans y exercer aucun effort. Les équations se simplifient dans cette hypothèse et deviennent :

(1) $$H_k - H_{k-1} - (F_k - F_{k-1}) + (P_k - P_{k-1}) \sin \alpha = 0,$$
(2) $$(P_k - P_{k-1}) \cos \alpha + pa = 0,$$
(3) $$H_k - H_{k-1} = P_{k-1} \sin \alpha.$$

L'équation (2) donne la loi de variation des forces P d'un entre-boulon à l'autre; l'équation (3) donne la loi de variation de la force H, ou de la compression dans le longeron supérieur; enfin si l'on remplace

dans l'équation (1) la différence $H_k - H_{k-1}$ par sa valeur fournie par l'équation (3), on a l'équation :

$$(4) \qquad F_k - F_{k-1} - P_k \sin\alpha = 0,$$

qui indique la loi de variation des forces F.

On remarque sur-le-champ :

1° Que la différence $P_k - P_{k-1}$ est négative et constante; nous supposons ici que p est constant dans toute l'étendue où nous considérons la poutre; la valeur générale de la quantité variable P est donc donnée par les termes d'une progression arithmétique dont la raison est $-\frac{pa}{\cos\alpha}$;

2° Que la différence $H_k - H_{k-1}$ est égale à $P_{k-1}\sin\alpha$; les différences des valeurs successives de la variable H sont donc les termes successifs de la progression arithmétique $P \sin\alpha$, et par suite la valeur générale de H est donnée par la formule de la sommation des termes de cette progression;

3° Que la différence $F_k - F_{k-1}$ est donnée par la fonction $P_k \sin\alpha$, laquelle représente aussi le terme général de la même progression arithmétique, avancé d'un rang.

Ces remarques permettent d'écrire les expressions générales de la valeur des inconnues

$$(5) \qquad P_k = P_1 - \frac{pa}{\cos\alpha}(k-1),$$

$$(6) \qquad H_k = H_1 + (k-1)P_1 \sin\alpha - \frac{(k-1)(k-2)}{2} p \operatorname{tg} a,$$

$$(7) \qquad F_k = F_1 + (k-1)P_1 \sin\alpha - \frac{k(k-1)}{2} p \operatorname{tg} a.$$

Les constantes P_1, H_1, F_1, qui jusqu'ici sont arbitraires, doivent être déterminées de manière à satisfaire aux conditions de l'équilibre extérieur de la pièce sur ses appuis.

401. Achevons la solution pour une poutre à travée unique ayant une portée l divisée en n entre-boulons, égaux chacun à $\frac{l}{n}$.

Le poids pa étant supposé appliqué à deux demi-entre-boulons successifs, nous admettrons que les deux demi-entre-boulons voisins des culées ne supportent aucune charge, ou que leur charge est directement supportée par les culées. Le poids total qui pèse sur la poutre est donc seulement $pa\,(n-1)$, et par suite les réactions des culées sont égales à $\frac{pa\,(n-1)}{2}$. La réaction de la culée de gauche s'exerce sur la poutre par l'intermédiaire de la barre montante du croisillon n° 1, de sorte que l'on a pour l'équilibre :

$$P_1 \cos\alpha = \frac{pa(n-1)}{2},$$

ou bien

$$P_1 = \frac{pa(n-1)}{2\cos\alpha}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (5), en y faisant $k=1$, puis éliminons P_1, il viendra

$$(8)\qquad P_k = \frac{pa\,(n-2k+1)}{2\cos\alpha}.$$

P_k doit toujours rester positif, car les barres inclinées n'étant que posées sur les coussinets, ne peuvent exercer sur eux qu'une pression, et non une tension. La formule (8) ne doit donc être employée que jusqu'à la plus grande valeur de k qui donne pour P_k un résultat positif.

Deux cas sont à distinguer ici, suivant que n est pair ou impair.

Si n est pair et égal à $2n'$, la plus grande valeur qu'on puisse assigner à k est n', et l'on a

$$P_1 = \frac{pa}{\cos\alpha}\,\frac{n-1}{2},$$
$$P_2 = \frac{pa}{\cos\alpha}\,\frac{n-3}{2},$$
$$P_3 = \frac{pa}{\cos\alpha}\,\frac{n-5}{2},$$
$$\vdots$$
$$P_{n'} = \frac{pa}{\cos\alpha} \times \frac{1}{2}.$$

Au delà du boulon du milieu de la portée, P deviendrait négatif, ce qui est impossible ; il faut admettre alors qu'il y a interversion entre les rôles des barres des croisillons, ce qui du reste est d'accord avec la symétrie de la poutre et de la charge par rapport au plan vertical qui divise la portée en deux parties égales : ce sont donc les barres montantes qui doivent reposer sans pression sur les coussinets dans toute la seconde moitié de la travée.

Si n est impair et égal à $2n'+1$, la plus grande valeur qu'on puisse attribur à k est n', et l'on a

$$P_1 = \frac{pa}{\cos\alpha}\frac{n-1}{2},$$
$$P_2 = \frac{pa}{\cos\alpha}\frac{n-3}{2},$$
$$\vdots$$
$$P_{n'} = \frac{pa}{\cos\alpha}\times 1.$$

Le terme suivant, $P_{n'+1}$, serait nul, et les termes au delà seraient négatifs ; ce qui démontre que dans les poutres à un nombre impair d'entre-boulons, les deux barres du croisillon central ne portent rien, et qu'il y a renversement dans les rôles des deux barres d'un côté à l'autre de ce croisillon central.

On remarquera aussi que les pressions $P_{n'}$, $P_{n'-1}$. $P_{n'-2}$...P_1, sont proportionnelles aux nombres impairs successifs, lorsque n est pair, et aux nombres naturels si n est impair.

402. Les formules (6) et (7) font connaître les valeurs générales de H et de F dès qu'on a assigné les valeurs convenables aux constantes H_1 et F_1. Dans le cas spécial dont nous nous occupons, on remarquera que H_1 doit être nul puisque le longeron supérieur ne vient buter sur aucun point qui puisse y développer une pression, et que la force F_1 doit tenir en équilibre la composante horizontale $P_1 \sin\alpha$ de la barre inclinée du premier croisillon ; cette condition est nécessaire pour que la poutre repose verticalement sur sa culée sans exercer sur elle de poussée latérale. Donc $F_1 = P_1 \sin\alpha$. Introduisant ces valeurs particulières dans les équations (6) et (7), il vient

$$H_k = pa \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{(n+1)}{2}(k-1) - \frac{k(k-1)}{2}\right),$$
$$F_k = pa \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{(n+1)}{2}k - \frac{k(k+1)}{2}\right).$$

On observera, d'après ces relations, que $F_k = H_{k+1}$, de sorte que les deux séries de valeurs de H et de F sont composées des mêmes nombres; mais cette relation doit être modifiée à partir du milieu de la portée, comme nous le reconnaîtrons plus bas.

403. La solution que nous venons de donner est complète pour toute poutre américaine à croisillons simples, reposant sur deux appuis de niveau, lorsque les poids égaux qu'elle porte sont concentrés sur les boulons. Nous y ajouterons cependant une remarque qui nous semble conduire à une méthode plus élégante et plus rapide pour le calcul des coefficients de $pa \operatorname{tg} \alpha$ dans les valeurs de H_k et de F_k.

Ces coefficients sont composés de deux termes : le premier est le terme général d'une progression arithmétique; le second est, au signe près, le terme sommatoire de la progression arithmétique des nombres naturels de 1 à $k-1$ ou à k. Les deux termes pris ensemble forment, comme nous allons le voir, une série récurrente, dont l'échelle de relation est facile à déterminer.

Plus généralement, soient deux progressions arithmétiques :

$$(a) \qquad m,\ m+t,\ m+2t, \ldots\ldots, m+(l-1)t, \ldots\ldots,$$
$$(b) \qquad f,\ f+\theta,\ f+2\theta, \ldots\ldots, f+(l-1)\theta, \ldots\ldots$$

et proposons-nous de trouver la loi de formation de la série (u) obtenue en ajoutant le l^{me} terme de la progression (a) à la somme des l premiers termes de la progression (b); si l'on appelle u_l le l^{me} terme de cette nouvelle série, on voit que la différence $u_l - u_{l-1}$ de deux termes consécutifs de la série (u) est égale au l^{me} terme de la série (b) augmenté de la différence constante des termes de la série (a). Donc les différences secondes des termes de la série (u) sont constantes et égales à la différence constante de la série (b); donc enfin les différences troisièmes sont constamment nulles, et l'on a par conséquent entre quatre termes consécutifs

$$u_l = 3u_{l-1} - 3u_{l-2} + u_{l-3}.$$

Telle est la loi au moyen de laquelle on déduira chaque terme de la série (u) des termes précédents.

Il résulte de là que les termes de la série (u) sont les coefficients numériques de la lettre ordonnatrice x dans la série qui l'on obtient en divisant un polynome du second degré en x par le polynome $1-3x+3x^2-x^3$, qui n'est autre chose que le cube du binome $1-x$.

En effet, on a identiquement :

$$\begin{array}{l}(u_1+u_2x+u_3x^2+u_4x^3+\ldots\ldots+u_lx^{l-1}+\ldots\ldots)\\ \times(1-3x+3x^2-x^3)\\ =u_1+\left.\begin{array}{r}u_2\\-3u_1\end{array}\right|x+\left.\begin{array}{r}u_3\\-3u_2\\+3u_1\end{array}\right|x^2.\end{array}$$

Le produit n'a que trois termes, car les coefficients $u_4-3u_3+3u_2-u_1$, $u_5-3u_4+3u_3-u_2$, etc., des puissances de x supérieures à la seconde sont tous nuls en vertu de la relation générale entre quatre termes consécutifs de la série (u).

u_1, u_2, u_3 peuvent être exprimés en fonction des arguments des séries (a) et (b), et le polynome du second degré que l'on obtient pour produit est égal à l'expression

$$M=(m+f)+(t-2m+\theta-f)x+(m-t)x^2.$$

Si donc on divise ce polynome par $1-3x+3x^2-x^3$, en les ordonnant l'un et l'autre par rapport aux puissances ascendantes de x, les coefficients numériques de x dans les termes successifs du quotient seront les valeurs des termes u_1, u_2, u_3.... de la série cherchée.

404. Pour revenir de ces généralités à la recherche spéciale des coefficients de $pa\,\mathrm{tg}\,a$ dans les expressions de H et de F, nous remarquerons que, dans ce cas particulier, les séries (a) et (b) deviennent :

$$\begin{array}{llllll}(a) & 0, & \frac{n+1}{2}, & (n+1), & \frac{(n+1)\times 3}{2}, & \ldots\ldots\\ (b) & 0, & -1, & -2, & -3, & \ldots\ldots\end{array}$$

de sorte qu'on a

$$m = 0, \quad t = \frac{n+1}{2},$$
$$f = 0, \quad \theta = -1.$$

Donc

$$M = \frac{n-1}{2}x - \frac{n+1}{2}x^2,$$

et la division de ce polynome par $1 - 3x + 3x^2 - x^3$ donnera les valeurs numériques des coefficients de $p\alpha \operatorname{tg}\alpha$ dans l'expression de H; pour en déduire les valeurs des coefficients applicables à F, il faut avancer d'un rang dans la série (1).

---

(1) On peut encore transformer cette méthode en décomposant en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{M}{(1-x)^3}.$$

On a en effet identiquement, A, B, C étant des constantes,

$$\frac{A + Bx + Cx^2}{(1-x)^3} = \frac{A+B+C}{(1-x)^3} - \frac{B+2C}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-x},$$

de sorte que les coefficients de x dans le quotient sont respectivement égaux aux sommes des coefficients des développements des fractions

$$\frac{1}{(1-x)^3}, \quad \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x},$$

multipliées respectivement par les constantes

$$A+B+C, \quad -(B+2C) \quad \text{et} \quad C.$$

En effectuant les divisions, on trouve les trois suites indéfinies

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + \ldots\ldots$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots\ldots$$
$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots$$

405. Par exemple, si l'on demande de calculer les forces F et H pour une poutre de 12 entre-boulons, on devra, pour trouver les coefficients de $pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$, diviser :

$$\frac{11}{2}x - \frac{13}{2}x^2 \quad \text{par} \quad 1 - 3x + 3x^2 - x^3,$$

ce qui donne pour résultat :

$$\frac{\frac{11}{2}x - \frac{13}{2}x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{11x - 13x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(0 + 11x + 20x^2 + 27x^3 + 32x^4 + 35x^5 + 36x^6 + \ldots\ldots).$$

Il ne faut pas oublier o comme premier terme indépendant de x dans le quotient. Les valeurs successives de H sont donc :

1er entre-boulon	2^{e}	3^{e}	4^{e}	5^{e}	6^{e}
0,	$\frac{11}{2}pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$,	$\frac{20}{2}pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$,	$\frac{27}{2}pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$,	$\frac{32}{2}pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$,	$\frac{35}{2}pa\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

Les coefficients de x sont, dans la première, les *nombres triangulaires;* dans la seconde les nombres *naturels;* dans la troisième, ils sont tous égaux à l'unité : nous retrouvons ainsi les trois premières lignes du triangle arithmétique de Pascal, triangle qu'on peut prolonger une fois pour toutes aussi loin qu'on veut, et qui servira pour déterminer d'avance les valeurs de F et de H dans un entre-boulon quelconque, sans calculer leurs valeurs dans les entre-boulons précédents; dans l'exemple que nous proposons ci-dessus, on a

$$A = 0, \quad B = \frac{11}{2}, \quad C = -\frac{13}{2}.$$

Si l'on demande le coefficient du cinquième terme du développement en série de la fraction

$$\frac{M}{(1-x)^3},$$

on voit tout de suite que le coefficient est

$$15 \times \left(0 + \frac{11}{2} - \frac{13}{2}\right) + 5 \times \left(-\frac{11}{2} + 13\right) + 1 \times \left(-\frac{13}{2}\right) = 16,$$

ce qui est vérifié par le calcul direct.

et les valeurs successives de F :

$$\frac{11}{2} pa \operatorname{tg} \alpha, \ \frac{20}{2} pa \operatorname{tg} \alpha, \ \frac{27}{2} pa \operatorname{tg} \alpha, \ \frac{32}{2} pa \operatorname{tg} \alpha, \ \frac{35}{2} pa \operatorname{tg} \alpha, \ \frac{36}{2} pa \operatorname{tg} \alpha.$$

406. Si l'on continuait la division, on retrouverait dans un ordre inverse les coefficients déjà obtenus.

Pour démontrer ce théorème, reprenons la série (u), et cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit symétrique, ce qui peut avoir lieu de deux manières : 1° ou bien, à partir d'un de ses termes u_l, tous les termes suivants sont respectivement les mêmes que les précédents pris dans l'ordre rétrograde; 2° ou bien deux termes consécutifs u_{l-1}, u_l ont la même valeur, et les termes qui suivent le terme u_l sont égaux aux termes qui précèdent le terme u_{l-1}.

1° Dans le premier cas, on aura $u_{l+1} = u_{l-1}$, $u_{l+2} = u_{l-2}$, et ainsi de suite; or on a toujours entre les quatre termes consécutifs u_{l+1}, u_l, u_{l-1}, u_{l-2}, l'équation

$$u_{l+1} = 3u_l - 3u_{l-1} + u_{l-2},$$

d'où l'on tire, en remplaçant u_{l+1} par u_{l-1}, qui lui est supposé égal,

$$4u_{l-1} = 3u_l + u_{l-2}.$$

Réciproquement si cette condition est remplie, on voit que u_{l+1} sera égal à u_{l-1}, et par suite u_{l+2} à u_{l-2}, u_{l-3} à u_{l+3}, etc., et que la série aura la propriété d'être symétrique par rapport au terme u_l.

Or il est facile de reconnaître qu'on a les équations

$$u_l = m + (l-1)t + lf + \theta \frac{l(l-1)}{2},$$
$$u_{l-1} = m + (l-2)t + (l-1)f + \theta \frac{(l-1)(l-2)}{2},$$
$$u_{l-2} = m + (l-3)t + (l-2)f + \theta \frac{(l-2)(l-3)}{2}.$$

Il s'agit donc de savoir s'il existe une valeur entière de l qui satisfasse à l'équation de condition que nous venons de poser.

Le résultat des substitutions dans cette équation est, en définitive,

$$2t + 2f + \theta(2l - 1) = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante cherchée.

On voit qu'elle se réduit à ce que le nombre $\frac{2(t+f)}{\theta}$ soit un entier impair.

Dans le cas spécial qui nous occupe θ est toujours égal à -1. Il faut donc et il suffit que le nombre $2(t+f)$ soit impair, ou que $t+f$ soit égal à un impair divisé par 2; or c'est ce qui arrive toujours lorsque n est pair, car $t = \frac{n+1}{2}$ et $f = 0$.

Lorsque n est pair, la série formée par les coefficients de $p\alpha \operatorname{tg} \alpha$ dans les valeurs de H et F est donc symétrique par rapport à l'un de ses termes, le $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{me}}$ pour la série des coefficients de H et le $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{me}}$ pour la série des coefficients de F.

2° L'autre genre de symétrie a lieu lorsque deux termes consécutifs u_{l-1}, u_l sont égaux dans la série (u); ce qui suffit pour que $u_{l-2} = u_{l+1}$, $u_{l-3} = u_{l+2}$, et ainsi de suite.

Pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que l'équation $t + f + \theta(l-1) = 0$, obtenue en retranchant la valeur de u_{l-1} de la valeur de u_l, fournisse pour l une valeur entière; θ étant égal à -1, il suffit pour cela que $t+f$ soit entier, ou, puisque $f = 0$, que $n+1$ soit divisible par 2, ou enfin que n soit impair; dans ce cas, les deux termes égaux sont les termes $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{me}}$ et $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{\text{me}}$ pour les coefficients de H, et les termes $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ et $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{me}}$ pour les coefficients de F.

Si l'on poussait la division du trinôme du second degré par le polynôme

$$1 - 3x + 3x^2 - x^3$$

au delà des termes qui correspondent à la moitié de la portée, le calcul donnerait donc dans tous les cas les coefficients déjà obtenus, que n soit pair ou impair; et il y a un *coefficient central* si n est pair, tandis qu'il n'y en a pas si n est impair.

407. De là une remarque importante sur les forces H et F.

1° Quand n est pair, le coefficient central, qui donne la plus grande valeur de H, est le $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{me}$ coefficient du quotient commençant par le terme o, et ce coefficient s'applique à la portion de longeron qui suit le $\left(\frac{n}{2}\right)^{me}$ entre-boulon; or la symétrie de la poutre et de son chargement exige que les deux forces $H_{\frac{n}{2}}$ et $H_{\frac{n}{2}+1}$ soient égales. Cette apparente contradiction s'explique en remarquant que le boulon central de la poutre la partage en deux moitiés où les actions des croisillons sont renversées l'une par rapport à l'autre; de sorte que la valeur de la compression déduite du calcul des coefficients n'est pas la valeur de la compression dans la partie de longeron comprise dans l'entre-boulon n° $\left(\frac{n}{2}+1\right)$. Elle est seulement la pression totale développée dans la section du longeron située au milieu de la poutre, par l'arc-boutement des deux barres, l'une montante, l'autre descendante, des deux entre-boulons contigus. La série des coefficients donne donc, par son terme central, la pression qui s'applique à une longueur infiniment petite du longeron, au milieu de la portée; c'est pour ainsi dire la *poussée à la clef* de la poutre.

Pour le longeron inférieur, le calcul donne, par le $\left(\frac{n}{2}\right)^{me}$ terme de la série, des valeurs égales pour les forces $F_{\frac{n}{2}}$ et $F_{\frac{n}{2}+1}$. Au delà de l'entre-boulon n° $\left(\frac{n}{2}+1\right)$, on aura toujours entre les forces F et H la relation $F_{k+1}=H_k$, applicable toutes les fois que k surpasse $\frac{n}{2}$, parce qu'alors les croisillons travaillent à l'inverse de l'effort qu'ils exerçaient dans la première moitié de la poutre.

2° Quand n est impair, nous avons vu que les deux barres qui se croisent dans l'entre-boulon central n'exercent aucun effort sur les coussinets, et qu'en même temps la série des coefficients servant à calculer H et F n'a pas de terme central. On trouvera les mêmes valeurs pour le $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{me}$ et pour le $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{me}$ terme des coefficients de H; mais ces deux valeurs égales correspondent l'une et l'autre à l'entre-boulon central. Là encore, à cause du renversement du travail des croisillons, il faut admettre que les forces $H_{\frac{n+1}{2}}$ et $H_{\frac{n+3}{2}}$ déduites du calcul des coefficients s'appliquent à un seul et même entre-boulon, celui du milieu, dans lequel la portion du longeron supérieur qui y est comprise arc-boute les forces égales $P_{\frac{n-1}{2}}$ et $Q_{\frac{n+3}{2}}$, de sorte que la valeur assignée par ce calcul pour $H_{\frac{n+3}{2}}$ n'est pas la valeur de H pour le $\left(\frac{n+3}{2}\right)^{me}$ entre-boulon, mais bien pour le précédent.

De même que le calcul des coefficients donne deux forces égales à $H_{\frac{n+1}{2}}$ pour le longeron supérieur dans l'entre-boulon central, il assigne deux forces égales à $F_{\frac{n-1}{2}}$ pour le longeron inférieur dans les trois entre-boulons du centre

$$\text{N}^\circ\left(\frac{n-1}{2}\right),\quad \text{N}^\circ\left(\frac{n+1}{2}\right)\quad \text{et}\quad \text{N}^\circ\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

408. Deux exemples éclairciront ces remarques.

Posons pour abréger

$$pa\,\text{tg}\,\alpha = \Pi \quad \text{et} \quad \frac{pa}{\cos\alpha} = \Pi',$$

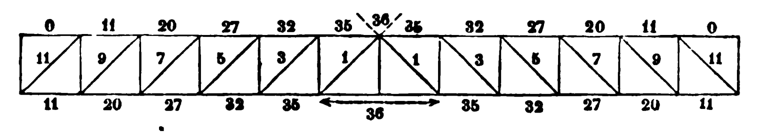
et proposons-nous de déterminer les efforts auxquels sont soumises les pièces de charpente dans un pont américain de 12 entre-boulons égaux à a.

n étant pair, nous disposerons le calcul comme il suit.

Fraction génératrice des coefficients de Π :

$$\frac{0+\frac{n-1}{2}x-\frac{n+1}{2}x^2}{(1-x)^3}=\frac{0+\frac{11}{12}x-\frac{13}{2}x^2}{(1-x)^3}.$$

Fig. 341.



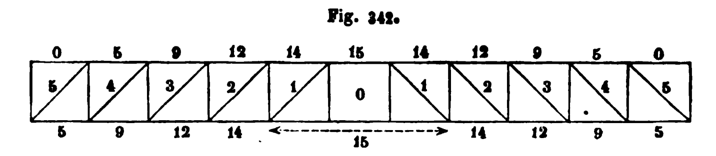
Nous avons déjà effectué cette division (§ 405).

NUMÉROS des ENTRE-BOULONS.	Nos DES TERMES correspondants DANS LA SÉRIE.		VALEURS SUCCESSIVES			OBSERVATIONS.
	Longeron supérieur.	Longeron inférieur.	de H compression.	de F extension.	de P compression.	
1er entre-boulon	1er terme	2e terme	0	$11\times\frac{\Pi}{2}$	$11\times\frac{\Pi'}{2}$	
2e.	2e. . . .	3e. . . .	$11\times\frac{\Pi}{2}$	$20\times\frac{\Pi}{2}$	$9\times\frac{\Pi'}{2}$	
3e.	3e. . . .	4e. . . .	$20\times\frac{\Pi}{2}$	$27\times\frac{\Pi}{2}$	$7\times\frac{\Pi'}{2}$	
4e.	4e. . . .	5e. . . .	$27\times\frac{\Pi}{2}$	$32\times\frac{\Pi}{2}$	$5\times\frac{\Pi'}{2}$	
5e.	5e. . . .	6e. . . .	$32\times\frac{\Pi}{2}$	$35\times\frac{\Pi}{2}$	$3\times\frac{\Pi'}{2}$	
6e.	6e. . . .	7e. . . .	$35\times\frac{\Pi}{2}$	$36\times\frac{\Pi}{2}$	$\frac{\Pi'}{2}$	
. . . .	7e. . . .	. . . . .	$36\times\frac{\Pi}{2}$	. . . . . .	Valeurs de Q.	Boulon central ou clef.
7e.	8e. . . .	7e. . . .	$35\times\frac{\Pi}{2}$	$36\times\frac{\Pi}{2}$	$\frac{\Pi'}{2}$	
8e.	9e. . . .	8e. . . .	$32\times\frac{\Pi}{2}$	$35\times\frac{\Pi}{2}$	$3\times\frac{\Pi'}{2}$	
9e.	10e. . . .	9e. . . .	$27\times\frac{\Pi}{2}$	$32\times\frac{\Pi}{2}$	$5\times\frac{\Pi'}{2}$	
10e.	11e. . . .	10e. . . .	$20\times\frac{\Pi}{2}$	$27\times\frac{\Pi}{2}$	$7\times\frac{\Pi'}{2}$	
11e.	12e. . . .	11e. . . .	$11\times\frac{\Pi}{2}$	$20\times\frac{\Pi}{2}$	$9\times\frac{\Pi'}{2}$	
12e.	13e. . . .	12e. . . .	0	$11\times\frac{\Pi}{2}$	$11\times\frac{\Pi'}{2}$	

Supposons ensuite que la poutre ait 11 entre-boulons au lieu de 12 ; la fraction génératrice sera dans ce cas :

$$\frac{5x-6x^2}{(1-x)^3} = 0 + 5x + 9x^2 + 12x^3 + 14x^4 + 15x^5 + 15x^6 + $$
$$+ 14x^7 + 12x^8 + 9x^9 + 5x^{10} + 0 - \ldots$$

Fig. 242.



NUMÉROS des ENTRE-BOULONS.	N°s DES TERMES correspondants DANS LA SÉRIE		VALEURS SUCCESSIVES			OBSERVATIONS.
	Longeron supérieur.	Longeron inférieur.	de H compression.	de F extension.	de P compression.	
1er entre-boulon	1er terme	2e terme	0	$5 \times \Pi$	$5\,\Pi'$	
2e.	2e. . . .	3e. . . .	$5 \times \Pi$	$9 \times \Pi$	$4\,\Pi'$	
3e.	3e. . . .	4e. . . .	$9 \times \Pi$	$12 \times \Pi$	$3\,\Pi'$	
4e.	4e. . . .	5e. . . .	$12 \times \Pi$	$14 \times \Pi$	$2\,\Pi'$	
5e.	5e. . . .	6e. . . .	$14 \times \Pi$	$15 \times \Pi$	$1\,\Pi'$	
6e.	6e et 7e.	6e et 7e.	$15 \times \Pi$	$15 \times \Pi$	P et $Q = 0$ Valeurs de Q.	Entre boulon central.
7e.	8e. . . .	7e. . . .	$14 \times \Pi$	$15 \times \Pi$	$1\,\Pi$	
8e.	9e. . . .	8e. . . .	$12 \times \Pi$	$14 \times \Pi$	$2\,\Pi$	
9e.	10e. . . .	9e. . . .	$9 \times \Pi$	$12 \times \Pi$	$3\,\Pi$	
10e.	11e. . . .	10e. . . .	$5 \times \Pi$	$9 \times \Pi$	$4\,\Pi$	
11e.	12e. . . .	11e. . . .	0	$5 \times \Pi$	$5\,\Pi$	

409. Pour déterminer les tensions des boulons ou les valeurs de R, il faut distinguer deux cas.

On a toujours

$$R_k = (P_{k-1} + Q_k) \cos\alpha - p'a.$$

Si donc n est pair, on donnera à k la valeur $\frac{n}{2} + 1$, pour avoir la tension du boulon central, et l'on aura en ce point

$$P_{\frac{n}{2}} = Q_{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{2}\frac{pa}{\cos\alpha},$$

donc

$$R_{\frac{n}{2}+1} = pa - p'a = a(p - p') = p''a.$$

Mais partout ailleurs, l'une des deux quantités P_{k-1} et Q_k est supposée nulle; on a, par exemple, dans la moitié de gauche de la poutre,

$$R_k = \frac{pa(n - 2k + 3)}{2} - p'a.$$

Au terme négatif $-p'a$ près, R_k est égal au poids total de $\frac{n-2k+3}{2}$ entre-boulons, ou à la moitié, $pa \times \frac{n-1}{2}$, du poids total de la poutre, moins le poids total de $k-2$ entre-boulons.

Lorsque n est impair, il n'y a pas de boulon exceptionnel au milieu de la portée, et la formule précédente s'applique sur toute une moitié de la poutre.

La recherche des valeurs de R se fait donc sans aucune ambiguïté au moyen de la formule la plus générale qui donne R en fonction de P et Q.

410. Pour les valeurs de P, au contraire, nous avons vu qu'il y avait deux cas à distinguer, n pair et n impair, et que, dans les deux cas, après le milieu de la pièce, le calcul donne les valeurs de Q au lieu de celles de P. La marche du calcul est affranchie de cette distinction et reprend toute sa généralité, si l'on convient de regarder une valeur négative de P, prise positivement, comme indiquant la valeur convenable de Q dans le même entre-boulon. Cette convention est d'ailleurs conforme au jeu ordinaire des signes + et — dans les formules; le changement de signe de P, ne pouvant s'interpréter par la substitution d'une tension à une pression, s'interprète par la substitution d'un système de barres à l'autre dans chaque croisillon.

Grâce à cette interprétation, on n'a qu'à considérer, dans une poutre américaine uniformément chargée et posée sur deux appuis, qu'une seule et même progression arithmétique des valeurs de P, $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$;

si n est pair, il n'y a pas de terme du milieu, et aucune valeur de P n'est nulle; si n est impair, il y a un terme du milieu, lequel est nécessairement nul et correspond à l'entre-boulon central, où les deux barres des croisillons n'exercent ni l'une ni l'autre d'efforts sur les coussinets.

Pour éviter toute erreur en passant des valeurs de P aux valeurs de F et de H, il est bon de partager tout d'abord la poutre en deux parties, l'une où les valeurs de P sont positives, l'autre où elles sont négatives et correspondent aux barres renversées. On place ensuite dans chacune de ces portions les valeurs successives de F et de H, à partir de l'appui qui termine la portion considérée, en marchant vers le centre de la poutre.

411. Jusqu'à présent, nous n'avons pas eu besoin de déterminer le moment fléchissant de la pièce en un point donné. Cette notion est, sinon nécessaire, du moins utile pour le calcul des poutres américaines continues de plusieurs travées. Elle s'introduit d'ailleurs sans aucune difficulté.

Nous avons posé plus haut l'équation générale des moments

$$(H_{k-1} - H_k)h + (P_{k-1} - Q_k)h \sin \alpha = 0.$$

Nous avons admis ensuite que l'une des deux forces P et Q était nulle dans un même entre-boulon, et nous avons supprimé la seconde; mais nous avons reconnu qu'une valeur négative de P, prise positivement, indiquait la valeur de la compression dans la barre du système Q, la compression dans les barres du système P étant nulle alors. Enfin, nous avons vu que lorsque P_k est positif, on a $F_{k-1} = H_k$, tandis que $F_{k+1} = H_k$ quand P_k est négatif, ou quand le travail dans les barres est renversé.

Dans l'une ou l'autre de ces hypothèses, les forces $F_{k\pm 1}$ et H_k forment un couple qu'on met en évidence en coupant la poutre par un plan parallèle à la barre inclinée qui subit une compression dans l'entre-boulon. Le moment de ce couple $H_k \times h$ est le ***moment fléchissant*** de la section de la poutre suivant ce plan incliné.

L'équation précédente démontre que la variation du moment

fléchissant, quand on passe d'un entre-boulon au suivant, est égale à $P_{k-1} \times h \sin \alpha$.

Là où il y a renversement des barres, le moment fléchissant est maximum, et le plan de la section peut être mené verticalement, comme s'il s'agissait d'une poutre pleine ou d'une poutre à treillis.

412. La considération des moments de rupture dans les poutres américaines permet d'appliquer aux poutres posées sur plus de deux appuis les méthodes de calcul employées pour les poutres droites continues. Il faut seulement que les travées successives se composent chacune d'un nombre entier d'entre-boulons égaux entre eux et également chargés dans une même travée. Dans ces conditions, le *théorème des trois moments* est immédiatement applicable aux poutres américaines. On pourra, au moyen de ce théorème, déterminer les moments fléchissants sur les appuis, et ensuite les réactions partielles ou efforts tranchants exercés par les appuis dans chaque travée.

Cette théorie étant bien connue, nous nous bornerons à en donner un exemple numérique.

Soit (fig. 343) une poutre composée de trois travées : la première a trois entre-boulons, la seconde en a quatre, et la troisième deux. Chacun des boulons de la première porte un poids de trois tonnes, chacun des boulons de la seconde, un poids de deux tonnes, et le boulon unique de la troisième un poids de quatre tonnes.

Les appuis intermédiaires sont supposés sans épaisseur, et tous les entre-boulons sont supposés égaux.

Si l'on désigne par M_2, M_3 les moments sur les appuis, on aura, dans ce cas particulier,

$$2M_2(3+4) + 4M_3 = \frac{1}{4}(6 \times 3^2 + 6 \times 4^2) = 37\,\frac{1}{2},$$

$$4M_2 + 2M_3(4+2) = \frac{1}{4}(6 \times 4^2 + 4 \times 2^2) = 28,$$

ou bien

$$7M_2 + 2M_3 = 18.75,$$
$$M_2 + 3M_3 = 7.$$

Donc

$$M_2 = 2.224,$$
$$M_3 = 1.592.$$

Les formules connues donnent, en résumé, les résultats suivants, l'angle α' étant supposé égal à 45 degrés :

	tonnes.	
Moment sur la 1[re] pile :	2.224 ×	la hauteur de la poutre.
Moment sur la 2[e] pile :	1.592 ×	la hauteur de la poutre.

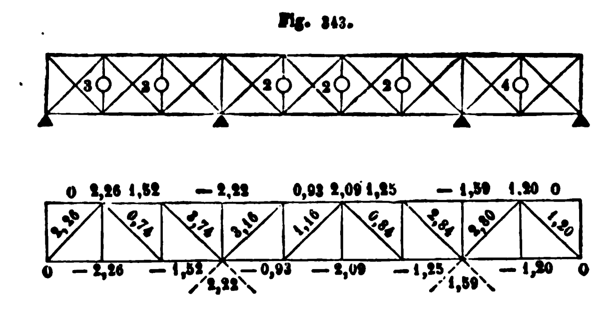
Réactions totales des appuis.

	tonnes.		tonnes.
Réaction de la 1[re] culée sur la 1[re] travée	2.259	1[re] culée. . .	2.259
— de la 1[re] pile sur la 1[re] travée	3.741	1[re] pile. . . .	6.899
— de la 1[re] pile sur la 2[e] travée	3.158		
— de la 2[e] pile sur la 2[e] travée	2.842	2[e] pile. . . .	5.638
— de la 2[e] pile sur la 3[e] travée	2.796		
— de la 2[e] culée sur la 3[e] travée	1.204	2[e] culée. . . .	1.204
		Poids total de la poutre.	16.000

On en déduit pour les pressions dans les différentes barres les nombres inscrits dans la figure ci-dessous.

Ceux qui sont inscrits sur les barres inclinées doivent être tous divisés par cos α, ou multipliés par 1.41.

Fig. 343.



Ceux des longerons horizontaux doivent être multipliés par tang α, c'est-à-dire par l'unité.

Les nombres positifs indiquent une compression, les nombres négatifs une extension.

Cet exemple suffit pour montrer comment on peut traiter la question de l'établissement d'une poutre américaine reposant sur plusieurs appuis.

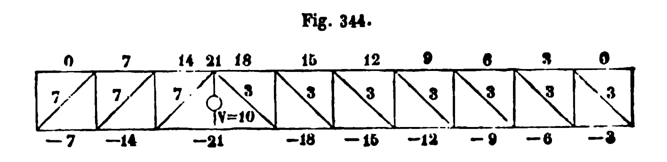
413. Dans tous ces calculs, nous avons toujours admis que la tension donnée au boulon était déterminée de telle sorte, que, des deux barres d'un même croisillon, une seule au plus exerçât un effort. On peut se demander à quoi sert de placer deux barres dans chaque entre-boulon, puisque le travail d'une seule peut suffire. Pour se rendre compte de l'utilité des deux barres, il faut considérer, non plus le cas où la poutre est uniformément chargée, mais le cas où une surcharge exceptionnelle est appliquée à certains boulons sans l'être à tous. Il se passe alors un fait analogue à celui que nous avons observé pour la résistance d'une poutre à l'effort tranchant, lorsque la surcharge n'est pas étendue uniformément d'un bout à l'autre de la portée (§ 85).

Pour traiter cette question, supposons que le boulon n° l d'une poutre d'une seule travée, formée de n entre-boulons égaux, supporte un poids donné, V, par rapport auquel le poids de la poutre soit négligeable. Les équations (1), (2) et (3) se modifieront comme il suit : l'équation (2) perdra le terme pa, pour toute valeur de k inférieure à l ou supérieure à l; et pour $k=l$, pa devra être remplacé par V. Donc les P sont constants pour les $(l-1)$ premiers entre-boulons, et restent également constants dans les l entre-boulons suivants. Le poids V se partage entre les deux culées en deux parties, qui sont représentées par $\frac{(n-l)\text{V}}{n}$ pour la culée de droite et $\frac{l\text{V}}{n}$ pour la culée de gauche : il résulte de là que la valeur de P est, pour les $(l-1)$ premiers entre-boulons, égale à $\frac{(n-l)}{n}\frac{\text{V}}{\cos\alpha}$, et qu'elle est égale à $-\frac{l\text{V}}{n\cos\alpha}$ pour les $(n-l+1)$ entre-boulons qui suivent. Le renversement du travail des barres a lieu ici en passant de l'entre-boulon n° $(l-1)$ à l'entre-boulon n° l; ce qui montre l'utilité des deux pièces dans l'intervalle compris entre le boulon n° l et le milieu de la travée.

P étant constant sur toute une partie de la poutre, les H et, par suite, les F sont dans toute cette partie représentés par les termes d'une progression arithmétique.

Par exemple, soit une poutre de dix entre-boulons à laquelle

Fig. 344.



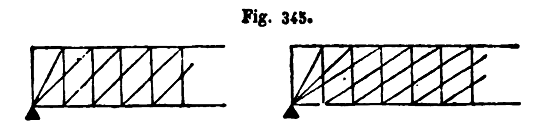
un poids de 10 tonnes est seul appliqué sur le boulon n° 4; on trouvera par le calcul la distribution d'efforts notée sur la fig. 344, aux facteurs tgα et $\frac{1}{\cos\alpha}$ près; (21 tg α) tonnes est la pression qui se trouve développée dans le longeron supérieur pour la portion infiniment petite comprise entre les deux barres renversées qui aboutissent à cette région de la poutre.

Cette méthode de calcul pourrait être employée dans tous les cas; en effet, le problème général consiste toujours à chercher les pressions et les tensions dues à un certain nombre de poids donnés, suspendus à des boulons déterminés. Cela étant, il suffit de calculer successivement les pressions produites en chaque point de la construction par chacun de ces poids pris séparément, et de faire la somme algébrique de ces pressions partielles, pour obtenir la pression résultante due à l'ensemble de ces poids. On retrouverait ainsi les formules que nous avons posées pour le cas de poids égaux et également répartis; c'est enfin la seule marche à suivre lorsque la répartition des charges est irrégulière.

414. Le système des ponts américains, que nous venons de décrire et d'analyser, présente au point de vue pratique des inconvénients nombreux. D'abord, les ponts américains sont, comme tous les ponts en charpente, d'une durée restreinte ou d'un entretien très-dispendieux. De plus ce ne sont pas des constructions qu'on puisse abandonner à elles-mêmes; elles exigent un règlement fréquemment renouvelé, et assez délicat à faire. L'opération du règlement d'un pont américain a quelque chose d'analogue à celle de l'accord d'un piano: elle consiste à tendre certains boulons et à en détendre d'au-

tres. Pour se diriger dans ces tâtonnements, on doit amener les barres renversées, sur chaque moitié des portées, à affleurer leurs coussinets sans y exercer d'effort; c'est le règlement qui convient pour la charge totale également répartie. Comme les pressions dans la poutre varient suivant la position des surcharges, il faut qu'au moment où une charge mobile, un train, par exemple, entre sur le pont, un travail particulier s'opère dans toute la charpente pour réaliser les conditions de l'équilibre intérieur incessamment altérées; certaines barres qui n'avaient pas de pressions à exercer sont appelées à en exercer d'assez fortes tout à coup, et si l'affleurement de ces barres sur leurs coussinets n'est pas convenablement assuré, il en résulte des chocs qui peuvent compromettre la résistance de l'ouvrage. Mais d'autres circonstances interviennent aussi pour modifier l'état intérieur de la ferme : nous voulons parler des changements de la température; les variations du thermomètre se font sentir sur les boulons, sans exercer les mêmes actions sur les barres des croisillons; dans une poutre de grande hauteur, par exemple, un refroidissement subit de la température de l'air peut provoquer dans les boulons une tension assez grande pour que la rupture s'ensuive, à moins que le gardien du pont n'ait pris la précaution de desserrer les écrous en temps utile. Dans certains pays cet effet serait à craindre. On y remédie, d'une manière incomplète, en multipliant le nombre des boulons, et en substituant le système double ou triple au système simple pour les poutres d'une hauteur exceptionnelle. Le calcul de l'établissement et du règlement de ces poutres à doubles ou à triples croisillons se déduit du calcul des poutres à croisillons simples en superposant les résultats du calcul successif de chaque cours de croisillons, après avoir partagé la charge entre eux d'une manière à peu près égale. Il ne présente d'ailleurs pas la même régularité que le calcul des poutres simples, parce que les barres qui aboutissent sur les appuis n'ont pas toutes, dans les croisillons doubles ou triples, la même inclinaison (fig. 345).

Fig. 345.



Le système de Howe n'est donc un système convenable que pour les échafaudages à grande portée, parce qu'il se prête à de grandes dimensions, et que le règlement même dont il est susceptible rend possible la correction des tassements qui se produisent souvent dans les constructions provisoires.

LIVRE NEUVIÈME.

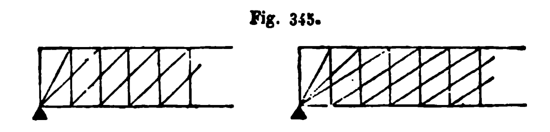
CHAPITRE UNIQUE.

VIBRATIONS DES POUTRES.

415. Le problème des mouvements oscillatoires des poutres élastiques se résout en introduisant les forces d'inertie des molécules mobiles dans les équations d'équilibre, où nous n'avons fait entrer jusqu'ici que les réactions moléculaires et les forces extérieures. Les équations que l'on obtient de cette manière sont des équations aux dérivées partielles; les réactions moléculaires intérieures contiennent la seconde dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse, et les forces d'inertie s'expriment au moyen des dérivées de l'ordonnée par rapport au temps. L'intégration d'une équation aux dérivées partielles n'est pas toujours possible en termes finis; elle s'effectue le plus souvent au moyen de séries d'un nombre indéfini de termes, et renfermant un nombre infini de constantes arbitraires. Lorsqne l'on obtient sous forme finie l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles, cette intégrale contient des *fonctions arbitraires* que l'on doit déterminer ensuite, ce qui constitue presque toujours un problème assez difficile.

Nous commencerons par traiter une question simple, celle des vibrations longitudinales d'une tige pesante verticale soumise à l'action d'un poids donné. Déjà nous avons résolu (§ 16) un pro-

Fig. 345.



Le système de Howe n'est donc un système convenable que pour les échafaudages à grande portée, parce qu'il se prête à de grandes dimensions, et que le règlement même dont il est susceptible rend possible la correction des tassements qui se produisent souvent dans les constructions provisoires.

LIVRE NEUVIÈME.

CHAPITRE UNIQUE.

VIBRATIONS DES POUTRES.

415. Le problème des mouvements oscillatoires des poutres élastiques se résout en introduisant les forces d'inertie des molécules mobiles dans les équations d'équilibre, où nous n'avons fait entrer jusqu'ici que les réactions moléculaires et les forces extérieures. Les équations que l'on obtient de cette manière sont des équations aux dérivées partielles; les réactions moléculaires intérieures contiennent la seconde dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse, et les forces d'inertie s'expriment au moyen des dérivées de l'ordonnée par rapport au temps. L'intégration d'une équation aux dérivées partielles n'est pas toujours possible en termes finis; elle s'effectue le plus souvent au moyen de séries d'un nombre indéfini de termes, et renfermant un nombre infini de constantes arbitraires. Lorsque l'on obtient sous forme finie l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles, cette intégrale contient des *fonctions arbitraires* que l'on doit déterminer ensuite, ce qui constitue presque toujours un problème assez difficile.

Nous commencerons par traiter une question simple, celle des vibrations longitudinales d'une tige pesante verticale soumise à l'action d'un poids donné. Déjà nous avons résolu (§ 16) un pro-

blème analogue, mais dans lequel nous négligions la masse de la tige pour ne tenir compte que de son élasticité. Nous allons reprendre le problème, sans négliger la masse de la tige; puis nous achèverons la solution dans un cas particulier.

416. Une tige verticale AB, de longueur l, de section ω, pesant p unités de poids par unité de volume, est suspendue invariablement au point A; à l'extrémité B elle porte un poids donné P; on demande l'équation du mouvement vibratoire pour un point quelconque de la tige, c'est-à-dire l'abscisse d'un point défini dans l'état naturel par son abscisse x au bout d'un temps quelconque t.

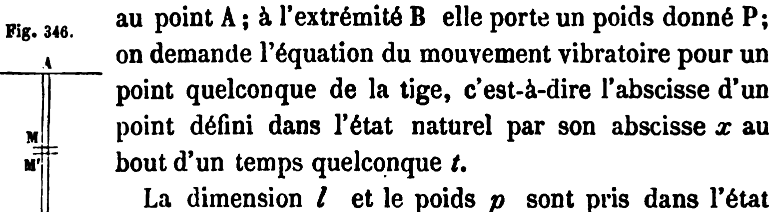


Fig. 346.

La dimension l et le poids p sont pris dans l'état naturel de la tige. On donne également la section ω de la tige, que l'on suppose constante

Prenons un point quelconque M sur la tige AB, à une distance x du point A, dans l'état naturel.

Le point défini par cette distance se trouvera déplacé, par suite du mouvement vibratoire, d'une quantité u, dans un sens ou dans l'autre, le long de la tige AB. La variable u sera une fonction de x et de t, qui définira le mouvement de tout point désigné par son abscisse x. Un élément dx infiniment petit, MM', pris sur la tige dans l'état naturel, acquiert un certain accroissement de longueur par suite du déplacement de ses deux extrémités. L'extrémité M, qui avait l'abscisse x, acquiert l'abscisse $x+u$, et l'extrémité M', qui avait l'abscisse $x+dx$, acquiert, en vertu de la loi de continuité, l'abscisse

$$x + dx + u + \frac{du}{dx}dx.$$

Sa longueur actuelle est donc

$$dx + \frac{du}{dx}dx.$$

Son accroissement de longueur est $\frac{du}{dx}dx$, et enfin, $\frac{du}{dx}$ est son allongement relatif.

Multiplions cet allongement relatif par le produit Eω de la section par le coefficient d'élasticité : le produit, $E\omega\frac{du}{dx}$, mesurera la force élastique correspondante à l'extension de l'élément considéré (§ 12). C'est la tension de la tige au point M. Elle est variable d'un point à l'autre de la tige AB, proportionnellement à la dérivée partielle $\frac{du}{dx}$.

Reprenons l'élément MM', dont la longueur est dx dans l'état naturel; il est en équilibre, pendant le mouvement, sous l'action de son poids, des tensions développées dans les sections M et M', enfin de la force d'inertie. En exprimant l'équilibre de ces diverses forces, nous aurons l'équation demandée.

Le poids de l'élément est $p\omega dx$.

La masse de l'élément est égal à son poids, $p\omega dx$, divisé par l'accélération g due à la pesanteur, ou à $\frac{p\omega}{g}dx$; et l'accélération de l'élément dans le mouvement vibratoire est $\frac{d^2(x+u)}{dt}$, ou simplement $\frac{d^2u}{dt^2}$, car la variable x, qui définit la position des sections de la tige dans l'état naturel, est indépendante du temps.

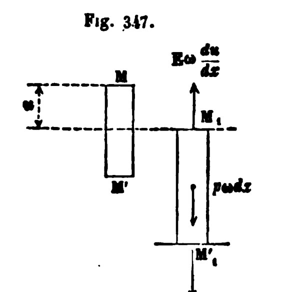
La force d'inertie a donc pour mesure

$$-\frac{p\omega}{g}\cdot\frac{d^2u}{dt^2}dx.$$

La tension développée dans la section M est mesurée par l'expression $E\omega\frac{du}{dx}$; elle tend à déplacer l'élément de bas en haut, si l'on suppose qu'il se soit déplacé de haut en bas en s'allongeant. Dans la section M', on retrouvera une tension en sens contraire, égale à $E\omega\frac{du}{dx}$ augmentée de sa différentielle partielle relative à x, ou de $\frac{d}{dx}\left(E\omega\frac{du}{dx}\right)dx$, de sorte

que la différence de ces deux tensions est égale à cette différentielle partielle; elle tend à abaisser l'élément MM'; en d'autres termes elle agit dans le même sens que le poids de l'élément, lorsqu'on suppose que l'élément s'est abaissé, par suite de son mouvement, au-dessous de sa position primitive.

Fig. 347.



En résumé, l'équation du mouvement vibratoire est celle-ci :

$$p\omega dx + \frac{d}{dx}\left(\mathrm{E}\omega \frac{du}{dx}\right) dx - \frac{p\omega}{g}\frac{d^2u}{dt^2} dx = 0.$$

Le premier terme représente le poids de l'élément, le second, la différence des tensions développées sur ses deux faces, le troisième la force d'inertie.

L'équation précédente se simplifie par la suppression du facteur commun ωdx; divisant par $\frac{p}{g}$, il vient, toutes réductions faites,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = g + \frac{\mathrm{E}g}{p}\frac{d^2u}{dx^2}. \qquad (1)$$

417. Pour intégrer cette équation, il convient de changer de variable.

Cherchons d'abord une solution particulière de l'équation, celle qui correspondrait à l'équilibre de la tige; on aurait alors $\frac{d^2u}{dt^2}=0$, et l'équation (1) deviendrait une simple équation différentielle, ne renfermant pas trace de la variable t. Intégrons cette équation différentielle

$$\frac{\mathrm{E}g}{p}\frac{d^2u}{dx^2} + g = 0,$$

ou bien

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{p}{\mathrm{E}}.$$

La première intégration nous donne

$$\frac{du}{dx} = C - \frac{p}{E} x,$$

C étant une constante arbitraire. Multiplions par Eω : il vient

$$E\omega \frac{du}{dx} = CE\omega - p\omega x.$$

Or E$\omega \frac{du}{dx}$ est la tension de la tige dans la section dont l'abscisse est x. Cherchons quelle est, dans l'état d'équilibre, la tension dans la section M. Cette section supporte le poids P, et le poids de la portion MB de la tige (fig. 346); elle est donc égale à $P + p\omega(l - x) = P + p\omega l - p\omega x$, résultat qui s'accorde avec l'équation précédente en prenant pour la constante arbitraire C la valeur

$$C = \frac{P + p\omega l}{E\omega}.$$

En définitive, on a dans l'état d'équilibre l'équation

$$E\omega \frac{du}{dx} = P + p\omega l - p\omega x,$$

et, en intégrant de nouveau,

$$E\omega u = Px + p\omega l x - \frac{1}{2} p\omega x^2,$$

ou bien

(2) $$u = \frac{Px}{E\omega} + \frac{p}{2E}(2lx - x^2).$$

Nous n'ajoutons pas de nouvelle constante, parce qu'on doit avoir $u = 0$ pour $x = 0$, puisque le point A reste fixe.

418. L'équation (2) est une solution particulière de l'équation (1),

indépendante du temps t. Elle permet de transformer cette équation ; en effet, posons d'une manière générale

$$(3) \qquad u = \frac{Px}{E\omega} + \frac{p}{2E}(2lx - x^2) + z,$$

z étant une nouvelle variable fonction de x et de t; nous aurons, en prenant les secondes dérivées par rapport à x et à t,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{p}{E} + \frac{d^2z}{dx^2},$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Puis, substituant dans l'équation (1), la variable u s'élimine, et l'équation (1) devient

$$(4) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Eg}{p}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

Posons, pour abréger, $\frac{Eg}{p} = a^2$, et nous aurons ramené l'équation (1) à la forme

$$(5) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = a^2\frac{d^2z}{dx^2},$$

équation bien connue des analystes sous le nom d'*équation des cordes vibrantes*.

419. Cette équation a été intégrée, au siècle dernier, par d'Alembert, le créateur de l'analyse des équations aux dérivées partielles. Voici la méthode fort ingénieuse qu'il a suivie pour résoudre le problème.

D'Alembert observe que l'équation (5) sera satisfaite pour toute fonction z des variables x et t qui aura, avec une autre fonction v des mêmes variables, une relation telle, que les deux expressions

$$vdx + a^2zdt,$$
$$zdx + vdt,$$

soient à la fois des différentielles exactes.

En effet, s'il en est ainsi, on aura à la fois

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(a^2z)}{dx} = a^2\frac{dz}{dx},$$

et

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dx}.$$

Prenons la dérivée de la première équation par rapport à x, la dérivée de la seconde par rapport à t; nous trouverons

$$\frac{d^2v}{dtdx} = a^2\frac{d^2z}{dx^2},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2v}{dxdt}.$$

Et comme $\frac{d^2v}{dxdt}$ est identiquement égal à $\frac{d^2v}{dtdx}$, il en résulte que $\frac{d^2z}{dt^2}$ est égal à $a^2\frac{d^2z}{dx^2}$, et que l'équation (5) est vérifiée.

Le problème est donc ramené à trouver des fonctions, z et v, de x et de t telles, que $vdx + a^2zdt$ et $zdx + vdt$ soient des différentielles exactes; ces mêmes fonctions rendront donc aussi différentielles exactes la somme

$$(vdx + a^2zdt) + a(zdx + vdt) = (v + az)dx + a(v + az)dt = (v + az)(dx + adt),$$

et en même temps la différence

$$(vdx + a^2zdt) - a(zdx + vdt) = (v - az)dx - a(v - az)dt = (v - az)(dx - adt).$$

Nous pouvons poser, en appelant M et N des fonctions indéterminées de x et de t,

$$(v + az)(dx + adt) = dM,$$
$$(v - az)(dx - adt) = dN.$$

Mais $dx \pm adt$ est la différentielle de $x \pm at$.

Pour que les équations précédentes soient satisfaites, il faut et il suffit que $v + az$ soit une fonction quelconque de $x + at$, et

que $v - az$ soit une fonction quelconque de $x - at$; la solution consiste donc à poser

$$v + az = \Phi(x + at),$$
$$v - az = \Psi(x - at),$$

Φ et Ψ étant des fonctions arbitraires quelconques. Entre ces deux équations, nous pouvons éliminer la fonction auxiliaire v, puis diviser par $2a$, et changer les fonctions arbitraires Φ et Ψ en d'autres fonctions arbitraires φ et ψ; nous aurons en définitive l'équation

$$z = \varphi(x + at) + \psi(x - at) \tag{6}$$

pour l'intégrale générale de l'équation (5).

DÉTERMINATION DES FONCTIONS ARBITRAIRES DANS LE PROBLÈME DES VIBRATIONS DE LA TIGE PESANTE LORSQUE LE POIDS ADDITIONNEL P EST ÉGAL A ZÉRO.

420. Revenons à la solution générale du problème de la tige vibrante

$$z = \varphi(x + at) + \psi(x - at), \tag{6 bis}$$

ou bien, en remplaçant z par sa valeur en fonction de u,

$$u = \frac{Px}{E\omega} + \frac{p}{2E}(2lx - x^2) + \varphi(x + at) + \psi(x - at). \tag{7}$$

Nous allons déterminer les fonctions φ et ψ, d'après les conditions initiales du mouvement, supposées données.

Dans ces équations, x ne peut recevoir que les valeurs comprises entre $x = 0$ et $x = l$, tandis que t peut être supposé variable de 0 à $+\infty$.

On donne, pour $t = 0$, la valeur de u en fonction de x, et la valeur de la vitesse $\frac{du}{dt}$ de chaque point à ce même instant.

On sait de plus que le point A est fixe; de sorte que pour $x = 0$, on doit avoir $u = 0$ et $\frac{du}{dt} = 0$, quel que soit t.

Pour simplifier la question, nous supposons que P est nul; ce qui

revient à chercher la vibration de la tige sous l'action de son propre poids seul.

Dans cette hypothèse, on aura $\frac{du}{dx} = 0$ pour $x = l$. En effet, la tension de la tige au point B est égale à $E\omega \frac{du}{dx}$; c'est la réaction égale et contraire au poids P; elle est donc nulle si $P = 0$.

On a ainsi les équations de condition suivantes :

$$\left.\begin{aligned} u &= F(x) \\ \frac{du}{dt} &= f(x) \end{aligned}\right\} \text{pour } t=0, \text{ les fonctions F et } f \text{ étant supposées données pour toute valeur de } x \text{ de 0 à } l.$$

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 \\ \frac{du}{dx} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{pour } x=0, \text{ quel que soit } t.$$

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = l, \text{ quel que soit } t.$$

Faisons $t = 0$ dans l'équation (7), après avoir supprimé le terme $\frac{Px}{E\omega}$, que nous supposons nul; il viendra pour $t = 0$

$$(8) \qquad u = \frac{p}{2E}(2lx - x^2) + \varphi(x) + \psi(x) = F(x).$$

Puis prenons la dérivée de (7) par rapport à t, et faisons $t = 0$; il viendra, en supprimant toujours le terme contenant P,

$$(9) \qquad \frac{du}{dt} = a[\varphi'(x) - \psi'(x)] = f(x).$$

Les équations (8) et (9) donnent les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ entre les limites $x = 0$ et $x = l$.

En effet, on tire de la seconde, en intégrant,

$$\varphi(x) - \varphi(x) = \frac{1}{a}\int f(x)dx,$$

et la première donne

$$\varphi(x) + \psi(x) = F(x) - \frac{p}{2E}(2lx - x^2).$$

On en déduit

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}\,F(x) - \frac{p}{4E}\,(2lx - x^2) + \frac{1}{2a}\int f(x)\,dx, \\ \psi(x) = \frac{1}{2}\,F(x) - \frac{p}{4E}\,(2lx - x^2) - \frac{1}{2a}\int f(x)\,dx. \end{cases}$$

La quadrature $\int f(x)\,dx$ introduira une constante arbitraire C; et l'on peut poser d'une manière générale

$$\int f(x)\,dx = C + \int_0^x f(x)\,dx.$$

Nous verrons plus loin que cette quantité C n'influe pas sur le résultat final, et qu'on peut par suite lui attribuer telle valeur qu'on voudra, o, par exemple.

Les fonctions F (x) et f (x) étant données pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = 0$ et $x = l$, les équations (10) font connaître de même les valeurs des fonctions φ et ψ pour toutes valeurs de leur variable immédiate comprises entre les mêmes limites.

Si on fait $x = 0$, dans l'équation (7) et dans l'équation qu'on en déduit par la dérivation par rapport à t, c'est-à-dire dans les équations suivantes

$$(11)\quad \begin{cases} u = \frac{p}{2E}\,(2lx - x^2) + \varphi(x + at) + \psi(x - at), \\ \frac{du}{dt} = a[\varphi'(x + at) - \psi'(x - at)], \end{cases}$$

on doit avoir, quel que soit t, en vertu des équations de condition,

$$(12)\quad \begin{cases} 0 = \varphi(at) + \psi(-at), \\ 0 = \varphi'(at) - \psi'(-at). \end{cases}$$

La première des équations (12) nous apprend que, quelle que soit la variable ζ, on a

$$\varphi(\zeta) = -\psi(-\zeta);$$

de sorte que si l'on connaît l'une des fonctions, φ, dans un certain intervalle, on peut en déduire l'autre fonction ψ dans l'intervalle compris entre les mêmes limites changées de signe. On connaît φ et ψ

quand leurs variables sont comprises entre o et l: on déduira donc de la première équation (12) les valeurs de ψ et de φ dans l'intervalle $x=0$ et $x=-l$; en définitive, on connaîtra φ et ψ pour toutes valeurs de la variable comprises entre les limites $-l$ et $+l$.

La seconde équation (12) rentre dans la première et ne nous apprend rien de nouveau.

Ayons égard maintenant à la condition $\frac{du}{dx}=0$ pour $x=l$, quel que soit t. Nous avons, en général,

$$(13) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{P}{E}(l-x) + \varphi'(x+at) + \psi'(x-at).$$

Faisant $x=l$, il viendra

$$(14) \qquad \varphi'(l+at) + \psi'(l-at) = 0,$$

quel que soit t.

L'équation (14) est une équation différentielle dans laquelle t est la seule variable indépendante. Intégrons cette équation, nous aurons

$$(15) \qquad \varphi(l+at) - \psi(l-at) = C',$$

C' étant une nouvelle constante arbitraire. Si nous faisons $t=0$, il vient

$$\varphi(l) - \psi(l) = C'.$$

Or nous avons déjà trouvé

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a}\int f(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^x f(x)\,dx + \frac{C}{a}.$$

Donc

$$(16) \qquad C' = \frac{1}{a}\int_0^l f(x)\,dx + \frac{C}{a},$$

de sorte que la constante C' s'exprime en fonction de la constante C. Il vient alors pour l'équation (15)

$$(17) \qquad \varphi(l + at) - \psi(l - at) = \frac{1}{a}\int_0^l f(x)\,dx + \frac{C}{a},$$

équation vraie pour toutes valeurs de t.

La première des équations (12) et l'équation (17) sont donc vraies pour toutes valeurs de leur variable. Remplaçons dans (12) at par $at - l$; nous aurons

$$(18) \qquad \begin{aligned} &\varphi(at - l) + \psi(-at + l) \\ &= \varphi(at - l) + \psi(l - at) = 0. \end{aligned}$$

Les équations (17) et (18) permettent d'éliminer la fonction ψ:

$$(19) \qquad \varphi(l + at) + \varphi(-l + at) = \frac{1}{a}\int_0^l f(x)\,dx + \frac{C}{a},$$

ou bien, en remplaçant $(-l + at)$ par une nouvelle variable ζ,

$$(20) \qquad \varphi(\zeta + 2l) + \varphi(\zeta) = \frac{1}{a}\int_0^l f(x)\,dx + \frac{C}{a}.$$

L'équation (20) nous donne donc $\varphi\,(\zeta + 2l)$ au moyen de $\varphi\,(\zeta)$; nous connaissons déjà $\varphi\,(\zeta)$ pour toutes valeurs de ζ comprises entre $-l$ et $+l$; nous en déduirons les valeurs de φ pour des valeurs de ζ comprises entre l et $3l$, puis entre $3l$ et $5l$, et ainsi de suite indéfiniment; en d'autres termes on pourra toujours trouver les valeurs de $\varphi\,(x + at)$, pour toutes valeurs de x comprises entre $x = 0$ et $x = l$, et pour toutes valeurs du temps t.

La fonction $\psi\,(x - at)$ se déterminera de la même manière; mais on peut aussi appliquer la première des équations (12), et observer qu'on a, en vertu de cette équation,

$$0 = \varphi(-x + at) + \psi(x - at).$$

Donc

$$\psi(x - at) = -\varphi(x + at),$$

ce qui permet d'écrire l'équation (7) sous la forme

$$(21) \qquad u = \frac{p}{2E}(2lx - x^2) + \varphi(x + at) - \varphi(-x + at).$$

La détermination de φ pour toutes valeurs de sa variable achève donc toute la solution.

La constante C disparaissant dans la différence des fonctions

$$\varphi(x + at) - \varphi(-x + at),$$

on peut, comme nous l'avons dit, la supposer égale à 0.

L'équation (20) montre que le mouvement est périodique. En effet, remplaçons

$$\zeta \quad \text{par} \quad \zeta + 2l;$$

il viendra

$$\varphi(\zeta + 4l) + \varphi(\zeta + 2l) = \frac{1}{a}\int_0^l f(x)\,dx + \frac{C}{a},$$

et, en retranchant l'équation (20),

$$(22) \qquad \varphi(\zeta + 4l) - \varphi(\zeta) = 0,$$

de sorte que la fonction φ (ζ) est périodique, et que la période est égale à $4l$. Il en est de même de la fonction ψ; et par suite, la tige se retrouvera identiquement dans la même position, avec les mêmes vitesses pour les mêmes points, à deux époques pour lesquelles $x + at$ différera de $4l$, c'est-à-dire au bout d'un temps égal à $\frac{4l}{a}$; c'est la durée d'une allée et d'une venue complète, le long de la tige, d'un mobile qui serait animé dans un sens et dans l'autre de la vitesse moyenne $\frac{a}{2}$.

Nous avons supposé P = o. Si nous voulions conserver P dans le calcul, les équations deviendraient beaucoup plus compliquées. Nous renvoyons pour le développement de la solution dans ce cas général au *Cours de mécanique appliquée* de M. Bresse, 2ᵉ édition, chapitre VI, § 139, pages 354 et suivantes.

VIBRATIONS TRANSVERSALES D'UNE POUTRE DROITE POSÉE SUR DEUX APPUIS.

421. Nous admettrons que la poutre AB, posée sur les appuis de niveau A et B, a une section constante, et qu'elle est chargée uniformément de p unités de poids par unité de longueur. On donne la distance $l = AB$ des deux appuis. On suppose enfin la poutre animée d'un mouvement vibratoire transversal, dont on demande la loi.

Fig. 348.

A M M' B

Les équations cherchées s'obtiendront en introduisant les forces d'inertie dans les équations de l'équilibre intérieur de la pièce.

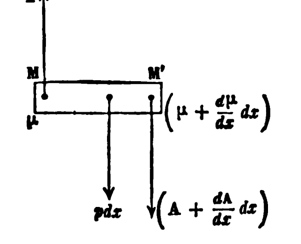
Prenons sur la poutre un point M à une distance x du point A, et considérons un second point M' infiniment voisin du point M, et défini par son abscisse $x + dx$. Le poids de l'élément, surcharge comprise, est pdx, et sa masse est par conséquent $\frac{p}{g} dx$.

Soit μ le moment des forces élastiques dans la section M; le moment des mêmes forces en M sera égal à

$$\mu + \frac{d\mu}{dx} dx,$$

et devra être pris avec un signe contraire.

Fig. 349.



Représentons de même par une lettre A la résistance à l'effort tranchant dans la section M; nous trouverons en M' une résistance à l'effort tranchant égale à

$$A + \frac{dA}{dx} dx,$$

et dirigée en sens opposé.

L'élément MM' reçoit des déplacements normaux à AB, et nous supposerons que toutes ses molécules suivent les verticales qui les contenaient dans l'état primitif. Rigoureusement, ces déplacements verticaux ne sont admissibles que pour les molécules de la fibre neutre. Les molécules situées en dehors de cette fibre subissent, par suite de la flexion, un mouvement de bascule autour de l'axe horizontal mené dans chaque section par son centre de gravité ; il y aurait donc lieu d'introduire dans le calcul le couple d'inertie développé par ce déplacement angulaire. Pour plus de simplicité, nous suivrons la marche adoptée par M. Phillips dans ses mémoires sur les poutres vibrantes, et nous ferons abstraction de ce couple, qui est du reste très-faible toutes les fois que la hauteur de la poutre est petite par rapport à sa portée, ou que le poids propre de la poutre est petit par rapport à la surcharge.

Dans ces conditions, les forces d'inertie se réduisent à une force unique verticale et ayant pour expression

$$-\frac{p}{g}dx \times \frac{d^2y}{dt^2};$$

elle est dirigée de bas en haut si l'élément de poutre descend avec une vitesse croissante.

Rappelons que nous comptons les y positivement au-dessus de AB, et négativement au-dessous.

Nous pouvons poser les équations du mouvement vibratoire ; elles se réduiront à deux ; l'une est celle des composantes verticales, l'autre, celle des moments.

Équation des composantes verticales.

$$\mathrm{A} - \frac{p}{g}dx \times \frac{d^2y}{dt^2} - pdx - \left(\mathrm{A} + \frac{d\mathrm{A}}{dx}dx\right) = 0,$$

ou, en réduisant et en supprimant le facteur commun dx,

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{p}\frac{d\mathrm{A}}{dx} + g = 0.$$

Équation des moments par rapport au point d'application du poids pdx.

$$\mu + A \times \frac{dx}{2} + \left(A + \frac{dA}{dx}dx\right) \times \frac{dx}{2} - \left(\mu + \frac{d\mu}{dx}dx\right) = 0.$$

Réduisons, supprimons le terme infiniment petit du second ordre et divisons par dx : il vient

$$(2) \qquad \frac{d\mu}{dx} = A,$$

équation rigoureusement vraie dans l'état d'équilibre, et approximativement vraie dans l'état de mouvement, puisque nous avons négligé le couple d'inertie provenant du mouvement de rotation des sections transversales autour de l'horizontale menée par le centre de gravité.

Or nous savons que le moment μ des forces élastiques est représenté par la fonction

$$\mu = EI \frac{d^2y}{dx^2}.$$

On a donc, en en prenant la dérivée par rapport à x,

$$\frac{d\mu}{dx} = EI \frac{d^3y}{dx^3} = A,$$

et, en prenant encore la dérivée de A par rapport à x,

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dA}{dx}.$$

Substituons cette expression de $\frac{dA}{dx}$ dans l'équation (1) ; nous aurons l'équation finale

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{gEI}{p}\frac{d^4y}{dx^4} + g = 0;$$

Elle contient la dérivée partielle du quatrième ordre de y par rap-

port à x, et la dérivée partielle du second ordre de y par rapport à t. Elle présente donc pour l'intégration un plus grand degré de difficulté que l'équation des cordes vibrantes, et il est effectivement impossible d'en obtenir l'intégrale générale sous forme finie (1).

422. Cherchons-en une solution particulière, qui corresponde à l'équilibre, ou au repos de la poutre; cela revient à supprimer le terme $\frac{d^2y}{dt^2}$, le seul où entre la variable t. Alors l'équation (3) devient une simple équation différentielle du quatrième ordre,

$$\mathrm{EI}\frac{d^4y}{dx^4} = -p,$$

qu'il est facile d'intégrer. On trouvera successivement, en appelant C et C' des constantes arbitraires,

$$\mathrm{EI}\frac{d^3y}{dx^3} = -px + \mathrm{C}$$

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}px^2 + \mathrm{C}x + \mathrm{C}'.$$

Mais $\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2}$ est égal au moment fléchissant au point de la poutre défini par son abscisse x, et ce moment est exprimé par la fonction

$$\frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2 = \frac{1}{2}px(l-x).$$

On identifiera donc les deux expressions en faisant

$$\mathrm{C}' = 0, \quad \mathrm{C} = \frac{1}{2}pl.$$

Continuons à intégrer, nous aurons d'abord

$$\mathrm{EI}\left(\frac{dy}{dx} - \mathrm{tg}\,\alpha\right) = -\frac{1}{6}px^3 + \frac{1}{4}plx^2,$$

et dans cette équation la constante $\mathrm{tg}\,\alpha$ se déterminera en obser-

(1) V. Poisson, *Journal de l'École polytechnique*, t. VI (an XIII).

vant que

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \frac{l}{2}.$$

Donc

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(\frac{1}{6}\,p\,\frac{l^3}{8} - \frac{1}{4}\,pl \times \frac{l^2}{4}\right) = -\frac{pl^3}{\mathrm{EI}} \times \frac{1}{24};$$

enfin, la dernière intégration nous donnera

$$\mathrm{EI}\left(y + \frac{1}{24}\,\frac{pl^3}{\mathrm{EI}}\,x\right) = -\frac{1}{24}\,px^4 + \frac{1}{12}\,plx^3.$$

Nous obtenons ainsi, comme solution particulière de l'équation (3), l'équation

$$\mathrm{EI}y = -\left(\frac{1}{24}\,px^4 - \frac{1}{12}\,plx^3 + \frac{1}{24}\,pl^3x\right),$$

ou

$$y = -\frac{p}{24\mathrm{EI}}\,(x^3 - 2lx^2 + l^3)x,$$

qui n'est autre chose que l'équation de la poutre déformée, quand elle demeure en équilibre.

423. Nous pourrons représenter la solution complète de l'équation (3) par la formule

$$(4) \qquad y = -\frac{p}{24\mathrm{EI}}\,(x^3 - 2lx^2 + l^3)x + z,$$

dans laquelle le premier terme représente la *portion statique* du déplacement y, et le second z, la *portion oscillatoire* du même déplacement, variable à la fois avec x et avec t.

On en déduit, en prenant les dérivées par rapport à x et à t,

$$\mathrm{EI}\,\frac{d^4y}{dx^4} = -p + \mathrm{EI}\,\frac{d^4z}{dx^4},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (3) conduit à

l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g}{p}\left(-p + \mathrm{EI}\,\frac{d^4z}{dx^4}\right) + g = 0,$$

ou bien, après toute réduction, et après avoir posé $\frac{g\mathrm{EI}}{p} = a^4$, à l'équation simplifiée

$$(4) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} + a^4\,\frac{d^4z}{dx^4} = 0.$$

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DES POUTRES VIBRANTES SOUS FORME D'INTÉGRALE PARTIELLE.

424. Poisson a donné, dans un Mémoire en date du 19 juillet 1819, l'intégrale de l'équation proposée. Laplace avait fait connaître l'intégrale de l'équation

$$(a) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = c\,\frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

qui est relative à la distribution de la chaleur, dans un solide homogène, suivant une seule dimension.

Différentions l'équation (1) par rapport à t; il viendra

$$(b) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = c\,\frac{d^3\varphi}{dx^2dt} = c\,\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{d\varphi}{dt} = c\,\frac{d^2}{dx^2}\left(c\,\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) = c^2\,\frac{d^4\varphi}{dx^4}.$$

Comparant à l'équation (4) proposée, on reconnaît qu'il y a identité si l'on pose

$$z = \varphi \quad \text{et} \quad c^2 = -a^4.$$

Cette dernière relation fournit pour c deux valeurs,

$$c = +a^2\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad c = -a^2\sqrt{-1}.$$

L'équation (a) a été intégrée par Laplace, d'abord sous forme de série, puis sous forme d'une intégrale partielle représentant la somme des termes de cette série. Nous nous bornerons à donner la solution et à la vérifier.

L'intégrale générale de l'équation (a) est, en désignant par f une fonction arbitraire,

$$(c) \qquad \varphi = \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} e^{-u^2} f(x + 2u\sqrt{ct})\, du.$$

Dans cette équation, l'intégration porte sur la variable u, qui passe par toutes les valeurs réelles de l'infini négatif à l'infini positif; les variables x et t sont traitées comme des constantes dans l'intégration.

Pour vérifier ce résultat, différentions l'équation (c) deux fois par rapport à x, puis une fois par rapport à t. Il viendra

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f''(x + 2u\sqrt{ct})\, du,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f'(x + 2u\sqrt{ct})\, du \times \frac{u\sqrt{c}}{\sqrt{t}}$$

$$= \sqrt{\frac{c}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, u\, du \times f'(x + 2u\sqrt{ct}).$$

Sous cette dernière forme, l'intégrale se prête à l'intégration par parties. On a, en effet, en laissant de côté les limites,

$$\int e^{-u^2} u\, du \times f'(x \times 2u\sqrt{ct}) = -\frac{1}{2} e^{-u^2} f'(x + 2u\sqrt{ct})$$
$$+ \frac{1}{2} \int e^{-u^2} f''(x + 2u\sqrt{ct})\, 2\sqrt{ct}\, du.$$

Prenons ensuite le résultat obtenu entre les limites $-\infty$ et $+\infty$; le terme en dehors du signe $\int$, contenant en facteur e^{-u^2}, est nul aux deux limites; le second terme se réduit à

$$\sqrt{ct} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f''(x + 2u\sqrt{ct})\, du,$$

en faisant sortir du signe $\int$ le facteur $\sqrt{ct}$, qu'on doit regarder comme une constante.

Multipliant par $\sqrt{\frac{c}{t}}$, on a donc

$$\frac{d\varphi}{dt}=c\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}f''\left(x+2u\sqrt{ct}\right)du=c\frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

c'est-à-dire l'équation (a).

La solution contenue dans l'équation (c) ne renferme qu'une fonction arbitraire. Elle donne néanmoins l'intégrale générale de l'équation proposée, c'est-à-dire, elle satisfait à l'équation (1) et à toutes celles qu'on peut en déduire par des dérivations prises par rapport aux deux variables. La présence de la fonction arbitraire sous le signe $\int$ semble ainsi donner à la solution un plus haut degré de généralité.

Pour passer de l'équation (a) à l'équation donnée (4), il suffit de remplacer φ par z, et de faire usage successivement des deux déterminations de la constante c; il viendra, en réunissant les deux valeurs correspondantes, et en désignant par f et F deux fonctions arbitraires,

$$z=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}f\left(x+2u\sqrt{a^2t\sqrt{-1}}\right)du$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{F}\left(x+2u\sqrt{-a^2t\sqrt{-1}}\right)du.$$

Pour développer la valeur de z en série, on développera les fonctions f et F suivant la série de Taylor (supposée applicable aux fonctions données); puis on formera les intégrales indiquées, qui sont toutes de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}u^k\,du,$$

et qui entrent comme coefficients dans ces séries. Le résultat final ne contiendra plus aucune trace de la variable auxiliaire u.

Intégration sous forme de série.

425. L'intégrale générale de cette équation aux dérivées partielles peut renfermer une infinité de termes de différentes formes.

On pourrait d'abord y introduire une fonction entière de x, du 4e degré, dont la 4e dérivée serait constante; puis une fonction entière de t du 2e degré, dont la 2de dérivée serait également constante: il faudrait que le produit de la première constante par a^4, ajouté à la seconde constante, fût identiquement nul, ce qui permet d'exprimer l'une des constantes au moyen de l'autre.

On peut y joindre une infinité de termes de la forme $\mathrm{T}\sin mx$, T étant une fonction du temps, et m un coefficient constant. En effet, si l'on considère un de ces termes en particulier, on a pour sa 4e dérivée relativement à x

$$\mathrm{T}m^4 \sin mx,$$

et pour la seconde dérivée relativement à t,

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2}\sin mx.$$

Ce terme satisfait donc à l'équation (5), pourvu qu'on ait

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} + a^4 m^4 \mathrm{T} = 0,$$

équation différentielle linéaire du 2e ordre, qu'on sait intégrer. On en déduit

$$\mathrm{T} = \mathrm{C}_m \sin m^2a^2t + \mathrm{C}'_m \cos m^2a^2t,$$

en appelant C_m et C'_m deux constantes arbitraires. Le terme considéré prend la forme

$$(\mathrm{C}_m \sin m^2a^2t + \mathrm{C}'_m \cos m^2a^2t) \sin mx;$$

Dans cette expression C_m et C'_m désignent des constantes arbitraires, et m un nombre qui sera assujetti plus loin à certaines conditions.

Nous supprimerons dans la solution générale les fonctions entières de x et de t. Pour la fonction entière de t, elle ne peut subsister dans la solution, par la raison qu'à partir d'une certaine valeur de la variable t, qui grandit seule indéfiniment, cette fonction prendrait des valeurs de plus en plus grandes, et par suite il serait impossible que la poutre restât indéfiniment posée sur ses appuis. Quant à la fonction entière de x, elle est englobée dans le polynome du quatrième degré en x qui complète la valeur de z, et qui donne la valeur générale de y, puisque la suppression de tous les termes fonctions de t dans la valeur de y doit ramener l'expression de y à celle qui convient à l'équilibre. Nous poserons donc simplement

$$(6) \qquad z = \Sigma\,(C_m \sin m^2a^2t + C'_m \cos m^2a^2t) \sin mx,$$

et ce sera l'équation du déplacement oscillatoire de la poutre autour de sa position moyenne ou de sa position d'équilibre.

426. Passons à l'examen des conditions particulières du problème.

Aux points A et B, c'est-à-dire pour $x = 0$ et pour $x = l$, la poutre ne subit aucun déplacement ; donc $y = 0$ en ces points ; de plus le moment fléchissant y est nul, donc $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, et cela quel que soit t. Le polynome du quatrième degré, $x(x^3 - 2lx^2 + l^3)$, et sa seconde dérivée par rapport à x, $12x^2 - 12lx$, s'annulent à la fois pour $x = 0$ et $x = l$. Il suffit donc de faire en sorte que, quel que soit t, on ait, pour $x = 0$ et $x = l$, $z = 0$ et $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$.

Pour $x = 0$, tous les termes de la valeur de z s'annulent, puisqu'ils contiennent en facteur $\sin mx$; il en est de même de tous les termes de la valeur de $\frac{d^2z}{dx^2}$.

Faisons donc $x = l$ dans les expressions générales de z et de $\frac{d^2z}{dx^2}$; il vient

$$\Sigma\,(C_m \sin m^2a^2t + C'_m \cos m^2a^2t) \sin ml = 0,$$

et

$$\Sigma m^2(C_m \sin m^2a^2t + C'_m \cos m^2a^2t) \sin ml = 0,$$

équations qui doivent être identiques, quel que soit t. Il faut et il suffit pour cela que dans chaque terme, $\sin ml$ soit nul, ou que ml soit un multiple de la demi-circonférence. Soit donc $ml = k\pi$, k étant un entier positif quelconque, au moins égal à l'unité; on aura, pour déterminer m, la relation $m = \frac{k\pi}{l}$.

La solution se trouve donc préparée et s'exprime par l'équation

$$(7)\quad y = -\frac{p}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3)x + \sum_{k=1}^{k=+\infty}\left(C_k \sin\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t + C'_k \cos\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t\right)\sin\frac{k}{}$$

où k doit recevoir toutes les valeurs entières et positives de 1 à ∞, et où C_k et C'_k représentent des constantes arbitraires en nombre infini, qui restent à déterminer.

Pour y parvenir, il faut employer les équations relatives à l'état initial de la poutre. Supposons qu'on donne pour $t = 0$ les valeurs de y et de $\frac{dy}{dt}$ en chaque point, c'est-à-dire pour toute valeur de x comprise entre 0 et l; soient $F(x)$ et $f(x)$ les deux fonctions qui représentent ces valeurs : faisant $t=0$ dans la formule (7), il viendra

$$(8)\qquad F(x) = -\frac{p}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3)x + \sum_{k=1}^{k=\infty} C'_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$(9)\qquad f(x) = \frac{\pi^2a^2}{l^2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^2C_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Ces équations (8) et (9) permettent de déterminer les inconnues C_k et C'_k. Prenons pour exemple la dernière équation. La fonction $f(x)$ est connue pour toute valeur de la variable comprise entre 0 et l; elle ne devient pas infinie dans cet intervalle, et elle s'annule aux deux limites. Dans de telles conditions, et sans même exiger que la

fonction $f(x)$ soit continue, on peut la développer en une série de sinus ou de cosinus d'arcs proportionnels à la variable.

Posons en effet

$$(10)\quad f(x) = A_1 \sin\frac{\pi x}{l} + A_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + A_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots + A_m \sin\frac{m\pi x}{l} + \ldots,$$

et proposons-nous de trouver le coefficient A_m du terme général. Nous multiplierons pour cela la série (10) par $\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx$, et nous intégrerons entre les limites o et l; il viendra

$$(11)\quad \int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = A_1\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx + \ldots\ldots + A_m\int_0^l \sin^2\frac{m\pi x}{l}\,dx + \ldots$$

Or toutes les intégrales définies du second membre, sauf celle qui se trouve multipliée par A_m, sont identiquement nulles. En effet, on a en général

$$\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right];$$

multipliant par dx et formant l'intégrale indéfinie, nous aurons pour résultat

$$\frac{1}{2}\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l} - \frac{1}{2}\frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l},$$

expression qui, prise entre les limites o et l, se réduit à zéro, *toutes les fois que* m *est différent de* n.

Lorsqu'au contraire $m = n$, l'intégrale définie obtenue par ce procédé prendrait la forme $\frac{0}{0}$, ce qui ne nous apprend rien; mais la quadrature à effectuer devient alors

$$\int_0^l \sin^2\frac{m\pi x}{l}\,dx,$$

et cette fonction a pour intégrale générale

$$\frac{l}{m\pi}\left(\frac{m\pi x}{2l}-\frac{1}{4}\sin\frac{2m\pi x}{l}\right);$$

si l'on y fait $x = 0$, $x = l$, et qu'on retranche, il vient pour résultat final $\frac{l}{2}$. Donc

$$\int_0^l \sin^2\frac{m\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{2}.$$

En définitive, l'équation (11) se réduit simplement à la relation

$$\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=A_m\times\frac{l}{2},$$

et par suite

$$\text{(12)}\qquad A_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

La fonction $f(x)$ étant donnée numériquement de $x = 0$ à $x = l$, on pourra calculer par des quadratures, pour les valeurs entières successives de m, les valeurs correspondantes des intégrales définies, et par suite les valeurs de A_m; la fonction $f(x)$ se trouvera ainsi développée en série de sinus d'arcs proportionnels à la variable x.

Remplaçons $f(x)$ par ce développement en série dans l'équation (11). Nous devrons avoir identiquement

$$f(x)=A_1\sin\frac{\pi x}{l}+A_2\sin\frac{2\pi x}{l}+A_3\sin\frac{3\pi x}{l}+\ldots\ldots+A_m\sin\frac{m\pi x}{l}+\ldots\ldots$$
$$=\frac{2}{l}\left[\sin\frac{\pi x}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi x}{l}\,dx+\sin\frac{2\pi x}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2\pi x}{l}\,dx+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\sin\frac{m\pi x}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx+\ldots\right]=\frac{\pi^2a^2}{l^2}\sum_{k=1}^{k=\infty}k^2C_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$
$$=\frac{\pi^2a^2}{l^2}\left[C_1\sin\frac{\pi x}{l}+4C_2\sin\frac{3\pi x}{l}+\ldots\ldots+m^2C_m\sin\frac{m\pi x}{l}+\ldots\ldots\right]$$

et par suite, les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$ s'expriment par les relations

$$C_1 = \frac{2l}{\pi^2 a^2}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi x}{l}\,dx,$$
$$C_2 = \frac{2l}{4\pi^2 a^2}\int_0^l f(x)\sin\frac{2\pi x}{l}\,dx,$$
$$\vdots$$
et en général $C_m = \dfrac{2l}{m^2\pi^2 a^2}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$

Le développement de la fonction

$$F(x) + \frac{p}{24EI}(x^3 - 2lx^2 + l^3)x,$$

en série de sinus d'arcs multiples de $\frac{\pi x}{l}$, s'effectuerait de même, et conduirait à la détermination des constantes C'_k. Pour abréger, désignons par $\mathbf{F}(x)$ cette nouvelle fonction, donnée entre les limites $x = 0$, $x = l$, et s'annulant à ces limites; on trouvera la formule générale

$$(13) \qquad C'_m = \frac{1}{2}\int_0^l \mathbf{F}(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

362. En résumé, l'équation du mouvement prend la forme suivante :

$$(14)\quad y = -\frac{p}{24EI}(x^4 - 2lx^3 + l^3x) + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t\right)\int_0^l \mathbf{F}(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx$$
$$+\frac{2l}{\pi^2a^2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t\right)\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Les termes qui contiennent le temps, dans cette équation, sont tous périodiques. Prenons en particulier les premiers termes des deux séries, c'est-à-dire ceux qui correspondent à $k = 1$; si nous considérons deux époques séparées par un intervalle égal à θ, la valeur de y se retrouvera identiquement la même si $\frac{\pi^2 a^2}{l^2}\theta$ est égal à 2π, c'est-à-dire, si θ est égal à

$$\frac{2l^2}{\pi a^2}, \text{ ou enfin à } \frac{2l^2}{\pi}\sqrt{\frac{p}{g\mathrm{EI}}},$$

en remplaçant a par sa valeur; c'est la durée de la période. Tous les autres termes ont des périodes égales à des parties aliquotes de θ, de sorte que la superposition de tous ces mouvements périodiques est elle-même un mouvement périodique.

427. M. Bresse a complété cette analyse en y introduisant le couple d'inertie produit par l'oscillation angulaire des sections transversales autour de l'horizontale menée dans leurs plans par leurs centres de gravité. Il suffit, pour tenir compte de cet effet, d'ajouter à l'équation (5) le terme

$$-b^2\frac{d^4z}{dx^2dt^2},$$

dans lequel b^2 remplace le carré du rayon de giration de la section transversale par rapport à l'horizontale menée par son centre de gravité, multipliée par le rapport du poids propre de la poutre au poids total, surcharge comprise.

Pour évaluer, en effet, ce couple d'inertie, observons que, si I est le moment d'inertie d'un corps tournant autour d'un axe fixe avec la vitesse angulaire ω, le couple des forces d'inertie est représenté par le produit $-\mathrm{I}\frac{d\omega}{dt}$. Ici, le rapport $\frac{dy}{dx}$ représente l'angle que fait l'axe neutre avec l'horizon, ou l'angle égal du plan de la section transversale avec sa position primitive. La vitesse angulaire de la section autour de l'horizontale de son centre de gravité est donc

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dxdt},$$

et l'accélération angulaire

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^3y}{dxdt^2}.$$

Si l'on désigne par r le rayon de giration de la section par rapport à l'horizontale menée par le centre de gravité, et par p' le poids propre de la poutre par unité de longueur, le moment des forces

d'inertie de la longueur dx de la poutre sera

$$-\frac{p'dx}{g}\times r^2\frac{d^3y}{dxdt^2}.$$

On n'a pas à tenir compte ici de la surchagre qui ne participe pas au mouvement de bascule dont il s'agit.

Ce couple doit être introduit dans l'équation (2) des moments (de la page 746), ce qui donnera

$$\frac{d\mu}{dx}=\text{A}+\frac{p'}{g}\times r^2\frac{d^3y}{dxdt^2};$$

le couple ne change rien d'ailleurs à l'équation (1) des forces :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{p}\frac{d\text{A}}{dx}+g=0.$$

Éliminant A entre ces deux équations, il vient

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{p}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mu}{dx}-\frac{p'}{g}r^2\frac{d^3y}{dxdt^2}\right)=0,$$

ou bien, en remplaçant μ par $\text{EI}\,\frac{d^2y}{dx^2}$,

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g\text{EI}}{p}\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{p'}{p}r^2\frac{d^4y}{dx^2dt^2}=0,$$

ou bien encore

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a^4\frac{d^4y}{dx^4}-b^2\frac{d^4y}{dx^2dt^2}=0,$$

en appelant b^2 la quantité $\frac{p'}{p}r^2$.

Ce terme additionnel n'augmente pas la difficulté de l'intégration, et l'on arrive au résultat définitif

$$\begin{aligned}y=&-\frac{p}{24\text{EI}}(x^4-2lx^3+l^3x)\\&+\frac{2}{l}\sum_{k=\infty}^{k=1}\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k^2\pi^2a^2t}{l\sqrt{k^2\pi^2b^2+l^2}}\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\text{F}(x)dx\right]\\&+\frac{2}{\pi^2a^2}\sum_{k=\infty}^{k=1}\left[\frac{\sqrt{k^2\pi^2b^2+l^2}}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k^2\pi^2a^2t}{l\sqrt{k^2\pi^2b^2+l^2}}\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}f(x)dx\right].\end{aligned}$$

Chaque terme de la série est encore périodique; mais la durée de période varie pour chacun d'eux, et les rapports de ces durées ne sont pas exprimés par des nombres entiers. Aussi il y a superposition d'un nombre indéfini de mouvements périodiques, mais on ne peut pas affirmer que le mouvement résultant de cette superposition soit lui-même périodique.

VIBRATIONS TRANSVERSALES D'UNE POUTRE DROITE POSÉE SUR DEUX APPUIS DE NIVEAU ET PARCOURUE PAR UNE CHARGE ROULANTE.

428. Le problème traité dans le paragraphe précédent suppose que la charge de la poutre est fixe par rapport à la poutre pendant la durée du mouvement oscillatoire. Ce n'est pas ainsi que les choses se passent dans la pratique. Un pont métallique à poutre droite est en équilibre sous l'action de son propre poids; une charge mobile, un train, par exemple, envahit le tablier du pont. L'équilibre intérieur est rompu par cette addition de charge, et l'inertie de la poutre ne lui permet pas de réaliser à chaque instant l'équilibre correspondant à la distribution particulière de la surcharge à ce même instant. Il se produit donc des mouvements oscillatoires, dans lesquels les forces d'inertie des molécules de la poutre et des molécules de la surcharge interviennent pour compléter l'équilibre, qui n'existerait pas si l'on n'y faisait entrer que les forces élastiques.

Les premières recherches sur cette matière ont été faites en Angleterre; une commission nommée par le Parlement, en 1847, a traité la question à un point de vue expérimental, en faisant passer à différentes vitesses des charges roulantes sur des barres métalliques posées sur deux appuis. Le rapport de cette commission a été déposé en 1849. Une première étude analytique du problème a été faite à cette occasion par M. Stokes, professeur à l'Université de Cambridge. Pour simplifier le problème, M. Stokes supposait la charge roulante concentrée en un seul point de la portée, et il n'examinait que deux cas extrêmes, celui d'une charge roulante assez petite pour

que sa masse fût négligeable comparativement à celle de la poutre, et celui où, au contraire, la masse de la poutre était assez petite pour être négligeable par rapport à celle de la surcharge.

Le travail de M. Stokes a été publié dans les *Transactions of the Cambridge philosophical Society*, année 1849. On trouve dans les *Annales des ponts et chaussées*, année 1851, un résumé du rapport de la commission, et MM. Molinos et Prosnier en ont aussi présenté une analyse sommaire dans leur grand *Traité des ponts métalliques*. M. Stokes avait indiqué dans ses recherches l'usage qu'on peut faire, pour l'étude expérimentale d'un problème aussi compliqué, des principes de la similitude mécanique. Plus récemment, M. Phillips, l'auteur de très-remarquables travaux analytiques sur l'élasticité et la mécanique vibratoire (1), a généralisé cette application de la similitude (2), et posé les lois de la véritable réduction d'échelle à faire subir aux divers éléments du problème, pour qu'on puisse conclure avec sûreté d'une expérience faite en petit à une expérience en grand. La similitude mécanique dont il s'agit ici n'est pas

---

(1) *Annales des mines*, 1855.—Théorie des ressorts, *Annales des mines*, 1852.—Spiral réglant, *Annales des mines*, 1861.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 3 décembre 1866. Voici la conclusion du travail de M. Phillips :

« Soit un système composé d'une poutre prismatique, reposant sur un nombre quelconque de points d'appui, formant ainsi un certain nombre de travées, et supportant un certain nombre de mobiles, de poids quelconques relativement les uns aux autres, mais tous animés de la même vitesse.

« Un autre système sera *comparable* avec celui-ci :

1° Pourvu que $\frac{PV^2 l}{EI}$ soit le même de part et d'autre, P désignant le poids d'un mobile ou de son homologue, l la longueur d'une travée ou de son homologue, V la vitesse du mobile, E le coefficient d'élasticité, et I le moment d'inertie de la section transversale ;

2° Que le rapport des poids mobiles entre eux soit le même de part et d'autre ;

3° Que $\frac{P}{P_1}$ soit le même de part et d'autre, ainsi que $\frac{P}{P_2}$, ou $\frac{P_1}{P_2}$, en désignant par P_1 et P_2 les poids de la poutre seule et de cette poutre avec la charge uniformément répartie, soit pour une travée, soit pour la totalité ;

4° Que le rapport des longueurs des diverses travées soit le même de part et d'autre ;

5° Que les divers mobiles soient toujours placés de part et d'autre en des points homologues des travées homologues.

« Ces conditions étant remplies, il arrivera que z, ou l'ordonnée comptée à partir de la position d'équilibre sous la charge uniformément répartie, sera, de part et d'autre, pour les point homologues, proportionnelle à $\frac{Pl^3}{EI}$.

complète; elle a des lois plus compliquées que la vraie similitude dont Newton a autrefois posé le principe; cela tient à ce que les forces qui s'introduisent dans les équations des poutres vibrantes se partagent en deux classes : les forces extérieures, telles que les poids et les réactions des appuis, qui peuvent être augmentées ou diminuées dans un rapport arbitraire, et les forces élastiques, dont les expressions contiennent des facteurs dépendants des déformations des pièces, et dont le coefficient d'altération est par suite lié avec le rapport d'amplification des dimensions linéaires. Les conditions de similitude étaient donc plus difficiles à démêler dans l'analyse d'un tel problème qu'elles ne le sont pour les questions ordinaires de la mécanique rationnelle.

Le mémoire de M. Phillips conduit à déterminer les rapports de réduction dont il faut affecter les dimensions linéaires, les masses, les forces, le temps, de telle sorte qu'on peut aujourd'hui faire en petit une expérience reproduisant avec exactitude toutes les circonstances qu'on aurait pu observer dans une expérience à grande échelle. Ce résultat est d'autant plus précieux que, pris dans toute sa généralité, le problème des vibrations des poutres sous l'action de charges roulantes surpasse les forces de l'analyse. Au lieu de chercher à intégrer des équations qui se présentent en général sous une forme extrêmement rebelle, on pourra chercher expérimentalement les lois du problème ramené à une échelle assez petite pour que l'expérience soit facile et peu coûteuse; puis on appliquera la méthode de la similitude, et l'on saura comment il faut généraliser les résultats obtenus pour les appliquer à une échelle aussi grande qu'on voudra (1).

---

(1) Voir aussi *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 11 janvier 1869, Mémoire de M. Phillips *Sur l'équilibre des solides élastiques semblables*. Pour faire en petit les expériences sur la résistance des poutres, il est assez difficile, en pratique, de faire varier les forces dans le rapport convenable, d'autant plus que le poids du modèle est une force déterminée, qu'on ne peut modifier arbitrairement pour la ramener à la grandeur que demande l'expérience. M. Phillips évite cette difficulté en attachant la poutre, placée verticalement, à un arbre suffisamment éloigné, auquel il imprime une vitesse angulaire arbitraire. « En faisant ainsi intervenir la force centrifuge, on peut faire en sorte que « pour le modèle la force agissant sur toute la masse, et rapportée à l'unité de masse, « soit très-supérieure à la pesanteur, et soit égale à la valeur qu'on veut lui donner. »

La commission anglaise de 1847 ne possédait pas cette notion, et les recherches de M. Stokes faisaient plutôt pressentir l'existence d'une loi générale qu'elles ne formulaient cette loi d'une manière précise. Aussi les conclusions prises à cette époque étaient-elles de nature à inspirer, au sujet de la stabilité des ponts métalliques, des craintes que les travaux plus récents, et mieux encore les expériences journalières de l'exploitation des chemins de fer, n'ont pas justifiées. Dans toutes les expériences de la commission, on a atteint sans difficulté les vitesses assez grandes pour produire la rupture des poutres soumises aux observations. On sait très-bien aujourd'hui que, lorsque les poutres d'un pont métallique sont suffisamment raides, le passage des trains à grande vitesse ne peut y produire aucun effet fâcheux, et que les excès de pression et de tension développées par les charges mobiles sont d'autant plus petits que la portée et la hauteur de la poutre sont plus grandes.

429. Le problème des poutres vibrantes sous l'action d'une charge mobile se met en équation en appliquant les principes qui servent au cas où la charge est fixe. Mais les équations que l'on obtient sont plus compliquées. On suppose qu'une charge, dont le poids est connu, s'avance sur la poutre avec une vitesse constante donnée ; cette charge peut d'ailleurs être supposée concentrée en un seul point (hypothèse de M. Stokes et de M. Phillips), ou répartie uniformément sur une portion de poutre aboutissant à un appui, à la façon d'un train qui s'avance sur le tablier d'un pont (hypothèse faite par M. Renaudot, dans un mémoire inséré en 1861 aux *Annales des ponts et chaussées*). Les équations aux dérivées partielles obtenues dans les deux cas ne peuvent s'intégrer sous forme finie. On peut les intégrer par les séries, soit en employant le développement en sinus des multiples d'un arc proportionnel à l'abscisse, soit en employant le développement suivant les puissances mêmes de l'abscisse. La première méthode est celle que nous avons suivie pour le cas d'une charge fixe ; mais si on l'adoptait pour les charges mobiles, on ne pourrait pas déterminer les constantes arbitraires, ni compléter la solution, par le procédé dont nous avons fait usage. Aussi la seconde méthode est-elle préférable, d'autant plus que,

dans l'espèce, elle conduit à des séries d'une convergence assez rapide.

Sans entreprendre de développer tous ces calculs, nous nous bornerons à citer les résultats principaux obtenus par M. Phillips et par M. Renaudot, sauf à traiter le problème dans un cas particulier très-simple, étudié pour la première fois par M. Bresse, et que nous emprunterons au tome II de son *Cours de mécanique appliquée.*

RÉSULTATS PRINCIPAUX DU TRAVAIL DE M. PHILLIPS.

430. Soient l la portée d'une poutre droite reposant sur deux appuis;

p, le poids par unité de longueur de cette poutre;

g, l'accélération de la pesanteur;

Q, le poids de la charge roulante concentrée en un seul point;

V, la vitesse de cette charge, supposée uniforme;

E, le coefficient d'élasticité de la matière de la poutre;

I, le moment d'inertie de la section par rapport à l'horizontale menée dans son plan par son centre de gravité.

Si la poutre est simplement posée sur deux appuis, le moment fléchissant est maximum dans la section du milieu, et a pour valeur

$$\frac{1}{8}pl^2\left(1+\frac{Ql}{2EI}\times\frac{V^2}{2g}\right)+\frac{1}{4}Ql\left(1+\frac{2}{3}\frac{Ql}{EI}\frac{V^2}{2g}\right),$$

expression qui se réduit à

$$\frac{1}{8}pl^2+\frac{1}{4}Ql \quad \text{pour} \quad V=0,$$

c'est-à-dire pour le cas où la charge accidentelle, Q, au lieu de se déplacer, resterait immobile au milieu de la portée.

Le terme correspondant à la charge uniformément répartie se

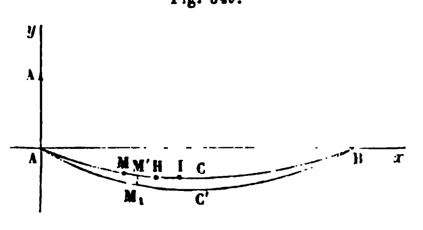
trouve multiplié par un coefficient, $1 + \frac{Ql}{2EI} \times \frac{V^2}{2g}$, qui doit peu différer de l'unité pour que les formules soient applicables; le terme $\frac{1}{2} Ql$, qui correspond au poids additionnel isolé, se trouve multiplié par un autre facteur, un peu différent du premier, mais voisin aussi de l'unité. Si la poutre était encastrée sur ses appuis, on trouverait de même qu'il faut multiplier dans chaque expression des moments maxima, les termes relatifs à la charge propre et au poids additionnel par des facteurs différents, légèrement supérieurs à l'unité, et de la forme $1 + \frac{Ql}{EI}\frac{V^2}{2g} \times \alpha$, le nombre α variant, suivant les cas, de $\frac{1}{8}$ à $\frac{2}{3}$ (1).

HYPOTHÈSE DE M. RENAUDOT.

Annales des ponts et chaussées, 1861, 4e sem., t. I, p. 145 et suiv.

431. Soit ACB une poutre à section uniforme reposant en A et B sur deux appuis de niveau.

Fig. 349.



Soient

AB $= l$ la portée;

p, le poids par unité de longueur de la poutre, y compris sa charge permanente;

q, le poids par unité de longueur de la charge mobile.

Nous supposons que cette charge s'avance dans le sens AB avec une vitesse v constante; on comptera le temps à partir de l'instant où la tête de la charge mobile atteint l'extrémité A de la poutre. Au bout du temps t, la charge a atteint un point I, et occupe sur la poutre une longueur AI $= vt$. En même temps la poutre a fléchi.

(1) Nous donnons ici les coefficients de correction que M. Bresse a introduits dans son cours : ce sont ceux qu'avaient proposés M. Phillips, avec quelques petites altérations.

Elle dessine à l'instant t la figure ACB, et à l'instant suivant $t+dt$ une autre forme AC'B, infiniment voisine.

Prenons pour axe des x l'axe neutre AB de la poutre dans son état naturel, et pour axe des y la verticale montante de la culée A. Désignons par A la réaction verticale de cet appui à l'instant t.

Les forces qui agissent sur la poutre sont :

1° Le poids propre, réparti uniformément de A en B;

2° Le poids de la surcharge, réparti uniformément de A en I;

3° Les forces d'inertie de la poutre;

4° Les forces d'inerties de la surcharge mobile;

5° Les réactions des appuis.

Nous devons exprimer qu'il y a, en chaque point et à chaque instant, équilibre entre ces diverses forces et les forces élastiques développées par la flexion. Nous écrirons donc l'équation des moments fléchissants; ce qui exige que l'on considère successivement deux tronçons dans la poutre, l'un AI occupé par la surcharge; l'autre IB qui ne la contient pas encore.

Prenons un point H dans le premier tronçon. L'équation des moments fléchissants nous donnera en ce point

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2}=\mu,$$

μ étant la somme de tous les moments des forces appliquées à la poutre du point A au point H.

Passons en revue les forces déjà énumérées, pour prendre les moments par rapport à H de celles qui sont appliquées à gauche de ce point.

1° *Poids propre.* x étant la distance AH, le poids propre de la poutre est égal, pour cette longueur, à px, et son moment par rapport au point H est $-\frac{1}{2}px^2$.

2° *Poids de la surcharge.* On trouvera de même $-\frac{1}{2}qx^2$.

3° *Forces d'inertie de la poutre.* Nous admettrons, comme au § 421, que les molécules de la poutre se meuvent suivant la verti-

cale. Appelons x' et y' les coordonnées d'un point quelconque pris entre A et H; le poids d'une longueur dx' de poutre est pdx'; la masse $\frac{pdx'}{g}$, et la force d'inertie verticale a pour expression

$$-\frac{pdx'}{g}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Pour avoir son moment, il faut multiplier cette force par sa distance, $x-x'$, au point H, ce qui donne

$$\frac{pdx'}{g}\frac{d^2y'}{dt^2}(x-x').$$

Ce produit doit être pris avec le signe —, car les facteurs dx' et $x-x'$ étant positifs, le produit a le signe de $\frac{d^2y'}{dt^2}$: or, à une accélération positive, c'est-à-dire dirigée de bas en haut, correspond une force d'inertie négative, qui agit dans le sens du poids propre, et qui tend à diminuer la courbure de la pièce au point H; son moment est donc négatif. On aura pour la somme des moments des forces d'inertie de la poutre

$$-\int_0^x \frac{pdx}{g}\frac{d^2y'}{dt^2}(x-x').$$

4° *Forces d'inertie de la charge mobile.* Le mouvement de la charge mobile est la résultante de deux mouvements distincts : l'un est le mouvement uniforme de cette charge sur la poutre rigide; l'autre résulte de la déformation de la poutre. Pendant le temps dt, le premier mouvement amène le point M de la charge en M' sur la courbe fixe ACB; le second mouvement transporte verticalement le point M' en un point M_1, appartenant à la courbe déformée AC'B. Dans le premier mouvement, la vitesse est uniforme, et égale à v; la force d'inertie se réduit à sa composante centrifuge, et si l'on désigne par qdx' le poids de l'élément concentré au point M, la force d'inertie correspondante est verticale, dirigée vers le bas, et égale à

$$\frac{qdx'}{g}\times\frac{v^2}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la courbe ACB au point M. On devra donc prendre cette expression avec le signe —.

L'autre mouvement s'opère suivant la verticale, et la force d'inertie correspondante a pour expression

$$-\frac{qdx'}{g}\frac{d^2y'}{dt^2}.$$

La somme de ces deux forces est donc

$$-\frac{qdx'}{g}\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{v^2}{\rho}\right),$$

ou bien, en remplaçant $\frac{1}{\rho}$ par sa valeur approximative $\frac{d^2y'}{dx'^2}$,

$$-\frac{qdx'}{g}\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+v^2\frac{d^2y'}{dx'^2}\right).$$

Multiplions par $x-x'$ et intégrons de o à x; nous aurons pour la somme des moments par rapport au point H

$$-\int_0^x\frac{qdx'}{g}\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+v^2\frac{d^2y'}{dx'^2}\right)(x-x').$$

5° *Réaction de l'appui* A. Le moment est positif et égal à Ax.

En résumé, on trouve pour l'équation des moments fléchissants applicable à toute la région occupée par la charge :

$$\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2}=\mathrm{A}x-\frac{1}{2}(p+q)x^2-\frac{p+q}{g}\int_0^x\frac{d^2y'}{dt^2}(x-x')dx'$$
$$-\frac{qv^2}{g}\int_0^x\frac{d^2y'}{dt^2}(x-x')dx'.$$

Nous ferons disparaître les variables x' et y' en différentiant deux fois par rapport à x. La réaction A est indépendante de x, car elle ne dépend que de la longueur AI parcourue par la surcharge, c'est-à-dire du temps t.

La variable x entre à la fois dans la limite supérieure des intégrales indiquées, et, comme paramètre constant, dans la fonction à intégrer. Dans ce cas, la différentiation exige qu'on fasse usage de la formule

générale

$$\frac{du}{dx} = \int_a^b \frac{d\varphi(x', x)}{dx} dx' + \varphi(b, x) \frac{db}{dx},$$

u étant l'intégrale $\int_a^b \varphi(x', x) dx'$.

Ici nous aurons pour la première intégrale,

$$\varphi(x', x) = \frac{d^2y'}{dt^2}(x - x');$$

donc

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2y'}{dt^2}; \qquad b = x,$$

et, par suite,

$$\frac{db}{dx} = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(b, x) \frac{db}{dx} = 0.$$

Donc

$$\frac{du}{dx} = \int_0^x \frac{d^2y'}{dt^2} dx'.$$

On aurait de même pour la seconde intégrale,

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{d^2y'}{dx'^2}(x - x') dx' = \int_0^x \frac{d^2y'}{dx'^2} dx'.$$

La première dérivation donne donc

$$\mathrm{EI} \frac{d^3y}{dx^3} = \mathrm{A} - (p + q)x - \frac{p+q}{g} \int_0^x \frac{d^2y'}{dt^2} dx - \frac{qv^2}{g} \int_0^x \frac{d^2y'}{dx'^2} dx.$$

La seconde dérivation donne ensuite, les intégrales se réduisant chacune à leur dernier élément,

$$\mathrm{EI} \frac{d^4y}{dx^4} = -(p + q) - \frac{p+q}{g} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{qv^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2}$$

équation qui se ramène à la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + g + h^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{K}^2 \frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

en posant

$$h^2 = \frac{qv^2}{p+q},$$

et

$$K^2 = \frac{EIg}{p+q}.$$

Cette équation (1) s'applique à toutes les valeurs de x comprises entre zéro et vt, c'est-à-dire au tronçon AI.

L'équation du tronçon IB se déduira de celle du tronçon AI en comptant les abscisses x_1 à partir de B dans le sens de BA, et en appliquant la même formule, sauf à y faire $q = 0$, puisque la surcharge ne s'étend pas de ce côté. On aura donc

$$h_1 = 0 \quad \text{et} \quad K_1^2 = \frac{EIg}{p},$$

ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + g + K_1^2 \frac{d^4y}{dx_1^4} = 0.$$

Si l'on voulait ramener cette équation aux coordonnées y et x, il suffirait d'y remplacer x_1 par $l - x$.

Pour intégrer les équations (1) et (2), on commence par les débarrasser, au moyen de solutions particulières, du terme tout connu g. Puis on complète cette solution particulière en y ajoutant une variable, qu'on développe en série, en tenant compte des conditions de fixité des points A et B et de raccordement des deux tronçons. Nous renverrons au Mémoire de M. Renaudot pour le développement de la solution et des conséquences pratiques qu'on en déduit.

La tension maximum développée dans le métal par suite du mouvement de la charge est égale au produit de la tension statique produite par cette charge, multipliée par le facteur

$$1 + \frac{1}{6}\frac{qv^2l^2}{EIg}.$$

En discutant les valeurs de ce facteur pour un grand nombre de ponts métalliques pour chemins de fer, M. Renaudot est arrivé à formuler les règles suivantes :

1° L'influence de la vitesse des trains sur l'augmentation des tensions statiques est en général insignifiante ;

2° Pour une valeur donnée, le rapport des tensions statiques aux tensions dynamiques est d'autant plus près de l'unité que la portée est plus grande;

2° Pour de grandes vitesses et de faibles portées, l'influence de la vitesse sur l'accroissement des tensions statiques n'est pas négligeable, mais elle est peu à redouter au point de vue de la stabilité.

M. Renaudot estime qu'un ouvrage est dans de bonnes conditions de résistance, si le facteur par lequel les tensions statiques sont multipliées n'excède pas $\frac{4}{3}$, ce qui donne au plus

$$\frac{1}{6}\frac{qv^2l^2}{\mathrm{EI}g} = \frac{1}{3},$$

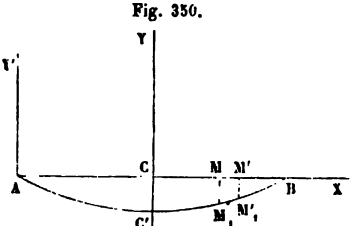
ou bien, pour la limite à partir de laquelle la vitesse devient dangereuse,

$$v = l\sqrt{\frac{2\mathrm{EI}g}{q}}.$$

PROBLÈME DU TRAIN INDÉFINI.

432. Soit AB une poutre de longueur $2a$, posée sur deux appuis de niveau, et pesant p unités de poids par unité de longueur; on la suppose parcourue uniformément par un *train indéfini*, pesant q unités de poids par unité de longueur, et l'on demande la position d'équilibre de la poutre sous l'action de cette surcharge, qui, pour être mobile, n'en est pas moins ici une surcharge permanente. La question est bien simplifiée par cette hypothèse, analogue à celle qu'on emploie en hydraulique pour rendre facilement accessibles les problèmes de l'écoulement des eaux. Le *régime permanent* est une sorte d'intermédiaire entre l'équilibre et le mouvement, et toutes les fois qu'il est constaté, on peut introduire

Fig. 350.



dans les équations des simplifications notables. Le temps n'y intervient plus.

Soit AC'B la poutre dans l'état de déformation où l'on suppose l'équilibre réalisé. Prenons pour origine le point C, milieu de la portée; CX est l'axe des x; nous prendrons pour l'axe des y une verticale CY élevée au point C.

Considérons dans l'état naturel un élément MM', lequel occupe après la déformation la position $M_1 M'_1$. Cet élément est en équilibre sous l'action des forces moléculaires développées dans les sections M_1, M'_1, du poids de l'élément, du poids de la surcharge, et enfin de la *force centrifuge* développée par le déplacement de l'élément de surcharge avec une vitesse V, le long de la courbe $M_1 M'_1$.

Appelons μ le moment des forces élastiques en M_1 (ou en M), et A l'effort tranchant; ρ le rayon de courbure de la courbe ACB au point M_1; la normale à la courbe est sensiblement verticale; la force centrifuge, rapportée à l'unité de masse, est donc une force verticale, tendant vers le bas, et égale à $\frac{V^2}{\rho}$.

Nous aurons pour équations d'équilibre :

Équation des composantes verticales.

$$A - p dx - q dx - \frac{V^2}{\rho} \times \frac{q dx}{g} - \left(A + \frac{dA}{dx} dx\right) = 0,$$

Équation des moments.

$$\frac{d\mu}{dx} = A.$$

La première équation donne

$$\frac{dA}{dx} = -\left(p + q + \frac{V^2 q}{\rho g}\right)$$

Mais on a très-sensiblement

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2};$$

donc

$$dA = -(p+q)dx - \frac{V^2q}{g} \times \frac{d^2y}{dx^2}dx,$$

équation qu'on peut intégrer, et qui donne

$$A = A_0 - (p+q)x - \frac{V^2q}{g}\frac{dy}{dx}.$$

Si l'on fait $x = o$, c'est-à-dire si l'on prend l'effort tranchant au point C', on aura $\frac{dy}{dx} = o$; on doit d'ailleurs avoir $A = o$; donc la constante A_0 est nulle.

Nous avons par conséquent

$$A = -\left((p+q)x + \frac{V^2q}{g}\frac{dy}{dx}\right),$$

et par suite

$$d\mu = -(p+q)xdx - \frac{V^2q}{g}\frac{dy}{dx}dx,$$

ou bien

$$\mu = \mu_0 - \frac{1}{2}(p+q)x^2 - \frac{V^2q}{q}y.$$

Le moment d'élasticité est nul au point B, pour $x = CB = a$; on a aussi en ce point $y = o$: donc

$$\mu_0 = \frac{1}{2}(p+q)a^2,$$

et enfin il vient

$$(1) \qquad \mu = \frac{1}{2}(p+q)(a^2 - x^2) - \frac{V^2q}{g}y = EI\frac{d^2y}{dx^2}$$

pour équation différentielle de la courbe cherchée.

Pour intégrer l'équation (1), M. Bresse change de variable, et pose les relations suivantes :

$$\begin{aligned} EIy &= (p+q)a^4 y' \\ x &= ax' \end{aligned} \quad \text{et} \quad \frac{V^2 q}{g} = \frac{EIU^2}{a^2}.$$

L'équation (1) est ramenée à la forme

$$(p+q)a^2 \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{1}{2}(p+q)a^2(1-x')^2 - \frac{EIU^2}{a^2} \times \frac{(p+q)a^4 y'}{EI},$$

et se réduit à la suivante :

$$(2) \qquad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{1}{2}(1-x'^2) - U^2 y'.$$

On intègre cette équation en en cherchant d'abord une solution particulière, que l'on complète ensuite par l'addition d'une nouvelle variable z : cela revient à changer encore de variable.

Nous poserons à cet effet

$$y' = \frac{1}{2U^2}\left(1 - x'^2 - \frac{2}{U^2}\right) + z.$$

On en déduit pour déterminer z l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2z}{dx'^2} = -U^2 z,$$

qui donne

$$z = A \sin Ux' + B \cos Ux',$$

A et B étant deux constantes arbitraires, qu'il est facile de déterminer en observant que $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$, et que $y = 0$ pour $x = a$. On trouve

$$A = 0, \qquad B = \frac{1}{U^4 \cos U}.$$

et l'équation (1) a enfin pour intégrale

$$(4)\qquad \frac{\mathrm{EI}y}{(p+q)a^2}=\frac{1}{2\mathrm{U}^2}(a^2-x^2)-\frac{a^2}{\mathrm{U}^2}\left(\frac{\cos\frac{\mathrm{U}x}{a}}{\cos \mathrm{U}}-1\right).$$

Le maximum du moment fléchissant a lieu pour $x=0$; il a pour valeur :

$$\mathrm{M}=\frac{1}{2}(p+q)a^2\times-\frac{2}{\mathrm{U}^2}\left(\frac{1}{\cos \mathrm{U}}-1\right).$$

C'est le produit du moment fléchissant *statique*, $\frac{1}{2}(p+q)a^2$ par le facteur $\left[\frac{2}{\mathrm{U}^2}\left(\frac{1}{\cos \mathrm{U}}-1\right)\right.$, qui représente l'effet de la vitesse V de la charge.

Ce facteur devient infini pour $\mathrm{U}=\frac{\pi}{2}$; ce qui indique que la poutre serait en danger de rupture si l'on avait

$$\frac{\mathrm{V}^2q}{g}=\frac{\mathrm{EI}\pi^2}{4a^2},$$

expression que nous interpréterons tout à l'heure.

En faisant

$$\mathrm{U}=\frac{\pi}{4},\quad \text{on trouve}\quad \mathrm{M}=\frac{1}{2}(p+q)a^2\times 1{,}343;$$

dans ces conditions de vitesse, le moment fléchissant augmente, par l'effet du mouvement, d'un tiers environ de sa valeur.

433. L'équation (1) nous montre que l'effet de la charge roulante équivaut, au point de vue du moment fléchissant, à l'effet de deux forces égales à $\frac{\mathrm{V}^2q}{g}$, qui agiraient aux points A et B, suivant la droite AB, de manière à comprimer la poutre (§ 119). Le problème est donc ramené à celui d'une pièce comprimée par ses abouts. La plus petite

force de compression qui mette la pièce en danger de rupture est donnée par la formule

$$\frac{V^2 q}{g} = \frac{EI\pi^2}{4a^2},$$

égalité que nous venons déjà d'obtenir d'une autre manière. Pour obtenir une limite des valeurs non dangereuses de la vitesse V, il faut tenir compte à la fois du poids permanent $2(p+q)a$, et de la force de compression $\frac{V^2 q}{g}$. M. Bresse admet qu'on peut prendre avec sécurité pour limite des valeurs non dangereuses, le résultat fourni par l'équation

$$\frac{V^2 q}{g} = \frac{EI\pi^2}{16a^2}, \quad \text{qui correspond à} \quad U = \frac{\pi}{4},$$

ce qui revient à abaisser la première limite au quart de sa valeur; on trouve alors, comme nous l'avons vu tout à l'heure, un moment maximum supérieur d'un tiers à ce qu'il serait dans le cas du repos de la charge.

Le moment fléchissant maximum, correspondant à l'état statique, a pour expression

$$\frac{1}{2}(p+q)a^2,$$

et la charge maximum correspondante de la matière est donnée par l'équation

$$\frac{RI}{v} = \frac{1}{2}(p+q)a^2.$$

Il y faut faire v égal à la moitié de la hauteur H de la poutre, que nous supposons symétrique ; nous aurons donc

$$R = \frac{\frac{1}{2}(p+q)a^2}{I} \times \frac{H}{2} = \frac{H}{4}\,\frac{(p+q)a^2}{I}.$$

Mais supposons que la vitesse V atteigne sa plus grande limite admissible, donnée par la formule

$$\frac{V^2 q}{g} = \frac{EI\pi^2}{16a^2}.$$

Remplaçons dans cette équation $\frac{a^2}{I}$ par sa valeur tirée de l'équation précédente; il viendra

$$\frac{V^2 q}{g} = \frac{E}{R}(p+q) \times H \times \frac{\pi^2}{64}.$$

Donc enfin

$$V = \frac{\pi}{8} \times \sqrt{\frac{E}{R} \times \frac{p+q}{q} \times gH}.$$

Pour le fer, on a généralement

$$E = 2 \times 10^{10},$$
$$R = 6 \times 10^6.$$

M. Bresse remplace $\frac{p+q}{q}$ par le nombre $\frac{6}{5}$, valeur qui est généralement au-dessous de la réalité; on a alors pour limite supérieure de V

$$V = 17,56 \times \sqrt{2gH}.$$

Pour $H = 0^m,50$, la limite dangereuse de V serait une vitesse de 55 mètres par seconde;

pour $H = 1,00$	$V = 78^m$,
pour $H = 2,00$	$V = 110^m$,
Pour $H = 3^m$,	$V = 135^m$.

Or la vitesse d'un train n'excède guère 28 mètres par seconde, ce qui correspondrait à un parcours de 100 kilomètres dans une heure. Cette vitesse très-considérable ne serait dangereuse que pour les poutres d'une épaisseur très-petite.

434. Le montage d'une poutre droite avec *contre-flèche* permet de réduire, ou de supprimer, ou enfin de faire changer de sens

l'action de la force centrifuge. Mais il est rare que les poutres droites arquées primitivement vers le haut conservent bien longtemps leur flèche de montage.

Si, au lieu d'un train indéfini, roulant avec une vitesse uniforme sur la poutre, on veut tenir compte des dimensions finies du train, le régime n'est plus permanent, et le problème reprend toute sa complication. Il y a déformation de la poutre pendant le passage du train, et les forces d'inertie de la poutre elle-même sont nécessaires à l'équilibre. Néanmoins, ces forces ne sont pas bien grandes en général, et l'on peut admettre que la déformation s'opère de manière à réaliser à chaque instant la situation d'équilibre qui convient à la position de la surcharge à cet instant; une fois le train passé, la poutre entre dans une série de vibrations autour de sa forme d'équilibre, jusqu'à ce que les frottements et la résistance de l'air l'aient ramenée au repos. L'amplitude initiale de la vibration dépend des efforts exercés par le train pendant son passage; mais il s'en faut qu'en pratique, le mouvement s'opère suivant les trajectoires continues que suppose la théorie. Les chocs jouent là un rôle qui peut modifier sensiblement les résultats des calculs. Comme on n'a pas jusqu'ici de données bien positives sur l'intensité et la fréquence de ce genre d'efforts, il est impossible de déterminer par le calcul, sans observation directe, l'amplitude des vibrations.

Cette recherche d'ailleurs serait peut-être sans résultats pour la question qui intéresse le plus le constructeur, à savoir, la durée de la construction. Il ne s'agit pas tant de chercher l'effet mécanique du passage des charges en mouvement, et de calculer les excès d'effort qui peuvent se développer par suite de ce passage, que d'apprécier l'altération moléculaire produite par les trépidations du métal. Les calculs de flèches partent toujours d'un coefficient d'élasticité constant, tandis que ce coefficient d'élasticité varie vraisemblablement à la suite de l'ébranlement des molécules. Ainsi il n'est pas rare de voir une pièce, un arbre tournant par exemple, présentant à l'origine toutes les conditions de résistance, se briser après un travail prolongé, sans avoir jamais subi d'efforts exceptionnels. Peut-être un certain temps de repos est-il nécessaire pour qu'une poutre mé-

talliques, ébranlée par le passage d'une charge, reprenne son état moléculaire normal. La perturbation produite par le passage d'une charge mobile doit surtout être nuisible aux régions des poutres continues à plusieurs travées où il y a renversement des efforts suivant la position de la surcharge (§ 200).

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE DEUXIÈME.

FLEXION PLANE DES POUTRES DROITES.

Fig. 1.

...que principale $Q = \Pi \times \frac{A}{B} vnt$

...ule $Q = \Pi \times \frac{A}{B} \times \ldots$

ray $\frac{2}{\pi} Q$

ray $\frac{5}{Q}$

Rapport $\frac{r}{a^2}$ exprimé en dix millièmes

25

20

15

10

5

0,70

0,75

0,80

0,85

0,90

0,95

0,59 0,60 0,61 0,62 0,63 0,64 0,65 0,66 0,67 0,68 0,69 0,70 0,71 0,72 0,73 0,74 0,75

0,12 0,13 0,14 0,15 0,16 0,17 0,18 0,19 0,20 0,21 0,22 0,23 0,24 0,25 0,26 0,27 0,28 0,29 0,30 0,31 0,32 0,33 0,34 0,35 0,36

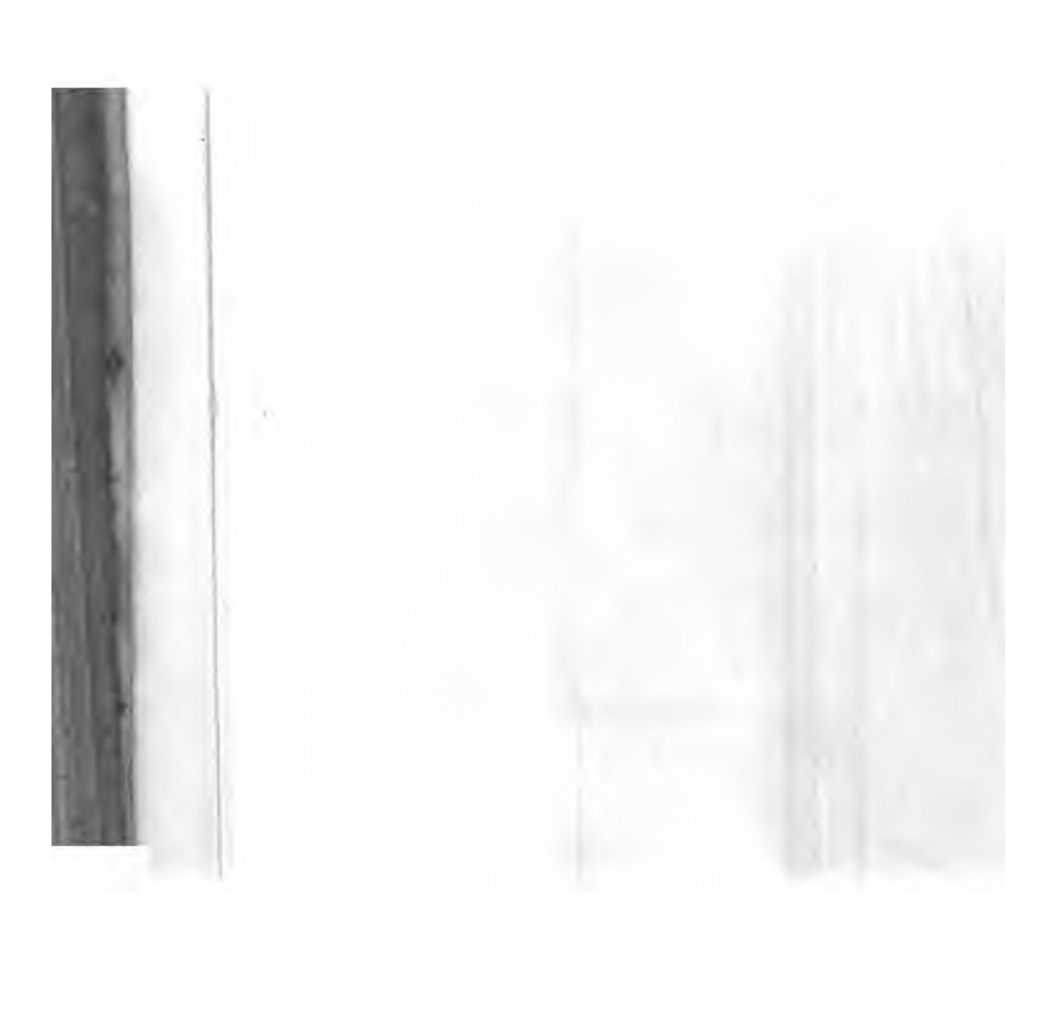
Lemaître, Graveur



LIVRE TROISIÈME.

LIVRE QUATRIÈME.

POUTRE DROITE POSÉE SUR PLUSIEURS APPUIS.



LIVRE SEPTIÈME.

ÉQUILIBRE ET STABILITÉ DES MASSIFS.

LIVRE HUITIÈME.

ÉQUILIBRE DE CERTAINS SYSTÈMES ARTICULÉS.

LIVRE NEUVIÈME.

VIBRATION DES POUTRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

INDEX ALPHABÉTIQUE.

FIN DE L'INDEX.

Paris. — Imprimerie Arnous de Rivière, rue Racine, 26.



LIVRE CINQUIÈME.

PIÈCES COURBES.

LIVRE SIXIÈME.

RÉSISTANCE DES SURFACES.

LIVRE SEPTIÈME.

ÉQUILIBRE ET STABILITÉ DES MASSIFS.

LIVRE HUITIÈME.

ÉQUILIBRE DE CERTAINS SYSTÈMES ARTICULÉS.

LIVRE NEUVIÈME.

VIBRATION DES POUTRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

INDEX ALPHABÉTIQUE.

FIN DE L'INDEX.



